

Vorläufiges Skript zur Vorlesung Strömungsakustik II

Klaus Ehrenfried

28. April 2003

Inhaltsverzeichnis

8 Schallfeld mit Berandung	4
8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral	4
8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen	26
8.3 Schallquellen und Reziprozität	34
9 Bewegte Schallquellen	47
9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols	47
9.2 Frequenzverschiebung	57
9.3 Quelle mit Überschallgeschwindigkeit	60
9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle	63
10 Schallfelder umströmter Körper	73
10.1 Formale Darstellung von bewegten Flächen	73
10.2 Die Lighthill-Gleichung mit Berandung	76
10.3 Quellen auf festen Oberflächen	80
10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche	82
10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings	92
11 Dreidimensionale Kanalmoden	112
11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt	112
11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie . . .	120
11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt	127
12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen	138
12.1 Kanal mit Querschnittssprung	138
12.2 Zusammengefaßte Parameter	145
12.3 Der Helmholtz-Resonator	150
12.4 Prinzip des Reflexionsschalldämpfers	159
12.5 Durchströmter Querschnittssprung	163
Sachverzeichnis	176

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

12.1 Kanal mit Querschnittsprung

In den vergangenen Abschnitten wurde die Wellenausbreitung in Kanälen mit konstantem Querschnitt untersucht. Jetzt wird ein Kanal mit veränderlichem Querschnitt betrachtet. Die geometrische Situation ist in der Abbildung 12.1 dargestellt. Es sind zwei Rohre mit den Durchmessern d_1 und d_2 miteinander verbunden. Die Querschnittsflächen der Rohre werden mit S_1 und S_2 bezeichnet. Das Übergangsstück hat die Länge l . Die Wände werden als schallhart angenommen. Es wird eine niederfrequente Wel-

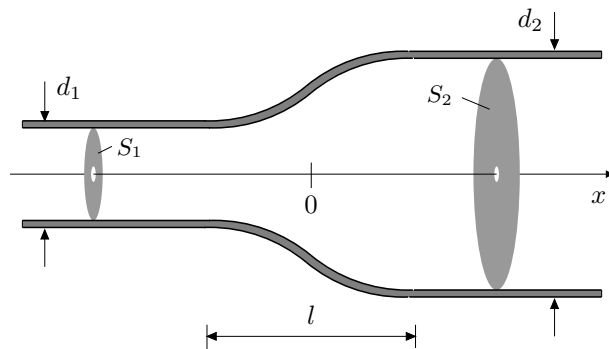


Abbildung 12.1: Kanal mit veränderlichem Querschnitt

lenausbreitung bei einer bestimmten Frequenz ω untersucht. Der Ausdruck “niederfrequent” bedeutet, daß die entsprechende Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (12.1.1)$$

groß gegenüber den Abmessungen der Rohre ist:

$$\lambda \gg d_1 \quad \text{und} \quad \lambda \gg d_2 \quad (12.1.2)$$

Die Frequenz liegt damit weit unterhalb der "Cut-Off"-Frequenzen aller höherer Moden in den beiden Rohren. Somit können sich nur ebene Wellen in den Rohren ausbreiten. Weiterhin wird angenommen, daß es sich um einen Querschnittssprung handelt. Damit ist gemeint, daß die Ausdehnung des Übergangsbereichs ebenfalls klein gegenüber der Wellenlänge ist:

$$\lambda \gg l \quad (12.1.3)$$

Betrachtet wird der Fall einer einlaufenden ebenen Welle von der Seite 1. Abgesehen von komplizierten Vorgängen in dem Übergangsbereich kann es nur eine transmittierte und eine reflektierte Welle geben. Diese beiden Wellen sind eben. Ohne Absorption müssen die beiden Wellen die von der einlaufenden Welle "angelieferte" akustische Energie wieder "abtransportieren". Bei der Reflexion werden wahrscheinlich in dem Übergangsbereich auch höhere Moden angeregt. Diese können sich jedoch nicht ausbreiten und klingen relativ schnell ab. Die dreidimensionalen Effekte sind daher auf den Bereich um die Querschnittsänderung beschränkt.

Zur Beschreibung der Wellen wird die Koordinate x in Richtung der Rohre eingeführt. Der Ursprung befindet sich genau in der Mitte des Übergangs. Es werden nur die ebenen Wellen betrachtet. Die Anteile des Schallfeldes durch dreidimensionale Effekte im Übergangsbereich werden nicht mit einbezogen. Der Druck p' hängt damit nur von x ab. Es wird der Ansatz

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{bei } x > 0 \end{cases} \quad (12.1.4)$$

verwendet. Dabei sind die beiden Anteile mit

$$\begin{aligned} p'_1(x, t) &= A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{i(\omega t + kx)} \\ p'_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.1.5)$$

gegeben. Die Schnelle in x -Richtung wird mit u' bezeichnet. Analog zum Druck wird für sie der Ansatz

$$u'(x, t) = \begin{cases} u'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ u'_2(x, t) & \text{bei } x > 0 \end{cases} \quad (12.1.6)$$

mit den Anteilen

$$\begin{aligned} u'_1(x, t) &= \frac{A_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \\ u'_2(x, t) &= \frac{A_2}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.1.7)$$

verwendet. Wird die eintreffende Welle vorgegeben, so ist damit A_1 festgelegt. Die Aufgabe ist es nun daraus die Werte B_1 und A_2 zu berechnen.

Die Ansätze (12.1.5) und (12.1.7) beschreiben nur die Anteile des Schallfeldes, die zu den ebenen Wellen gehören. Im Übergangsbereich ergibt sich ein dreidimensionales Druck- und Schnellefeld. Zur Beschreibung des Übergangsbereichs wird ein Kontrollvolumen V eingeführt, das den gesamten Bereich umfaßt. Das Kontrollvolumen ist in

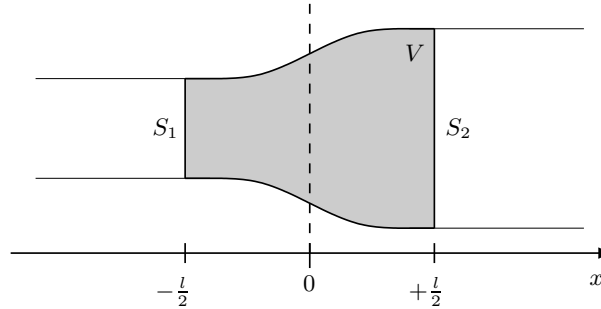


Abbildung 12.2: Kontrollvolumen im Übergangsbereich

der Abbildung 12.2 als schattierter Bereich dargestellt. Es wird angenommen, daß außerhalb des Kontrollvolumens das Schallfeld exakt den Ansätzen (12.1.5) und (12.1.7) entspricht. Das bedeutet, auch an den seitlichen Rändern bei $x = \pm l/2$ besteht das Schallfeld nur aus ebenen Wellen.

Es muß die Massenerhaltung erfüllt sein. Durch die Wellen wird ständig Masse hin und her verschoben. Stellt man eine Bilanzgleichung auf, ergibt sich

$$\rho_0 S_1 u'_1(-\frac{l}{2}, t) - \rho_0 S_2 u'_2(+\frac{l}{2}, t) = \frac{dM}{dt} \quad (12.1.8)$$

Der erste Term auf der linken Seite ist die Masse, die gerade bei $x = -l/2$ von den Wellen in das Volumen hineintransportiert wird. Der zweite Term entspricht der austretenden Masse bei $x = +l/2$. Die Differenz der beiden Terme ergibt die zeitliche Änderung der gesamten Masse M , die sich momentan im Volumen V befindet. Das Schallfeld im Übergangsbereich ist wahrscheinlich sehr komplex. So ist eine genaue Berechnung der Ableitung auf der rechten Seite von (12.1.8) nur numerisch möglich.

Eine analoge Bilanzgleichung kann für die akustische Energie aufgestellt werden. Zuerst soll hier jedoch die Gleichung (12.1.8) durch Näherungen vereinfacht werden, so daß damit später zusammen mit der Energiebilanzgleichung die gesuchten Konstanten B_1 und A_2 berechnet werden können.

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist die Tatsache, das die Wellenlänge groß gegenüber den Abmessungen ist. Dadurch können näherungsweise in (12.1.8) die u' -Terme mit

$$\begin{aligned} u'_1(-\frac{l}{2}, t) &= u'_1(0, t) \\ u'_2(+\frac{l}{2}, t) &= u'_2(0, t) \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

ersetzt werden. Der Fehler ist dabei relativ gering. Die Änderung von u'_2 zwischen $x = 0$ und $x = l/2$ ist nach (12.1.7) durch den Faktor $e^{-ikl/2}$ gegeben. Entsprechen ändern sich die beiden Anteile von u'_1 zwischen $x = -l/2$ nach $x = 0$ um die Faktoren

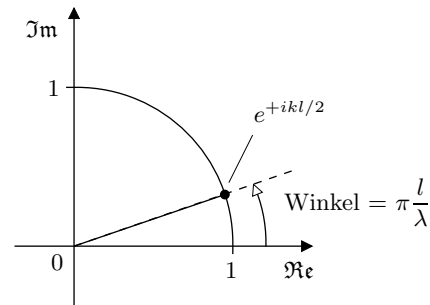


Abbildung 12.3: Zur Abschätzung des Phasenunterschieds

$e^{\pm ikl/2}$. Die beiden Faktoren sind jedoch annähernd gleich Eins, denn es gilt wegen

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12.1.10)$$

die Abschätzung

$$e^{\pm ikl/2} = e^{\pm i\pi l/\lambda} \approx 1 \quad \text{bei} \quad \frac{l}{\lambda} \ll 1 \quad (12.1.11)$$

Betrachtet man den Wert von $e^{+ikl/2}$ als Punkt in der komplexen Ebene, ergibt sich das Bild in Abbildung 12.3. Der Punkt bewegt sich bei steigendem Wert von $kl/2$, auf dem Einheitskreis um den Ursprung. Dabei ist $kl/2$ gerade der Winkel zwischen der Verbindungslinie zum Ursprung und der reellen Achse. Unter der Voraussetzung (12.1.3) ist jedoch der Winkel sehr klein und der Punkt liegt sehr dicht bei Eins.

Die Abschätzung bedeutet, daß die Phasendifferenz der ebenen Wellen zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = \pm l/2$ aufgrund der relativ langen Wellenlänge vernachlässigbar ist. Diese Aussage läßt sich sogar auf alle Wellen in dem Übergangsbereich erweitern. Unabhängig davon, wie kompliziert das Schallfeld im Übergangsbereich wirklich ist, es besitzt die gleiche Frequenz ω wie die einlaufende Welle. Angenommen, die Wellenlänge ist 1000 mal größer als die Ausdehnung l , so können in einer Periode die Wellen 500 mal in dem Übergangsbereich hin und herlaufen. Damit ist der Ausgleich des Drucks im Übergangsbereich praktisch unendlich schnell gegenüber der Änderung des äußeren Drucks durch die einlaufende Welle. Der Druck und damit auch die Dichte können im Übergangsbereich – im Kontrollvolumen – als räumlich konstant angenommen werden. Die Auftretenden Abweichungen sind gering gegenüber den Amplituden, mit denen die Werte zeitlich schwanken. Man kann sich die Änderungen im Übergangsbereich als quasistatisch vorstellen. Dies ist analog zu der Änderung des Luftdrucks in einem Gebäude durch das Wettergeschehen im Zeitraum von einigen Stunden.

An den beiden Seiten des Kontrollvolumens herrscht damit der gleiche Druck. Der Phasenunterschied im gesamten Kontrollvolumen ist vernachlässigbar, so das näherungsweise

$$p'_1(0, t) = p'_2(0, t) \quad (12.1.12)$$

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

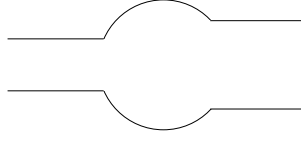


Abbildung 12.4: Verdickung im Übergangsbereich

gilt.

Durch die Ersetzung (12.1.9) kann die linke Seite von (12.1.8) vereinfacht werden. Es ergibt sich

$$\rho_0 S_1 u_1'(0, t) - \rho_0 S_2 u_2'(0, t) = \frac{dM}{dt} \quad (12.1.13)$$

Mit den bisherigen Überlegungen kann aber auch eine Abschätzung für die rechte Seite gefunden werden. Es gilt

$$\frac{dM}{dt} = V \frac{d\rho'_V}{dt} = \frac{V}{c^2} \frac{dp'_V}{dt} \quad (12.1.14)$$

Dabei ist ρ'_V die Dichte und p'_V der Druck im Kontrollvolumen. Die geringen räumlichen Schwankungen des Drucks und der Dichte sind dabei vernachlässigt. Man kann sich ρ'_V und p'_V als die räumlichen Mittelwerte im Kontrollvolumen vorstellen.

Die zeitliche Schwankung des Drucks kann durch

$$p'_V = \Re\{\hat{p}_V e^{i\omega t}\} \quad (12.1.15)$$

ausgedrückt werden. Dabei wurde die komplexe Amplitude \hat{p}_V eingeführt. Es folgt damit für die zeitliche Änderung der Masse

$$\frac{dM}{dt} = \Re\left\{i\omega \frac{V}{c^2} \hat{p}_V e^{i\omega t}\right\} \quad (12.1.16)$$

Der Volumeninhalt V hängt von der konkreten Geometrie des Übergangs ab. Es kann

$$V = S_2 l \alpha \quad (12.1.17)$$

geschrieben werden, wobei die Größe α ein Formfaktor ist. Ist S_2 größer als S_1 so ist für die betrachtete Geometrie $\alpha < 1$. Im Prinzip sind jedoch auch Übergänge möglich, bei denen $\alpha > 1$ ist. Ein Beispiel ist in der Abbildung 12.4 schematisch dargestellt. Die Amplitude \hat{p}_V ist näherungsweise gleich der Druckamplitude auf der rechten Seite des Kontrollvolumens, an der das Schallfeld nur aus der transmittierten ebenen Welle besteht. Es gilt daher

$$\hat{p}_V = \hat{p}_2(0) = \rho_0 c \hat{u}_2(0) \quad (12.1.18)$$

Dabei sind $\hat{p}_2(x)$ und $\hat{u}_2(x)$ die Druck- und Schnelleamplituden in der transmittierten Welle an der Stelle x .

12.1 Kanal mit Querschnittssprung

Schließlich kann die Amplitude auf der rechten Seite von (12.1.16) abgeschätzt werden. Es ergibt sich durch Einsetzen von (12.1.17) und (12.1.18)

$$i\omega \frac{V}{c^2} \hat{p}_V = \underbrace{\left[i2\pi \frac{l}{\lambda} \alpha \right]}_{\ll 1} \cdot \left[S_2 \rho_0 \hat{u}_2(0) \right] \quad (12.1.19)$$

Dabei wurde auch die Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (12.1.20)$$

verwendet. Der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer auf der rechten Seite von (12.1.18) entspricht gerade der Amplitude des zweiten Terms auf der linken Seite von (12.1.13), da

$$\rho_0 S_2 u_2'(x, t) = \rho_0 S_2 \hat{u}_2(x) e^{i\omega t} \quad (12.1.21)$$

ist. Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer ist klein gegenüber Eins, falls die Bedingung

$$\lambda \gg \alpha l \quad (12.1.22)$$

erfüllt ist. Bei den angenommenen Wellenlängen und nicht zu voluminösen Übergängen ist diese Bedingung sicherlich erfüllt.

Die Gleichung (12.1.19) zeigt, daß die Schwankungen des Ausdrucks dM/dt sehr gering gegenüber den Schwankungen auf der linken Seite von (12.1.13) sind. Damit kann der Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden und man erhält letztlich aus (12.1.8) die Näherung

$$\rho_0 S_1 u_1'(0, t) - \rho_0 S_2 u_2'(0, t) = 0 \quad (12.1.23)$$

Analog zur Bilanzgleichung für die Masse läßt sich eine zweite Gleichung für die akustische Energie aufstellen. Diese lautet

$$S_1 p_1'(-\frac{l}{2}, t) u_1'(-\frac{l}{2}, t) - S_2 p_2'(+\frac{l}{2}, t) u_2'(+\frac{l}{2}, t) = \frac{dE}{dt} \quad (12.1.24)$$

Der erste Term auf der linken Seite ist die akustische Energie, die pro Zeiteinheit an der Stelle $x = -l/2$ in das Kontrollvolumen durch die Wellen hinein transportiert wird. Der zweite Term gibt die auf der anderen Seite bei $x = +l/2$ heraus transportierte Energie pro Zeiteinheit an. Die Differenz der beiden Werte gibt die zeitliche Änderung der gesamten akustischen Energie E im Volumen an.

Gleichung (12.1.24) wird entsprechend dem Vorgehen bei der Massenbilanz vereinfacht. Die Schwankungsgrößen p' und u' werden statt an den Positionen $x = \pm l/2$ einfach bei $x = 0$ genommen. Die rechte Seite wird wieder vernachlässigt, da das Volumen im Übergangsbereich keine nennenswerte Energie speichern kann. Die rechte Seite von (12.1.24) kann genau wie im Fall der Massenbilanz als klein gegenüber den Termen auf der linken Seite abgeschätzt werden. An dieser Stelle wird auf eine detaillierte Herleitung jedoch verzichtet.

Es ergibt sich schließlich mit den Vereinfachungen als Energiebilanz

$$S_1 p_1'(0, t) u_1'(0, t) - S_2 p_2'(0, t) u_2'(0, t) = 0 \quad (12.1.25)$$

Die Massenbilanz kann zu

$$S_1 u_1'(0, t) = S_2 u_2'(0, t) \quad (12.1.26)$$

umgeformt werden. Aus den Gleichungen (12.1.25) und (12.1.26) folgt sofort die Beziehung

$$p_1'(0, t) = p_2'(0, t) \quad (12.1.27)$$

Die Energiebilanz reduziert sich mit der Massenbilanz zu einer einfachen Druckgleichheit. Diese Beziehung wurde bereits aus den Überlegungen zum Druckfeld im Übergangsbereich geschlossen. Die räumlichen Druckänderungen im Kontrollvolumen sind verschwindend gering gegenüber den zeitlichen Schwankungen. Die Wellenfelder auf beiden Seiten des Übergangsbereich sind aneinander gekoppelt. Sie haben damit die gleiche Druckamplitude und bei $x = 0$ die gleiche Phase.

Für die Druckfelder wurde der Ansatz (12.1.5) angenommen. Durch Einsetzen in (12.1.27) ergibt sich daraus

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (12.1.28)$$

Dies ist eine direkte Beziehung zwischen den beiden gesuchten Größen B_1 und A_2 . Für die Schnellefelder gilt (12.1.7). Dies kann nun in die Massenbilanz (12.1.26) eingesetzt werden. Man erhält

$$S_1 (A_1 - B_1) = S_2 A_2 \quad (12.1.29)$$

Mit (12.1.28) und (12.1.29) sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten B_1 und A_2 gegeben. Das Gleichungssystem kann aufgelöst werden. Für die Amplitude der reflektierten Welle ergibt sich

$$B_1 = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} A_1 \quad (12.1.30)$$

Sinnvollerweise wird ein Reflexionsfaktor mit

$$R = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \quad (12.1.31)$$

definiert, so daß sich (12.1.30) zu

$$B_1 = R A_1 \quad (12.1.32)$$

vereinfacht. Für die Amplitude der transmittierten Welle folgt

$$A_2 = \frac{2 S_2}{S_1 + S_2} A_1 \quad (12.1.33)$$

Definiert man den Transmissionsfaktor mit

$$T = \frac{2 S_2}{S_1 + S_2} \quad (12.1.34)$$

erhält man die einfache Form

$$A_2 = T A_1 \quad (12.1.35)$$

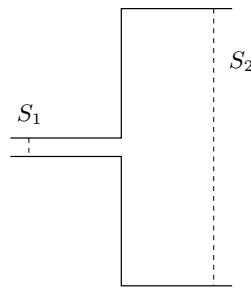


Abbildung 12.5: Querschnittsprung mit relativ großem Flächenverhältnis

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren sind nicht von der Frequenz ω abhängig. Die Frequenz muß nur niedrig genug sein, damit die Voraussetzung erfüllt ist und die Wellenlänge groß gegenüber allen Abmessungen ist.

Besonders interessant ist der Fall, in dem der zweite Querschnitt viel größer als der erste Querschnitt ist

$$S_2 \gg S_1 \quad (12.1.36)$$

Die Situation ist in der Abbildung 12.5 dargestellt. Es ist S_1 gegenüber S_2 vernachlässigbar. Für den Reflexionsfaktor nach (12.1.31) ergibt sich die Näherung

$$R \approx -1 \quad (12.1.37)$$

Dies bedeutet, die von links einlaufende Welle wird praktisch vollständig reflektiert. Der Betrag der Amplituden der reflektierten und der einlaufenden Welle sind gleich. Die Phase der reflektierten Welle ist um 180 Grad gedreht.

läßt man den zweiten Querschnitt S_2 gegen unendlich gehen, entspricht der Übergang einem Rohr mit Querschnitt S_1 , das in einem offenen Raum endet. Für diesen Fall ist sicherlich die Voraussetzung, das alle Abmessungen klein gegenüber der Wellenlänge sind, auf der Seite mit Index 2 nicht mehr erfüllt. Jedoch ist die Totalreflexion mit $R \approx -1$ an offenen Rohrenden experimentell gut bestätigt. Es muß nur die Wellenlänge groß gegenüber dem Rohrdurchmesser sein.

12.2 Beschreibung mit zusammengefaßten Parametern ("Lumped Parameter Model")

Im vorigen Abschnitt wurde eine eindimensionale Beschreibung des Schallfeldes verwendet, um den Reflexionsfaktor am Übergang zu berechnen. Die dreidimensionalen Effekte im Übergangsbereich spielen für den Reflexionsprozeß bei niedrigen Frequenzen überhaupt keine Rolle. Für die Beschreibung der Wellen genügt es den Druck und die Schnelle in einer Richtung nur von einer Ortskoordinate abhängig zu betrach-

ten. Es wurde mit $p'(x, t)$ und $u'(x, t)$ anstatt mit den Feldgrößen $p'(\vec{x}, t)$ und $\vec{v}'(\vec{x}, t)$ gerechnet.

In diesem Abschnitt soll eine neue Wahl von Variablen vorgestellt werden, mit denen die Beschreibung eines Übergangs formal noch weiter vereinfacht werden kann. Zum Beispiel gibt es mit dem im vorigen Abschnitt verwendeten Ansatz Probleme bei der Behandlung eines Übergangs zwischen Rohren, die in verschiedene Richtungen laufen. Die Abbildung 12.6 zeigt ein Beispiel. Es müßte das Koordinatensystem erst

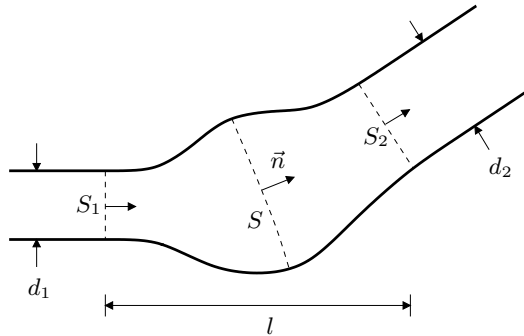


Abbildung 12.6: Kanal mit Änderung der Laufrichtung

geeignet definiert werden, um dann Druck und Schnelle in Abhängigkeit einer Ortskoordinate darstellen zu können. Für die Berechnung der reflektierten Welle ist dies allerdings gar nicht notwendig.

In dem gesamten Kanal werden Querschnittsflächen S definiert, wie in der Abbildung angedeutet ist. In den geraden Rohrstücken werden die Flächen zweckmäßigerweise eben und senkrecht zur Rohrachse gelegt. Im Übergangsbereich sind auch leicht gekrümmte Flächen denkbar. Der Normalenvektor auf den Flächen wird mit \vec{n} bezeichnet. Die Richtung des Vektors wird einfach festgelegt. Als erste neue Variable wird der mittlere Druck auf einer Fläche S gewählt. Dieser wird mit p'_S bezeichnet. Die zweite Variable wird mit

$$U'_S = \int_S \vec{v}' \cdot \vec{n} \, dS \quad (12.2.1)$$

definiert. Sie ist das Integral der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Fläche. Dies ergibt eine sogenannte Volumengeschwindigkeit mit der Einheit "Liter pro Sekunde". Die Größe U'_S gibt also an, wieviel Volumen pro Zeiteinheit über die Fläche S bewegt wird. Bei dieser Darstellung werden sozusagen die Größen Druck und Schnelle auf der Fläche S in jeweils einem Wert "zusammengefaßt". Die neuen Variablen hängen nicht mehr von einer Ortskoordinate sondern von der gewählten Fläche S und von der Zeit ab.

In der angelsächsischen Literatur werden die zusammengefaßten Größen als "lumped parameters" bezeichnet. Dies läßt sich mit "zusammengefaßte Parameter" über-

setzen. Gelegentlich werden sie auch "konzentrierte Parameter" genannt. Dabei stellt man sich vor, daß die Werte sozusagen in einem Punkt (z.B. den Mittelpunkt der Querschnittsfläche) konzentriert werden.

Im niederfrequenten Fall können sich nur ebene Wellen in den geraden Rohrstücken ausbreiten. Dort ist der Druck und die Schnelle über dem Querschnitt S konstant. Aus (12.2.1) ergibt sich

$$U'_S = S \vec{v}' \vec{n} \quad (12.2.2)$$

Breitet sich nur eine ebene Welle in einer Richtung aus, so gilt

$$\vec{v}' = \pm \frac{1}{\rho_0 c} p' \vec{n} \quad (12.2.3)$$

dabei ist das (+) Vorzeichen zu nehmen, wenn die Welle in Richtung des Normalenvektors \vec{n} läuft, und (-) gilt für die Wellen in Gegenrichtung.

Entsprechend ergibt sich für eine ebene Welle in einer Richtung der Zusammenhang

$$U'_S = \pm \frac{S}{\rho_0 c} p'_S \quad (12.2.4)$$

zwischen den neuen Variablen. Zum Vergleich gilt in einer eindimensionalen Welle in einer Richtung

$$u' = \pm \frac{1}{\rho_0 c} p' \quad (12.2.5)$$

Das Verhältnis zwischen der Schnelle u' und dem Druck p' hängt nur von den Eigenschaften des Mediums ab, die ρ_0 und c festlegen. das Verhältnis zwischen dem mittleren Druck p'_S und der Volumengeschwindigkeit U'_S hängt zusätzlich noch von der Fläche S ab.

Geht man von einer harmonischen Welle aus, so kann der Ansatz

$$U'_S = \hat{U}_S e^{i\omega t} \quad (12.2.6)$$

und

$$p'_S = \hat{p}_S e^{i\omega t} \quad (12.2.7)$$

verwendet werden. Dabei sind \hat{U}_S und \hat{p}_S komplexe Amplituden. Damit läßt sich auch eine Impedanz

$$Z_S = \frac{\hat{p}_S}{\hat{U}_S} \quad (12.2.8)$$

definieren. Diese Impedanz ist nicht zu verwechseln mit der klassischen akustischen Impedanz. Sie besitzt eine andere Einheit. Es gilt für den Fall einer ebenen Welle in einer Richtung

$$Z_S = \pm \frac{\rho_0 c}{S} \quad (12.2.9)$$

Überlagern sich zwei Wellen, die in entgegengesetzte Richtungen laufen, gilt Gleichung (12.2.9) natürlich nicht.

Für die Beschreibung des Übergangs zwischen zwei Rohren mit unterschiedlichen Querschnittsflächen, werden auf beiden Seiten des Übergangsbereichs Kontrollflächen S_1 und S_2 angenommen. Die Normalenvektoren sind so gewählt, wie es in der Abbildung 12.6 dargestellt ist. Die Flächen liegen in den geraden Rohrstücken. Es wird vorausgesetzt, daß an diesen Stellen alle dreidimensionalen Störungen durch den Übergang abgeklungen sind. Die Ausdehnung des gesamten Übergangsbereichs l sei klein gegenüber der Wellenlänge:

$$l \ll \lambda \quad (12.2.10)$$

Damit kann der Druck im Übergangsbereich als näherungsweise konstant angenommen werden. Es gilt

$$p'_{S,1}(t) = p'_{S,2}(t) \quad (12.2.11)$$

Ebenfalls sei das Volumen im Übergangsbereich so klein, daß keine nennenswerte Masse gespeichert werden kann. Dies wird durch

$$U'_{S,1}(t) = U'_{S,2}(t) \quad (12.2.12)$$

beschrieben. Das Volumen, welches pro Zeit durch S_1 einströmt muß bei S_2 wieder ausströmen.

Formal sind die beiden Bedingungen am Übergangsbereich etwas einfacher als die entsprechenden Bedingungen im letzten Abschnitt. Es zeigt sich eine Parallele zu dem Fall, daß eine ebene Welle senkrecht auf eine Mediengrenze trifft. Die Mediengrenze, zum Beispiel eine Wasseroberfläche, trennt zwei Medien mit einem unterschiedlichen Wellenwiderstand. Druck und Schnelle müssen auf beiden Seiten der Trennfläche konstant sein. Das heißt, es gilt

$$p'_1(t) = p'_2(t) \quad (12.2.13)$$

und

$$u'_1(t) = u'_2(t) \quad (12.2.14)$$

An der Mediengrenze wird eine einfallende Welle teilweise reflektiert, und es entsteht eine transmittierte Welle.

Beide Fälle sind direkt miteinander vergleichbar. Der Schnelle u' im Fall der Mediengrenze entspricht der Volumengeschwindigkeit U'_S . Die Impedanz Z_S ist nach (12.2.9) von der Fläche S abhängig. Obwohl das Medium und damit der Faktor $\rho_0 c$ in gesamten Kanal konstant ist, ergibt sich am Übergang ein Sprung der Impedanz, der dem Sprung des Wellenwiderstandes an der Mediengrenze entspricht. Durch die neuen Variablen wird der Querschnittsprung formal wie eine Mediengrenze beschrieben.

In den Querschnitten S_1 und S_2 sollen nur ebene Wellen vorliegen. Es wird der Fall mit einer einlaufenden harmonischen Welle von der Seite mit Index 1 betrachtet. Entsprechend wird der Ansatz

$$\begin{aligned} p'_{S,1}(t) &= A_1 e^{i\omega t} + B_1 e^{i\omega t} \\ p'_{S,2}(t) &= A_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

aufgestellt. Mit A_1 wird die Amplitude der einlaufenden Welle vorgegeben. Die Amplitude der reflektierten Welle B_1 und der transmittierten Welle A_2 sollen berechnet werden.

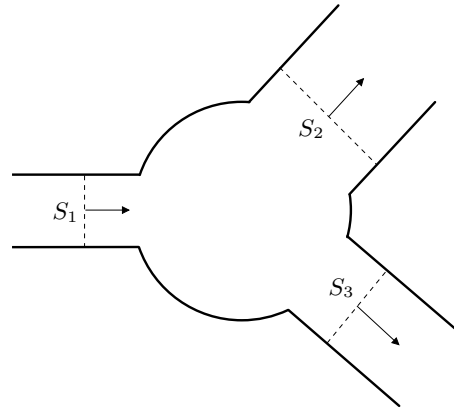


Abbildung 12.7: Verbindungsstelle dreier Kanäle

Für die Volumengeschwindigkeiten in den Kontrollflächen ergibt sich

$$U'_{S,1}(t) = A_1 \frac{S_1}{\rho_0 c} e^{i\omega t} - B_1 \frac{S_1}{\rho_0 c} e^{i\omega t} \quad (12.2.16)$$

$$U'_{S,2}(t) = A_2 \frac{S_2}{\rho_0 c} e^{i\omega t}$$

Einsetzen von (12.2.15) in (12.2.11) ergibt

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (12.2.17)$$

Aus (12.2.16) und (12.2.12) folgt

$$S_1 (A_1 - B_1) = S_2 A_2 \quad (12.2.18)$$

Damit führt die Beschreibung mit den neuen Variablen erwartungsgemäß auf die gleichen Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Amplituden B_1 und A_2 , wie sie schon im letzten Abschnitt hergeleitet wurden.

Bisher brachten die neuen Variablen nur eine geringe Vereinfachung der Beschreibung. Der Vorteil der neuen Methode wird deutlich, wenn kompliziertere Übergänge behandelt werden sollen. Zum Beispiel kann auch eine Verbindung von drei Rohren, wie sie in der Abbildung 12.7 dargestellt ist, einfach beschrieben werden. Sind die Kontrollflächen S_1 , S_2 und S_3 mit den entsprechenden Normalenvektoren wie in der Abbildung definiert, so muß im niederfrequenten Fall

$$U'_{S,1} = U'_{S,2} + U'_{S,3} \quad (12.2.19)$$

und

$$p'_{S,1} = p'_{S,2} = p'_{S,3} \quad (12.2.20)$$

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

gelten. Die Ansätze (12.2.15) und (12.2.16) müssen noch durch die beiden Gleichungen

$$p'_{S,3}(t) = A_3 e^{i\omega t} \quad (12.2.21)$$

und

$$U'_{S,3}(t) = A_3 \frac{S_3}{\rho_0 c} e^{i\omega t} \quad (12.2.22)$$

ergänzt werden. Wird eine einlaufende Welle von dem Rohr mit Index 1 vorgegeben, so ist A_1 bekannt. Jetzt müssen drei Unbekannte B_1 , A_2 und A_3 bestimmt werden. Dafür sind auch drei Gleichungen mit (12.2.19) und (12.2.20) gegeben, wobei letztere zwei Bedingungen enthält. Durch Einsetzen der Ansätze in (12.2.19) und (12.2.20) lassen sich die Unbekannten berechnen.

12.3 Der Helmholtz-Resonator

Ein wichtiges Anwendungsbeispiel, bei dem zusammengefaßte Parameter besonders gut verwendet werden können, ist der sogenannte Helmholtz-Resonator. Er besteht aus einem Volumen V , das mit einem offenen Rohr verbunden ist. Die Querschnittsfläche des Rohres ist S . Die Abbildung 12.8 zeigt schematisch die Anordnung. Das

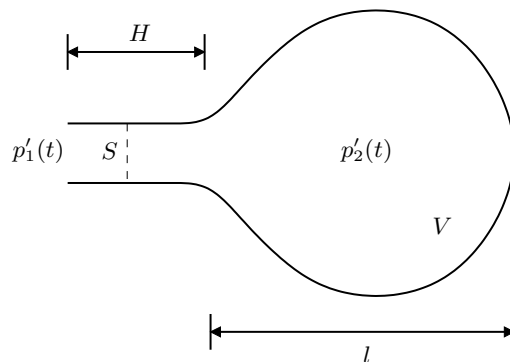


Abbildung 12.8: Helmholtz-Resonator mit Hals und Volumen

Rohrstück wird auch als Hals bezeichnet. Die Form des Volumens spielt keine Rolle, wenn niederfrequente Vorgänge betrachtet werden. Niederfrequent bedeutet, daß die Abmessungen – wie etwa die Ausdehnung l des Volumens, die Hals-Länge H und der Durchmesser des Halses – klein gegenüber der Wellenlänge sind.

Schwankt der äußere Druck $p'_1(t)$, so wird Medium durch das Rohr in das Volumen gedrückt. Die Masse des Mediums im Hals des Resonators wird zusammengefaßt. Es wird angenommen, die Masse verhalte sich wie ein gleich schwerer Kolben oder Stopfen, der sich im Hals befindet. Die Bewegung des Medium außerhalb des Halses

wird komplett vernachlässigt. Das Volumen wirkt wie eine pneumatische Feder. Wird der gedachte Stopfen in das Volumen gedrückt, so wird dort das Medium komprimiert und es ergibt sich eine Rückstellkraft. Das vereinfachte Modell des Resonators ist in der Abbildung 12.9 skizziert. Die Masse des Mediums im Hals ist gleich $\rho_0 H S$. Es

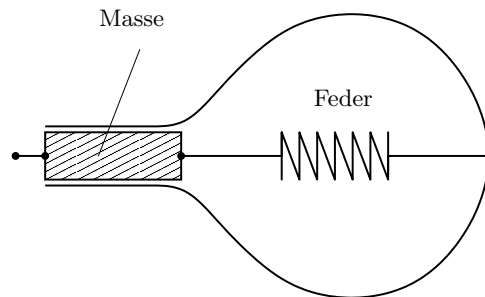


Abbildung 12.9: Prinzipskizze des Helmholtz-Resonators

wird die Anregung des Resonators mit einer vorgegebenen Frequenz ω betrachtet. Die Dichte und der Druck im Volumen V werden als räumlich konstant angenommen.

Wenn die Dichte ρ'_2 im inneren des Volumens schwankt, so ändert sich die Masse im Volumen. Da eine räumlich konstante Verteilung angenommen wurde, ergibt sich für die Schwankung der Masse

$$V \frac{d\rho'_2}{dt} = \rho_0 U'_S(t) \quad (12.3.1)$$

Die Volumengeschwindigkeit $U'_S(t)$ gibt den Volumenstrom durch eine Querschnittsfläche im Hals zum Beispiel in Liter pro Sekunde an. Auf der rechten Seite von (12.3.1) steht damit der momentane Massenstrom in das Volumen hinein. Dies muß der zeitlichen Änderung der Masse im Volumen entsprechen.

Es werden nur harmonische Störungen betrachtet. Damit kann für alle Größen ein entsprechender Ansatz aufgestellt werden. Insbesondere gilt

$$\rho'_2(t) = \hat{\rho}_2 e^{i\omega t} \quad (12.3.2)$$

und

$$U'_S(t) = \hat{U}_S e^{i\omega t} \quad (12.3.3)$$

Die mit dem Symbol $\hat{}$ gekennzeichneten Größen sind die komplexen Amplituden der Größen. Aus (12.3.1) folgt für die Amplituden

$$i\omega V \hat{\rho}_2 = \rho_0 \hat{U}_S \quad (12.3.4)$$

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

Diese Beziehung repräsentiert sozusagen die Massenerhaltung. Für die Impulserhaltung wird die Kräftebilanz an dem gedachten Stopfen im Hals der Resonators betrachtet. Der Stopfen besitzt die Masse $\rho_0 H S$. Die momentane Geschwindigkeit des Stopfens wird mit u_{Stopfen} bezeichnet. Wenn sich der gedachte Stopfen reibungsfrei im Hals bewegen kann, muß

$$S(p'_1 - p'_2) = \rho_0 H S \frac{du_{\text{Stopfen}}}{dt} \quad (12.3.5)$$

gelten. Auf der rechten Seite steht die Masse des Stopfens multipliziert mit dessen Beschleunigung. Der Druck p'_1 wirkt von der äußeren Seite auf den Stopfen. Der Druck wird konstant auf der gesamten Querschnittsfläche angenommen. Von Innen wirkt p'_2 auf den Stopfen. Die linke Seite entspricht somit der resultierenden Druckkraft.

Die Geschwindigkeit des Stopfens kann durch die Volumengeschwindigkeit im Hals ausgedrückt werden. Es ist

$$u_{\text{Stopfen}} S = U'_S \quad (12.3.6)$$

Und für die Ableitungen ergibt sich

$$S \frac{du_{\text{Stopfen}}}{dt} = \frac{dU'_S}{dt} \quad (12.3.7)$$

Damit kann die Ableitung von u_{Stopfen} in (12.3.5) ersetzt werden. Im nächsten Schritt soll aus (12.3.5) eine Beziehung für die komplexen Amplituden abgeleitet werden. Es gelten die Ansätze

$$p'_1(t) = \hat{p}_1 e^{i\omega t} \quad (12.3.8)$$

$$p'_2(t) = \hat{p}_2 e^{i\omega t}$$

Durch Einsetzen der harmonischen Ansätze folgt aus (12.3.5) die Gleichung

$$S(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \rho_0 H i\omega \hat{U}_S \quad (12.3.9)$$

Mit (12.3.4) und (12.3.9) sind zwei Beziehungen zwischen den komplexen Amplituden \hat{p}_1 , \hat{p}_2 , $\hat{\rho}_2$ und \hat{U}_S gegeben. Ist die Druckstörung außerhalb des Resonators vorgegeben, so ist \hat{p}_1 bekannt. Um die restlichen drei Größen daraus berechnen zu können, fehlt noch eine weitere Gleichung. Diese kann aus der allgemeinen Druck-Dichte-Beziehung

$$p'_2 = c^2 \rho'_2 \quad (12.3.10)$$

abgeleitet werden. Es gilt entsprechend

$$\hat{p}_2 = c^2 \hat{\rho}_2 \quad (12.3.11)$$

Damit kann $\hat{\rho}_2$ in (12.3.4) durch \hat{p}_2 ersetzt werden. Es folgt

$$\hat{p}_2 = \frac{c^2 \rho_0 \hat{U}_S}{i\omega V} \quad (12.3.12)$$

Setzt man dies in (12.3.9) ein, ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\hat{p}_1 = \left\{ \frac{i\omega\rho_0 H}{S} + \frac{c^2\rho_0}{i\omega V} \right\} \hat{U}_S \quad (12.3.13)$$

Die Größe in der geschweiften Klammer ist eine komplexe Zahl, die von der Frequenz und den Parametern des Resonators abhängt. Sie gibt das Verhältnis des Drucks und der Volumengeschwindigkeit am Eingang des Resonators an. Damit stellt die Größe in der geschweiften Klammer eine Impedanz bezüglich der zusammengefaßten Parameter p'_S und U'_S dar. Der äußere Druck p'_1 wurde konstant über den gesamten Querschnitt angenommen und entspricht damit dem mittleren Druck über der Fläche S am Eintritt. Es ist

$$p'_1 = p'_S \quad (12.3.14)$$

und der Quotient

$$\frac{\hat{p}_1}{\hat{U}_S} = Z_{S,\text{HR}} \quad (12.3.15)$$

entspricht der Impedanz des Helmholtz-Resonators (HR), die mit $Z_{S,\text{HR}}$ bezeichnet ist. Durch Umformen der geschweiften Klammer ergibt sich

$$Z_{S,\text{HR}} = \frac{i\rho_0 H}{\omega S} \left[\omega^2 - \frac{c^2 S}{VH} \right] \quad (12.3.16)$$

Diese Darstellung zeigt, daß die Impedanz bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{c^2 S}{VH}} \quad (12.3.17)$$

verschwindet. Für eine vorgegebene Druckamplitude \hat{p}_1 ergibt sich eine unendliche große Amplitude der Volumengeschwindigkeit \hat{U}_S . In diesem Fall spricht man von einer Resonanzkatastrophe. Diese tritt jedoch nur ein, wenn die Impedanz $Z_{S,\text{HR}}$ die ideale Form (12.3.16) besitzt. In der Realität gibt es immer Reibungseffekte. Zusätzlich spielen bei größeren Amplituden auch Nichtlinearitäten eine Rolle. Würde man Reibung in dem einfachen Modell mit berücksichtigen, so würde $Z_{S,\text{HR}}$ einen zusätzlichen Realteil besitzen. Im Resonanzfall wird die Impedanz dann nicht mehr gleich Null. Die Amplitude bleibt durch die Reibung begrenzt.

Wird eine berechnete Resonanzfrequenz durch experimentelle Untersuchungen überprüft, so liegt der reale Werte typischerweise etwas niedriger. Die Ursache dafür ist in der relativ einfachen Modellierung der bewegten Masse als einfacher Stopfen zu sehen. Die tatsächliche Form des Schallfeldes kann im Detail recht kompliziert sein. Auf empirische Weise lassen sich jedoch für einfache Geometrien Korrekturen ermitteln. So läßt sich eine bessere Vorhersage der Resonanzfrequenz erhalten, wenn die Halslänge H etwas größer als der tatsächlich Wert angenommen wird. Die notwendige Verlängerung wird üblicherweise als Mündungs- oder Endkorrektur bezeichnet. Mündungskorrekturen wurden empirisch für verschiedenste Querschnittsformen (rund oder eckig) und Austrittskonfigurationen (frei im Raum oder eingelassen in eine ebene Wand) ermittelt.

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

Als Beispiel soll die Resonanzfrequenz einer leeren Bierflasche berechnet werden. Das Volumen der Flasche ist

$$V = 5 \cdot 10^{-4} \text{m}^3 \quad (0.5 \text{ Liter}) \quad (12.3.18)$$

Die Querschnittsfläche wird mit

$$S = 2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \quad (2 \text{ cm}^2) \quad (12.3.19)$$

abgeschätzt. Für die Halslänge wird

$$H = 5 \cdot 10^{-2} \text{m} \quad (5 \text{ cm}) \quad (12.3.20)$$

angenommen. Mit der Schallgeschwindigkeit von $c = 340 \text{ m/s}$ ergibt sich eine Resonanzfrequenz von

$$\omega_{\text{res}} \approx 1000 \frac{1}{\text{Sec}} \quad (12.3.21)$$

Dies entspricht

$$f_{\text{Res}} \approx 150 \text{ Hz} \quad (12.3.22)$$

Ein Ton mit dieser Frequenz ist zu hören, wenn mit dem Mund über die Öffnung der Flasche geblasen wird. Die Strömung löst an der Kante ab und erzeugt Druckschwankungen. Diese Störungen sind breitbandig und enthalten unter anderem auch die Resonanzfrequenz. Als Antwort auf die Störungen reagiert der Resonator mit einer besonders kräftigen Oszillation mit der Resonanzfrequenz.

Helmholtz-Resonator als Schalldämpfer

Im folgenden soll die praktische Anwendung des Helmholtz-Resonators als Schalldämpfer vorgestellt werden. Betrachtet wird eine Anordnung, wie sie in der Abbildung 12.10 skizziert ist. An einer Verbindungsstelle von zwei Rohren ist ein Helmholtz-Resonator angeschlossen. In der Zeichnung sind die Querschnitte der beiden Rohre gleich darge-

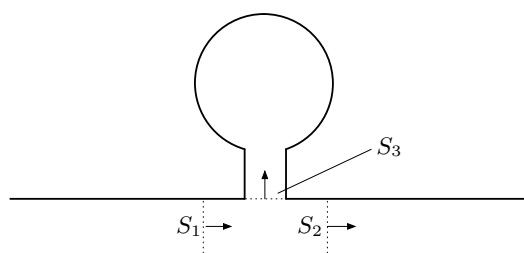


Abbildung 12.10: Kanal mit angeschlossenem Resonator

stellt. Die formale Betrachtung schließt jedoch auch dem Fall mit ein, daß die Querschnitte unterschiedlich sind.

Untersucht wird der Fall einer einlaufenden Welle von der linken Seite. Die Welle soll harmonisch sein und die Frequenz ω besitzen. Betrachtet werden wieder die zusammengefaßten Parameter in drei ausgewählten Querschnitten S_1 , S_2 und S_3 . Die ersten beiden schließen den Anschlußbereich des Resonators nach beiden Seiten ab. Dort soll das Schallfeld ebene Wellen entsprechen. Der Querschnitt S_3 liegt am Eingang des Oszillators. Es können die Ansätze

$$p'_{S,1}(t) = \hat{p}_{S,1} e^{i\omega t} \quad (12.3.23)$$

und

$$U'_{S,1}(t) = \hat{U}_{S,1} e^{i\omega t} \quad (12.3.24)$$

verwendet werden. Analog gilt dies auch für die Größen mit den Indizes 2 und 3.

Wie bei der Behandlung der Verbindung von Rohren mit verschiedenen Durchmessern wird die Amplitude der einfallenden mit A_1 und die der reflektierten Welle mit B_1 bezeichnet. Die Amplitude der transmittierten Welle im Querschnitt S_2 ist A_2 , und A_3 entspricht dem Druck am Eingang des Resonators. Es gilt

$$\begin{aligned} p'_{S,1}(t) &= (A_1 + B_1) e^{i\omega t} \\ p'_{S,2}(t) &= A_2 e^{i\omega t} \\ p'_{S,3}(t) &= A_3 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (12.3.25)$$

Die Aufgabe ist es wieder für ein vorgegebenes A_1 die Größen B_1 , A_2 und A_3 zu berechnen.

Es wird angenommen die Ausdehnung des Anschlußbereiches ist klein gegenüber der Wellenlänge. Der Druck ist damit im gesamten Bereich näherungsweise konstant. Im niederfrequenten Grenzfall wird

$$p'_{S,1}(t) = p'_{S,2}(t) = p'_{S,3}(t) \quad (12.3.26)$$

Daraus folgt

$$\hat{p}_{S,1} = \hat{p}_{S,2} = \hat{p}_{S,3} \quad (12.3.27)$$

Dies läßt sich auch als

$$A_1 + B_1 = A_2 = A_3 \quad (12.3.28)$$

schreiben. Diese Gleichung stellt zwei Bedingungen zwischen den gesuchten Größen dar. Für die Bestimmung ist noch eine weitere Bedingung notwendig, die sich aus der Massenerhaltung ergibt.

Die Volumengeschwindigkeit U'_S ist in den drei Querschnitten durch den jeweiligen Ansatz für den Druck p'_S vorgegeben. Bei S_1 und S_2 müssen die Relationen für ebene Wellen gelten, die auch schon im vorangegangenen Abschnitt verwendet wurden. Im Querschnitt S_3 gilt

$$U'_{S,3}(t) = \hat{U}_{S,3} e^{i\omega t} = \frac{\hat{p}_{S,3}}{Z_{S,3}} e^{i\omega t} \quad (12.3.29)$$

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

Die Impedanz $Z_{S,3}$ ist die Impedanz des Resonators

$$Z_{S,3} = Z_{S,\text{HR}} \quad (12.3.30)$$

Es ergibt sich für die Volumengeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} U'_{S,1}(t) &= \frac{S_1}{\rho_0 c} (A_1 - B_1) e^{i\omega t} \\ U'_{S,2}(t) &= \frac{S_2}{\rho_0 c} A_2 e^{i\omega t} \\ U'_{S,3}(t) &= \frac{1}{Z_{S,3}} A_3 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (12.3.31)$$

Die Massenerhaltung lautet im niederfrequenten Fall bei der Wahl der Normalenvektoren wie in der Abbildung

$$U'_{S,1}(t) = U'_{S,2}(t) + U'_{S,3}(t) \quad (12.3.32)$$

Daraus folgt

$$\hat{U}_{S,1} = \hat{U}_{S,2} + \hat{U}_{S,3} \quad (12.3.33)$$

Durch Einsetzen der komplexen Amplituden aus (12.3.31) in (12.3.33) läßt sich die fehlende Beziehung zwischen den unbekanntenen Größen B_1 , A_2 und A_3 ableiten. Mit den drei Gleichungen lassen sich die gesuchten Größen nun bestimmen.

Im folgenden soll die Lösung des Gleichungssystem auf eine besondere Weise abgeleitet werden. Zunächst wird die Impedanz im Querschnitt S_1 betrachtet.

$$Z_{S,1} = \frac{\hat{p}_{S,1}}{\hat{U}_{S,1}} \quad (12.3.34)$$

Einsetzen der entsprechenden Amplituden aus (12.3.25) und (12.3.31) ergibt

$$Z_{S,1} = \frac{A_1 + B_1}{\frac{S_1}{\rho_0 c} (A_1 - B_1)} \quad (12.3.35)$$

Zur Abkürzung wird die Größe

$$Z_L = \frac{\rho_0 c}{S} \quad (12.3.36)$$

Sie stellt eine Impedanz der Rohre bei Wellenausbreitung in einer Richtung dar. Beispielsweise gilt

$$Z_{S,1} = \begin{cases} +Z_{L,1} & \text{falls } B_1 = 0 \\ -Z_{L,1} & \text{falls } A_1 = 0 \end{cases} \quad (12.3.37)$$

Mit der Abkürzung wird aus (12.3.35)

$$Z_{S,1} = \frac{A_1 + B_1}{\frac{1}{Z_{L,1}} (A_1 - B_1)} \quad (12.3.38)$$

Dies kann nach der gesuchten Größe B_1 aufgelöst werden. Es ergibt sich

$$B_1 = \frac{Z_{S,1} - Z_{L,1}}{Z_{S,1} + Z_{L,1}} A_1 \quad (12.3.39)$$

Der Quotient auf der rechten Seite wird zweckmäßigerweise wieder als Reflexionsfaktor

$$R = \frac{Z_{S,1} - Z_{L,1}}{Z_{S,1} + Z_{L,1}} \quad (12.3.40)$$

abgekürzt. Es gilt dann einfach

$$B_1 = R A_1 \quad (12.3.41)$$

Die Impedanz $Z_{S,1}$ repräsentiert die Eigenschaft des Systems rechts von der Querschnittsfläche S_1 mit dem angeschlossenen Helmholtz-Resonator.

Um den Reflexionsfaktor zu bestimmen, müssen die beiden Impedanzen $Z_{S,1}$ und $Z_{L,1}$ bekannt sein. Letztere kann mit (12.3.36) einfach aus der Querschnittsfläche und dem Wellenwiderstand bestimmt werden. Die Impedanz $Z_{S,1}$ kann man mit Hilfe der Gleichungen (12.3.27) und (12.3.33) berechnet werden. Im ersten Schritt wird (12.3.33) in (12.3.34) eingesetzt. Dann wird durch die Druckamplitude $\hat{p}_{S,1}$ dividiert, wobei die Gleichheit in (12.3.27) ausgenutzt wird. Es folgt

$$Z_{S,1} = \frac{\hat{p}_{S,1}}{\hat{U}_{S,2} + \hat{U}_{S,3}} = \frac{1}{\frac{\hat{U}_{S,2}}{\hat{p}_{S,2}} + \frac{\hat{U}_{S,3}}{\hat{p}_{S,3}}} \quad (12.3.42)$$

Die beiden Summanden im Nenner auf der rechten Seite sind die Kehrwerte der Impedanzen in den beiden Querschnitten S_2 und S_3 . Es gilt somit der Zusammenhang zwischen den Impedanzen

$$Z_{S,1} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{S,2}} + \frac{1}{Z_{S,3}}} \quad (12.3.43)$$

Um $Z_{S,1}$ zu berechnen müssen damit zuerst die Werte für $Z_{S,2}$ und $Z_{S,3}$ ermittelt werden. Da im Querschnitt S_2 nur die transmittierte Welle vorliegt, gilt einfach

$$Z_{S,2} = +Z_{L,2} = +\frac{\rho_0 c}{S_2} \quad (12.3.44)$$

Die Impedanz $Z_{S,3} = Z_{S,HR}$ erhält man bei vorgegebener Frequenz ω aus der Gleichung (12.3.16). Der Lösungsweg kann schließlich wie folgt zusammengefaßt werden:

- 1.) Berechnung der Impedanzen $Z_{S,2}$ und $Z_{S,3}$ aus den Parametern.
- 2.) Mit (12.3.43) ergibt sich daraus $Z_{S,1}$.
- 3.) Aus $Z_{S,1}$ und $Z_{L,1}$ kann mit (12.3.40) der Reflexionsfaktor R bestimmt werden.
- 4.) Bei vorgegebener Amplitude A_1 folgt mit (12.3.41) die Amplitude der reflektierten Welle B_1 .

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

5.) Mit (12.3.27) können aus A_1 und B_1 schließlich auch A_2 und A_3 berechnet werden.

Eine besondere Situation ergibt sich für den Fall, daß die Frequenz der einlaufenden Welle gerade der Resonanzfrequenz des Resonators entspricht

$$\omega = \omega_{\text{res}} \quad (12.3.45)$$

In diesem Fall verschwindet nach (12.3.16) die Impedanz am Eingang des Resonators, und es gilt

$$Z_{S,3} = 0 \quad (12.3.46)$$

Daraus folgt nach (12.3.43) auch für die Impedanz des Systems

$$Z_{S,1} = 0 \quad (12.3.47)$$

In diesem Fall ergibt sich der Reflexionsfaktor

$$R = -1 \quad (12.3.48)$$

Der angeschlossene Resonator bewirkt, daß sich der Anschlußbereich wie eine ideal schallweiche Wand verhält. Diese Eigenschaft wird zum Bau von Schalldämpfern ausgenutzt. Soll in einem Rohr oder Kanal die Ausbreitung von Wellen einer bestimmte Frequenz verhindert werden, so bietet sich der Anschluß eines Resonators mit der entsprechenden Frequenz an. Die Wellen werden dann an dem Anschlußbereich zurückgeworfen.

In der Praxis wird die Wirkung eines Schalldämpfers mit der Durchgangsdämpfung ("Transmission Loss") erfaßt, die hier mit L_T bezeichnet wird. Diese Größe gibt die Pegelabsenkung bei dem Schalldurchgang an. Sie ist in dem betrachteten Fall mit

$$L_T = 10 \log_{10} \left\{ \frac{|A_1|^2}{|A_2|^2} \right\} \quad (12.3.49)$$

definiert. Der Quotient in der geschweiften Klammer hängt ausschließlich von dem Reflexionsfaktor R ab, denn es gilt nach (12.3.28) und (12.3.41)

$$A_2 = (1 + R) A_1 \quad (12.3.50)$$

Für den Fall $R = -1$ ergibt sich daher eine unendlich große Durchgangsdämpfung

$$L_T = \infty \quad (12.3.51)$$

Die Abbildung 12.11 zeigt für ein typisches Beispiel die Verläufe von R und L_T als Funktion der Frequenz ω . Die Frequenz ist mit der Resonanzfrequenz ω_{res} normiert.

12.4 Prinzip des Reflexionsschalldämpfers

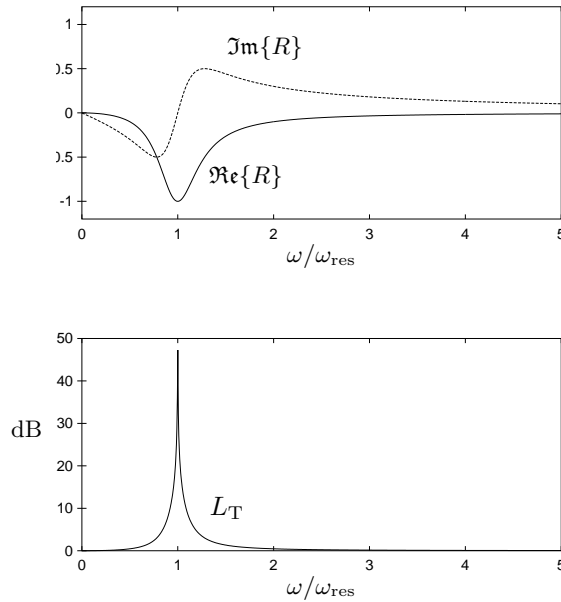


Abbildung 12.11: Komplexer Reflexionsfaktor (oben) und Durchgangsdämpfung (unten) als Funktion der Frequenz für den Schalldämpfer mit Helmholtz-Resonator.

12.4 Prinzip des Reflexionsschalldämpfers

In diesem Abschnitt wird die einfachste Form eines Schalldämpfertopfs ohne Strömung untersucht. Dieser ist zusammengesetzt aus zwei Übergängen, wie sie im Abschnitt 12.1 behandelt wurden. Die Anordnung ist in Abbildung 12.12 skizziert. Es wird angenommen, daß die Frequenz ω klein ist und sich nur ebene Wellen ausbreiten können. Die Wellenlänge sei groß gegenüber den Durchmessern d_1 und d_2 und der Länge der Übergänge. Die Länge L des Topfs ist keiner Einschränkung unterworfen. L kann größer als die Wellenlänge sein. Für die Druckverteilung wird der Ansatz

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{bei } 0 < x < L \\ p'_3(x, t) & \text{bei } x > L \end{cases} \quad (12.4.1)$$

mit

$$\begin{aligned} p'_1(x, t) &= A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{i(\omega t + kx)} \\ p'_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega t - kx)} + B_2 e^{i(\omega t + kx)} \\ p'_3(x, t) &= A_3 e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

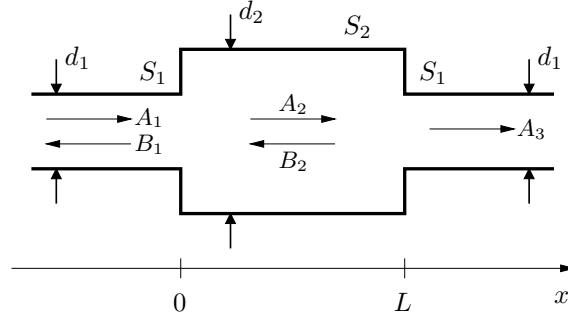


Abbildung 12.12: Kanal mit Erweiterung als Modell für Schalldämpfertopf.

verwendet. Gesucht sind die komplexen Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen B_1 und A_3 bei vorgegebener Amplitude A_1 der einlaufenden Welle. Unbekannt sind ebenfalls die Amplituden A_2 und B_2 der Wellen im Topf. Der Druckverteilung (12.4.1) und (12.4.2) entspricht die Schnelleverteilung

$$u'(x, t) = \begin{cases} u'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ u'_2(x, t) & \text{bei } 0 < x < L \\ u'_3(x, t) & \text{bei } x > L \end{cases} \quad (12.4.3)$$

mit

$$\begin{aligned} u'_1(x, t) &= \frac{A_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \\ u'_2(x, t) &= \frac{A_2}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B_2}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \\ u'_3(x, t) &= \frac{A_3}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

An den beiden Übergängen müssen jeweils zwei Bedingungen erfüllt sein. Dies ergibt insgesamt vier Bedingungen, um die vier unbekanntenen Amplituden zu bestimmen.

In dem niederfrequenten Fall muß der Druck auf beiden Seiten jedes Übergangs gleich sein. Es gilt also

$$p'_1(0, t) = p'_2(0, t) \quad (12.4.5)$$

$$p'_2(L, t) = p'_3(L, t) \quad (12.4.6)$$

Aus der Massenerhaltung an den Übergängen ergeben sich die Bedingungen

$$S_1 u'_1(0, t) = S_2 u'_2(0, t) \quad (12.4.7)$$

$$S_2 u'_2(L, t) = S_1 u'_3(L, t) \quad (12.4.8)$$

12.4 Prinzip des Reflexionsschalldämpfers

Im nächsten Schritt werden die Ansätze (12.4.2) und (12.4.4) in die vier Bedingungen eingesetzt. Dabei kann jeweils durch den Faktor $e^{i\omega t}$ auf beiden Seiten dividiert werden. Für den ersten Übergang bei $x = 0$ ergibt sich aus (12.4.5) und (12.4.7)

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (12.4.9)$$

$$S_1 (A_1 - B_1) = S_2 (A_2 - B_2) \quad (12.4.10)$$

Für den zweiten Übergang bei $x = L$ folgen die Gleichungen

$$A_2 e^{-ikL} + B_2 e^{+ikL} = A_3 e^{-ikL} \quad (12.4.11)$$

$$S_2 (A_2 e^{-ikL} - B_2 e^{+ikL}) = S_1 A_3 e^{-ikL} \quad (12.4.12)$$

Die Beziehungen (12.4.11) und (12.4.12) sind komplizierter als (12.4.9) und (12.4.10), da in ihnen der Faktor $e^{\pm ikL}$ auftritt. Ein Auflösen der vier Gleichungen ist daher nur in vielen Zwischenschritten möglich, die hier aus Platzgründen nicht abgedruckt werden können.

Letztlich lassen sich durch geeignetes Einsetzen der Gleichungen die Unbekannten A_2 , B_2 und A_3 eliminieren, und es ergibt sich eine Beziehung der Form

$$B_1 = R A_1 \quad (12.4.13)$$

Dabei ist R bereits die Abkürzung für den Reflexionsfaktor der gesamten Anordnung, der die Form

$$R = \frac{\left(\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_2}{S_1}\right) i \sin(kL)}{2 \cos(kL) + i \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) \sin(kL)} \quad (12.4.14)$$

besitzt. Auf analoge Weise läßt sich eine Gleichung der Gestalt

$$A_3 = T A_1 \quad (12.4.15)$$

mit dem Transmissionsfaktor

$$T = \frac{2 e^{ikL}}{2 \cos(kL) + i \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) \sin(kL)} \quad (12.4.16)$$

herleiten.

Der Reflexions- und der Transmissionsfaktor hängt nicht nur von den Querschnittsflächen S_1 und S_2 sondern auch von dem Faktor

$$kL = \frac{\omega L}{c} \quad (12.4.17)$$

ab. Das bedeutet, die Reflexion ist frequenzabhängig. Zusätzlich ist der Abstand L zwischen den Übergängen wichtig. Bei

$$kL = n\pi \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.4.18)$$

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

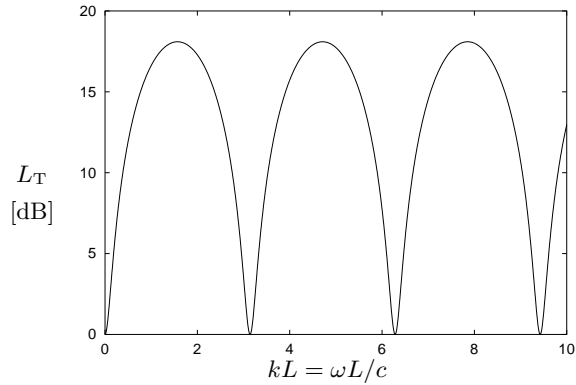


Abbildung 12.13: Durchgangsdämpfung des Reflexionsschalldämpfers als Funktion der Frequenz

ergibt sich die besondere Situation, daß $R = 0$ und $T = 1$ wird. Für die Frequenz muß dazu

$$\omega = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.4.19)$$

gelten. In diesem Fall wird nichts reflektiert und die transmittierte Welle besitzt die gleiche Amplitude und Phase wie die einlaufende Welle. Das aus den beiden Übergängen bestehende System ist scheinbar für die einlaufende Welle gar nicht vorhanden. Die Welle kann ungestört passieren.

Durch die hin und herlaufenden Wellen im Topf besteht eine Koppelung zwischen den Übergängen. Die Wirkung der einzelnen Übergänge addiert sich nicht einfach zur Gesamtwirkung des Systems. Bei bestimmten Frequenzen ist die transmittierte Welle besonders stark und bei anderen besonders schwach.

Für die Praxis ist die Durchgangsdämpfung, die hier mit

$$L_T = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{|A_1|^2}{|A_3|^2} \right) \quad (12.4.20)$$

gegeben ist, von Interesse. Mit (12.4.15) und (12.4.16) erhält man

$$L_T = 10 \log_{10} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \sin^2(kL) \right] \quad (12.4.21)$$

Ein typische Verlauf der Durchgangsdämpfung als Funktion des Faktors kL ist in der Abbildung 12.13 dargestellt. Für die Frequenzen, die die Bedingung (12.4.19) erfüllen, wird $L_T = 0$. Dazwischen ergeben sich Bereiche mit maximaler Durchgangsdämpfung.

Die Bedingung, ob besonders gute Durchgangsdämpfung vorliegt oder nicht, kann

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

veranschaulicht werden. Dazu wird die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (12.4.22)$$

betrachtet. Einsetzen von (12.4.19) ergibt, daß bei

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (12.4.23)$$

$L_T = 0$ wird. Wenn der Abstand L gerade dem Vielfachen der halben Wellenlänge entspricht, wird also nichts reflektiert und die einlaufende Welle wird unverändert transmittiert. Dagegen ist die Durchgangsdämpfung besonders groß wenn

$$kL = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots \quad (12.4.24)$$

gilt. Dies ist bei

$$L = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots \quad (12.4.25)$$

erfüllt.

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

Es soll die Ausbreitung von Wellen in einem durchströmten Kanal mit veränderlichem Querschnitt betrachtet werden, wie er in Abbildung 12.14 dargestellt ist. Es wird von einer stationären Grundströmung ausgegangen. In dem Strömungsfeld breiten sich die Störungen als Wellen aus. Für die Strömung werden weitere Annahmen gemacht:

- Links und rechts von dem Übergangsbereich (mit der Ausdehnung l) liegt jeweils eine homogene Strömung mit ebenen Geschwindigkeitsprofilen vor.
- Die Grenzschicht und andere Reibungseffekte sowie die Wärmeleitung können vernachlässigt werden.
- Die Strömung ist ablösefrei auch im Übergangsbereich.
- Im gesamten Feld herrscht Unterschall mit einer Machzahl $M < 1$.
- Die Grundströmung ist bekannt (z.B. aus Messung oder Rechnung).

Wie im Fall ohne Strömung wird eine relativ niedrige Frequenz ω vorausgesetzt, so daß die Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ groß gegenüber den Durchmessern d_1 und d_2 und der Ausdehnung l ist. Die kann formal durch

$$\lambda \gg d_1 ; \lambda \gg d_2 ; \lambda \gg l \quad (12.5.1)$$

ausgedrückt werden. Zu beachten ist, daß die Schallgeschwindigkeit im Strömungsfeld vom Ort abhängen kann, da die Dichte und der Druck in der Grundströmung räumlich variieren. Damit ist bei gegebener Frequenz ω auch λ vom Ort abhängig.

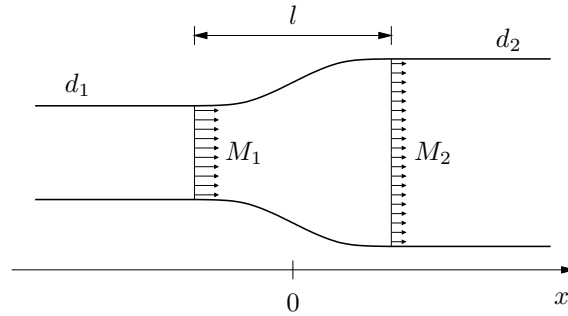


Abbildung 12.14: Schematische Darstellung des durchströmten Übergangs

Aus (12.5.1) folgt, daß sich nur ebene Wellen ausbreiten können, und der gesamte Übergangsbereich kann als Punkt mit vernachlässigbaren Volumen quasi-statisch betrachtet werden. Zur Beschreibung der Schwankungen außerhalb des Übergangs wird das Druckfeld mit

$$p(x, t) = p_0(x) + p'(x, t) \quad (12.5.2)$$

in einen Gleichanteil, der vom Ort abhängt, und einen Schwankungsanteil zerlegt. Der Gleichanteil ändert sich nur im Übergang. Entsprechend gilt einfach

$$p_0(x) = \begin{cases} p_{0,1} & \text{für } x < 0 \\ p_{0,2} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (12.5.3)$$

Der Schwankungsanteil beschreibt die laufenden Wellen. Es wird wie üblich eine von links einlaufende Welle angenommen. Dadurch kann sich eine reflektierte und eine transmittierte Welle ergeben. Folglich werden die Druckschwankungen in der Form

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{für } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (12.5.4)$$

mit

$$\begin{aligned} p'_1(x, t) &= A_1 e^{i(\omega t - \alpha_1^+ x)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_1^- x)} \\ p'_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega t - \alpha_2^+ x)} \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

ausgedrückt. Wie in Abschnitt 12.1 berücksichtigt dieser Ansatz nicht die komplexen Vorgänge im Übergangsbereich. Es werden überall ebene Wellen angenommen und entsprechend hängt der Schalldruck p' nur von einer Koordinate x ab.

Im Gegensatz zum Fall ohne Strömung sind die Wellenzahlen von der Strömungsgeschwindigkeit beziehungsweise der Machzahl abhängig. Die Wellenzahlen ergeben sich aus Überlegungen, die zur Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen mit

homogener Strömung durchgeführt wurden. Dabei wurde die Beziehung

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega_B}{c}\right)^2 - \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_R - \alpha U}{c}\right)^2 - \beta^2} \quad (12.5.6)$$

abgeleitet. Mit ω_B und ω_R sind die Frequenzen im mitbewegten (B) und ruhendem (R) Bezugssystem bezeichnet. α und β sind die Wellenzahlen in Kanalrichtung und senkrecht dazu. Mit U ist die Strömungsgeschwindigkeit gegeben. Hier breiten sich nur ebene Wellen aus, und entsprechend ist $\beta = 0$. Löst man (12.5.6) nach α auf, ergeben sich zwei Lösungen:

$$\alpha^\pm = \frac{\omega_R}{c} \frac{1}{M \pm 1} \quad (12.5.7)$$

Die (+)-Lösung gilt für Wellen in Strömungsrichtung und die (-)-Lösung für entgegelaufende Wellen. Dabei ist die Machzahl mit $M = U/c$ als Abkürzung verwendet worden. In der jetzigen Betrachtung entspricht ω_R der "normalen" Frequenz ω . Die Geschwindigkeit der Grundströmung U wird weiter unten mit u_0 bezeichnet. Zu beachten ist, daß diese Größen in den Gebieten links und rechts vom Übergang unterschiedlich sind. So sind insgesamt vier Wellenzahlen α mit

$$\alpha_1^\pm = \frac{\omega}{c_1} \cdot \frac{1}{M_1 \pm 1} \quad \text{und} \quad \alpha_2^\pm = \frac{\omega}{c_2} \cdot \frac{1}{M_2 \pm 1} \quad (12.5.8)$$

beteiligt. Die Größen für das jeweilige Gebiet sind dabei mit den Indizes 1 beziehungsweise 2 gekennzeichnet. Auch die Schallgeschwindigkeit hängt von dem Ort ab. Jedoch ist die Frequenz überall gleich. Bei einer vorgegebenen Frequenz ergeben sich demnach unterschiedliche Wellenzahlen und damit auch unterschiedliche Wellenlängen in den beiden Gebieten. Diese hängen von der Ausbreitungsrichtung und den Zustandsgrößen in der Grundströmung ab. Für die Berechnung der Reflexions- und Transmissionsfaktoren am Übergang sind die Wellenzahlen allerdings nicht erforderlich.

Massenerhaltung

Wie im Fall ohne Strömung werden wieder zwei Kontrollflächen S_1 und S_2 links und rechts von dem Übergangsbereich definiert, und eine Bilanz für Masse und Energie an den beiden Flächen aufgestellt. In Abbildung 12.15 ist die Situation skizziert. Ohne Grundströmung wird Masse nur durch die Wellen bewegt. Jetzt wird allein schon durch die Grundströmung Masse transportiert. Dies ist in der Bilanzgleichung zu berücksichtigen. Bei der Behandlung der Wellenausbreitung in ebenen Kanälen mit Strömung konnten viele Probleme dadurch umgangen werden, daß die Schallausbreitung im mitbewegten Bezugssystem betrachtet wurde. In diesem Bezugssystem liegt keine Grundströmung vor und die Lösung vereinfachte sich. Hier ist ein vergleichbares Vorgehen nicht möglich, da es keine ausgezeichnete Geschwindigkeit gibt. Man findet kein Bezugssystem, in dem an den beiden Kontrollflächen das Medium im Mittel ruht. Dies ist immer nur getrennt für eine der beiden Flächen möglich.

Es wird daher im folgenden die nichtlineare Massenbilanz aufgestellt und durch Linearisierung eine Bedingung für die Störungen abgeleitet. Dazu wird wieder mit

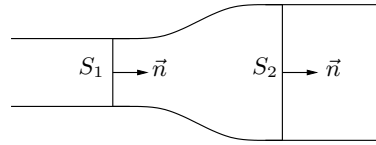


Abbildung 12.15: Zur Definition der Kontrollflächen

zusammengefaßten Parametern gearbeitet. Diesmal wird jedoch nicht die Volumengeschwindigkeit sondern der Massenfluß μ durch einen Querschnitt verwendet. Seine Definition lautet

$$\mu = \int_S \rho \vec{v} \vec{n} dS \quad (12.5.9)$$

Sind – wie vorausgesetzt – an den Kontrollflächen nur ebene Wellen vorhanden, und die Kontrollflächen sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gewählt, so ist die Geschwindigkeit in der Kontrollfläche räumlich konstant. Dadurch vereinfacht sich (12.5.9) zu

$$\mu = S \rho u \quad (12.5.10)$$

wobei u die Geschwindigkeit in Kanalrichtung ist, die mit der Richtung des Normalenvektors \vec{n} übereinstimmt.

Die Größe μ wird mit

$$\mu = \mu_0 + \mu' \quad (12.5.11)$$

in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil zerlegt. Für die beiden Anteile wird die Gleichheit in den beiden Kontrollflächen S_1 und S_2 gefordert. Formal wird dies durch

$$\mu_{0,1} = \mu_{0,2} \quad (12.5.12)$$

und

$$\mu'_1 = \mu'_2 \quad (12.5.13)$$

ausgedrückt. Wenn für die Grundströmung die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist auch Bedingung (12.5.12) erfüllt. Der stationäre Massenfluß über die Querschnittsfläche S_1 muß dem in S_2 entsprechen. Die Bedingung (12.5.13) für die Schwankungen basiert auf der Annahme, daß in dem Kontrollvolumen keine nennenswerte Masse gespeichert werden kann. Die Schwankungen laufen quasi-stationär ab, da die Wellenlaufzeiten innerhalb des Volumens viel kleiner als die Periode der Schwankungen sind. Eine analoge Betrachtung wurde auch im Fall ohne Strömung in Abschnitt 12.1 durchgeführt.

Um aus der Bedingung für Schwankungen μ' des Massenflusses eine Gleichung für die gesuchten Amplituden der Druckwellen abzuleiten, muß μ' durch die Druckschwankung p' ausgedrückt werden. Dazu werden auch Dichte und Geschwindigkeit in einen

Gleich- und einen Schwankungsanteil mit

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (12.5.14)$$

und

$$u = u_0 + u' \quad (12.5.15)$$

zerlegt. Für den Massenfluß über eine Kontrollfläche gilt (12.5.10). Durch Einsetzen ergibt sich daraus

$$\mu = S(\rho_0 + \rho')(u_0 + u') \quad (12.5.16)$$

Dies kann zu

$$\mu = \underbrace{S\rho_0u_0}_{\mu_0} + \underbrace{S\rho_0u' + Su_0\rho'}_{\mu'} + \underbrace{S\rho'u'}_{2. \text{ Ord.}} \quad (12.5.17)$$

umgeformt werden. Der erste Term auf der rechten Seite entspricht dem Massenfluß μ_0 in der Grundströmung. Der zweite und dritte Term hängt linear von einer Schwankungsgröße ab. Diese beiden Terme werden als Schwankung μ' zusammengefaßt. Dabei wird der vierte Term vernachlässigt. Es ergibt sich

$$\mu' = S(u_0\rho' + \rho_0u') \quad (12.5.18)$$

Diese Beziehung gilt näherungsweise für kleine Störungen im akustischen Sinn.

Die Schwankungen der Dichte und der Geschwindigkeit stehen mit den Druckschwankungen im Zusammenhang. Es gilt

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} \quad (12.5.19)$$

Um eine direkte Beziehung zwischen u' und p' zu erhalten, muß vorausgesetzt werden, daß sich nur Wellen in einer Richtung – entweder in (+) oder entgegen (-) der \vec{n} -Richtung – ausbreiten. Dann gilt

$$u' = \pm \frac{p'}{\rho_0 c} \quad (12.5.20)$$

Es sei hier nochmal darauf hingewiesen, daß es eigentlich auch c_0 im Nenner auf der rechten Seite lauten müßte. Der Index 0 wird jedoch an dem Symbol c üblicherweise weggelassen. Da die Schwankung der Schallgeschwindigkeit c' nie vorkommt, besteht keine Verwechslungsgefahr. Mit c ist immer die lokale Schallgeschwindigkeit im Ausgangszustand, der hier der Grundströmung entspricht, gemeint.

Aus den letzten drei Gleichungen ergibt sich eine Beziehung zwischen μ' und p' für eine ebene Welle, die sich in $\pm\vec{n}$ -Richtung ausbreitet. Man erhält

$$\mu' = S \frac{p'}{c} (M \pm 1) \quad (12.5.21)$$

wobei die Abkürzung

$$M = \frac{u_0}{c} \quad (12.5.22)$$

eingeführt wurde. Die Größe M ist die Machzahl der Grundströmung. Zu bemerken ist, daß M hier vorzeichenbehaftet definiert wurde und negativ werden kann, falls das Medium gegen die Normalenrichtung \vec{n} strömt.

Die Schwankung des Massenflusses an der Querschnittsfläche S_1 setzt sich aus einem Anteil durch die einlaufende Welle und einem durch die reflektierte Welle zusammen. Die Druckamplituden der beiden Teilwellen waren mit A_1 und B_1 bezeichnet worden. Entsprechend wird nacheinander $p' = A_1 e^{i\omega t}$ und $p' = B_1 e^{i\omega t}$ in (12.5.21) eingesetzt, und die resultierenden Schwankungen μ' addiert. Es ergibt sich

$$\mu'_1 = \frac{S_1}{c_1} \left[A_1(M_1 + 1) + B_1(M_1 - 1) \right] e^{i\omega t} \quad (12.5.23)$$

Auf der rechten Seite im Querschnitt S_2 liefert nur die transmittierte Welle einen Anteil. Die Druckamplitude in dieser Welle ist mit A_2 bezeichnet. Man erhält damit

$$\mu'_2 = \frac{S_2}{c_2} A_2(M_2 + 1) e^{i\omega t} \quad (12.5.24)$$

Die Massenbilanz für die quasi-statische Schwankung mit $\mu'_1 = \mu'_2$ ergibt damit eine Beziehung zwischen den gesuchten Größen. Es folgt

$$\frac{S_1}{c_1} \left[A_1(M_1 + 1) + B_1(M_1 - 1) \right] = \frac{S_2}{c_2} A_2(M_2 + 1) \quad (12.5.25)$$

Energieerhaltung

Um B_1 und A_2 bestimmen zu können fehlt eine weitere Beziehung. Diese wird wieder aus der Energiebilanz am Übergangsbereich abgeleitet. In Abschnitt 12.1 wurde gezeigt, daß im Fall ohne Strömung die Energieerhaltung zur Druckgleichheit am Übergang äquivalent ist. Mit Strömung ist die Situation komplizierter. Die Energieerhaltung in einem reibungsfreien Fluid wird durch die Bernoulli-Gleichung beschrieben. Da der Übergang als quasi-statisch angesehen werden kann, genügt es die Bernoulli-Gleichung für stationäre Strömungen zu betrachten. Längs einer Stromlinie gilt

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} - \psi = \text{const} \quad (12.5.26)$$

Dabei bezeichnet ψ ein Potential, das zum Beispiel durch die Schwerkraft mit $\psi = -gz$ (z : Höhe) gegeben sein kann. Die Konstante hängt von dem Startpunkt der Integration ab. Insbesondere gilt Gleichung (12.5.26) entlang einer Stromlinie im Übergangsbereich, die einen Punkt im Querschnitt S_1 mit einem Punkt im Querschnitt S_2 verbindet. Um die Berechnungen nicht unnötig kompliziert zu machen, wird im folgenden die Schwerkraft vernachlässigt ($\psi \equiv 0$).

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Bernoulli-Gleichung mit einer thermodynamischen Variablen darzustellen. Um das Integral in (12.5.26) auswerten zu können, muß die Beziehung zwischen Druck und Dichte bekannt sein. Diese hängt von Medium ab, und lautet zum Beispiel für Wasser ganz anders als für Luft.

Wir beschränken uns hier auf Gase, die im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Für diese gilt die Beziehung

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp \quad (12.5.27)$$

wobei h die spezifische Enthalpie (pro Masse), T die Temperatur und s die Entropie bezeichnen. Bereits am Anfang wurde die Einschränkung gemacht, daß neben der Reibung auch die Wärmeleitung keine Rolle spielt. Damit ändert sich die Entropie in einem Fluidelement nicht, und alle Zustandsänderungen laufen adiabatisch ab. In der Strömung gilt also $ds = 0$, und das Integral in (12.5.26) entspricht einfach der spezifischen Enthalpie. Es kann

$$h = \int \frac{dp}{\rho} \quad (12.5.28)$$

geschrieben werden. Zu beachten ist, daß durch das unbestimmte Integral hier die Größe h nur bis auf einen konstanten Anteil gegeben ist. Allerdings spielt dieser Anteil keine Rolle und kann frei gewählt werden.

Die spezifische Enthalpie besitzt die Einheit "Energie pro Masse". Mit $\vec{v}^2/2$ ist die kinetische Energie pro Masse in der Strömung gegeben. Die ersten beiden Terme auf der linken Seite von (12.5.26) bilden also zusammen die spezifische Ruheenthalpie, die gelegentlich auch Gesamtenthalpie oder Kesselenthalpie genannt wird. Sie wird hier mit b bezeichnet. Es gilt

$$b = h + \frac{\vec{v}^2}{2} \quad (12.5.29)$$

Mit dieser thermodynamischen Variablen kann die Bernoulli-Gleichung in der einfachen Form

$$\frac{Db}{Dt} = 0 \quad (12.5.30)$$

ausgedrückt werden. Diese Beziehung gilt allgemein für stationäre isentrope Strömungen.

Um den Begriff der spezifischen Enthalpie etwas anschaulicher werden zu lassen, soll exemplarisch die Enthalpie für ein ideales Gas berechnet werden. In einem idealen Gas gilt bei adiabatischer Zustandsänderung die Beziehung

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{p}{p_*} \right)^{1/\varkappa} \quad (12.5.31)$$

Dabei ist \varkappa der Adiabatenexponent. Mit dem Index $*$ sind die Größen in einem festzulegenden Ausgangszustand bezeichnet. In unserem Fall würde sich zum Beispiel der Grundzustand in der Kontrollfläche S_1 als Ausgangszustand anbieten. Durch Umformung erhält man

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_*} \left(\frac{p}{p_*} \right)^{-1/\varkappa} = \frac{1}{\rho_*} \left(\frac{1}{p_*} \right)^{-1/\varkappa} p^{-1/\varkappa} \quad (12.5.32)$$

Daraus ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\rho} dp &= \frac{1}{\rho_*} \left(\frac{1}{p_*} \right)^{-1/\kappa} p^{1-1/\kappa} \cdot \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right)^{-1} = \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \frac{p_*}{\rho_*} \left(\frac{p}{p_*} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \\ &= \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \frac{p}{\rho} \end{aligned} \quad (12.5.33)$$

Die spezifische Enthalpie kann in dem idealen Gas also mit

$$h = \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \frac{p}{\rho} \quad (12.5.34)$$

aus dem Druck und der Dichte berechnet werden.

Die spezifische Ruheenthalpie ist in den Kontrollflächen S_1 und S_2 jeweils konstant, weil alle Größen über den Querschnitten konstant sind. Da sich die Ruheenthalpie entlang einer Stromlinie zwischen den beiden Querschnitten nicht ändert, ist die Ruheenthalpie sogar im gesamten Übergangsbereich konstant. Zwischen den Werten in den beiden Kontrollflächen ergibt sich die einfache Beziehung

$$b_1 = b_2 \quad (12.5.35)$$

Dies gilt jedoch nur unter den gemachten Annahmen. Die quasi-statische Betrachtung der Strömung im Übergang ist Voraussetzung, daß die Bernoulli-Gleichung in der Form (12.5.26) angewendet werden kann. Die Vernachlässigung der Reibung ist nicht nur für die Bernoulli-Gleichung sondern auch für die Anwendung von (12.5.28) notwendig. Ebenso würden Verdichtungsstöße im Übergangsbereich zu einer Verletzung von (12.5.28) führen. In der angenommenen quasi-statischen Unterschallströmung können jedoch keine Stöße vorkommen.

Die Ruheenthalpie wird wie der Massenfluß in einen Gleich- und einen Schwingungsanteil zerlegt:

$$b = b_0 + b' \quad (12.5.36)$$

Aus der quasi-statischen Überlegung folgt, daß beide Anteile jeweils für sich in dem Übergangsbereich räumlich konstant sind. Es ist also

$$b_{0,1} = b_{0,2} \quad (12.5.37)$$

und

$$b'_1 = b'_2 \quad (12.5.38)$$

erfüllt. Aus der Bedingung (12.5.38) kann eine weitere Beziehung zwischen den gesuchten Druckamplituden abgeleitet werden. Dazu muß die Schwankung b' der Ruheenthalpie mit der Druckschwankung p' in Zusammenhang gebracht werden.

In dem Kontrollflächen S_1 und S_2 kann die Geschwindigkeit \vec{v} durch die Größe u ersetzt werden. Entsprechend lautet die Formel für die Ruheenthalpie

$$b = h + \frac{u^2}{2} \quad (12.5.39)$$

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

Für die Schwankungsanteile ergibt sich daraus

$$b' = h' + u_0 u' + \mathcal{O}(2) \quad (12.5.40)$$

Aus (12.5.28) folgt für die Schwankung der Enthalpie

$$h' = \frac{1}{\rho_0} p' + \mathcal{O}(2) \quad (12.5.41)$$

Das gleiche Resultat würde man auch aus (12.5.34) und der Beziehung $p' = c^2 \rho'$ herleiten können. Unter Vernachlässigung der Anteile höherer Ordnung gilt also

$$b' = \frac{1}{\rho_0} p' + u_0 u' \quad (12.5.42)$$

Um die Geschwindigkeitsschwankung u' durch den Druck ausdrücken zu können, wird wieder von reiner Wellenausbreitung in eine Richtung ausgegangen. Dann gilt Beziehung (12.5.20). Damit folgt

$$b' = \frac{1}{\rho_0} p' \pm u_0 \frac{p'}{\rho_0 c} = \frac{p'}{\rho_0} (1 \pm M) \quad (12.5.43)$$

Das (+)-Zeichen gilt für Wellen in Richtung des Normalenvektors \vec{n} (in x -Richtung) und das (-)-Zeichen entsprechend für entgegengesetzt laufende Wellen.

Die Schwankungen in der Querschnittsfläche S_1 ergeben sich aus der Überlagerung der einlaufenden und der reflektierten Welle. Für beide Wellen kann getrennt mit (12.5.43) die Ruheenthalpieschwankung durch die Druckschwankung ausgedrückt werden. Die gesamte Schwankung ergibt sich wieder durch Überlagerung der beiden Anteile. Man erhält

$$b'_1 = \frac{1}{\rho_0} \left[A_1(1 + M_1) + B_1(1 - M_1) \right] \cdot e^{i\omega t} \quad (12.5.44)$$

In dem Querschnitt S_2 trägt nur die transmittierte Welle zu den Schwankungen bei. Dort gilt

$$b'_2 = \frac{1}{\rho_0} A_2(1 + M_2) e^{i\omega t} \quad (12.5.45)$$

Die Energiebilanz für die quasistatischen Schwankungen mit $b'_1 = b'_2$ liefert schließlich

$$\frac{1}{\rho_0} \left[A_1(1 + M_1) + B_1(1 - M_1) \right] = \frac{1}{\rho_0} A_2(1 + M_2) \quad (12.5.46)$$

Mit (12.5.25) und (12.5.46) sind nun zwei Gleichungen für die beiden gesuchten Größen B_1 und A_2 gegeben. Damit läßt sich bei vorgegebener Druckamplitude A_1 der einlaufenden Welle die reflektierte und die transmittierte Welle berechnen.

Reflexionsfaktor

Bevor das Gleichungssystem gelöst wird, soll auf eine alternative Möglichkeit der Darstellung des Problems hingewiesen werden. Der Druck ist eine anschauliche Größe, die relativ leicht zu messen ist. Daher wird in der Darstellung oft alles auf den Druck bezogen. Im folgenden soll die Ruheenthalpie als Bezugsgröße verwendet werden. In der einlaufenden Welle wird nicht die Druckamplitude sondern die Amplitude der Ruheenthalpieschwankung vorgegeben. Sie wird mit $A_{b,1}$ bezeichnet. Gesucht sind die entsprechenden Amplituden in der reflektierten und der transmittierten Welle. Diese werden durch die Größen $B_{b,1}$ und $A_{b,2}$ dargestellt. Für die Schwankungen in den Querschnittsflächen S_1 und S_2 gilt entsprechend

$$b'_1 = (A_{b,1} + B_{b,1}) e^{i\omega t} \quad (12.5.47)$$

und

$$b'_2 = A_{b,2} e^{i\omega t} \quad (12.5.48)$$

Zwischen den Druckamplituden und den Amplituden der Größe b' gelten die Zusammenhänge

$$A_{b,1} = \frac{1}{\rho_{0,1}} A_1 (1 + M_1), \quad (12.5.49)$$

$$B_{b,1} = \frac{1}{\rho_{0,1}} B_1 (1 - M_1), \quad (12.5.50)$$

$$A_{b,2} = \frac{1}{\rho_{0,2}} A_2 (1 + M_2) \quad (12.5.51)$$

Eine Beziehung zwischen den gesuchten Größen ergibt sich aus der Energiebilanz am Übergang $b'_1 = b'_2$. Es folgt

$$A_{b,1} + B_{b,1} = A_{b,2} \quad (12.5.52)$$

Diese Gleichung ist formal deutlich einfacher als die entsprechende Beziehung (12.5.46) zwischen den Druckamplituden.

Aus der Massenbilanz läßt sich eine weitere Beziehung zwischen den neuen Amplituden ableiten. Vergleicht man die Gleichungen (12.5.21) und (12.5.43), so folgt für eine ebene Welle in $\pm\vec{n}$ -Richtung die Relation

$$b' = \pm \frac{c}{\rho_0 S} \mu' \quad (12.5.53)$$

Der Faktor vor μ' auf der rechten Seite kann als Impedanz interpretiert werden. Man definiert entsprechend

$$Z_b = \frac{b'}{\mu'} \quad (12.5.54)$$

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

Diese Größe unterscheiden sich natürlich von der akustischen Impedanz, die das Verhältnis von Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen angibt. In einer alternativen Darstellung mit den Parametern b' und μ' erweist sich die Impedanz Z_b als nützliche Größe. In einer reinen Welle in $\pm\vec{n}$ -Richtung gilt

$$Z_b = \pm \frac{c}{\rho_0 S} \quad (12.5.55)$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist sozusagen der Wellenwiderstand in der (b', μ') -Darstellung.

Mit (12.5.53) folgt für die Schwankungen des Massenflusses in den Kontrollflächen

$$\mu'_1 = \left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_1 (A_{b,1} - B_{b,1}) e^{i\omega t} \quad (12.5.56)$$

und

$$\mu'_2 = \left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_2 A_{b,2} e^{i\omega t} \quad (12.5.57)$$

Zu beachten ist, daß in (12.5.56) ein Minuszeichen vor der Amplitude $B_{b,1}$ auftritt.

Aus der Massenbilanz $\mu'_1 = \mu'_2$ folgt schließlich die Beziehung

$$\left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_1 (A_{b,1} - B_{b,1}) = \left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_2 A_{b,2} \quad (12.5.58)$$

Diese Gleichung ist ebenfalls etwas einfacher als die entsprechende Beziehung (12.5.25) für die Druckamplituden.

Die Gleichungen (12.5.52) und (12.5.58) lassen sich nach $B_{b,1}$ und $A_{b,2}$ auflösen. Man erhält

$$B_{b,1} = R_b A_{b,1} \quad (12.5.59)$$

$$A_{b,2} = T_b A_{b,1} \quad (12.5.60)$$

Dabei ist der Reflexionsfaktor für die einlaufende Ruheenthalpiewelle mit

$$R_b = \frac{\left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_1 - \left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_2}{\left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_1 + \left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_2} \quad (12.5.61)$$

und der Transmissionsfaktor mit

$$T_b = 1 - R_b = \frac{2 \left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_2}{\left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_1 + \left(\frac{\rho_0 S}{c}\right)_2} \quad (12.5.62)$$

gegeben. Betrachtet man die Reflexion an den durchströmten Querschnittsprung für den Schalldruck, ergeben sich durch Auflösen von (12.5.25) und (12.5.46) die analogen Beziehungen

$$B_1 = R A_1 \quad (12.5.63)$$

und

$$A_2 = T A_1 \quad (12.5.64)$$

Die Größen R und T ohne Index sind wie bisher der Reflexions- und der Transmissionsfaktor für die Druckwellen. Allerdings ergeben sich für diese Faktoren kompliziertere Ausdrücke. Man erhält

$$R = R_b \frac{(1 + M_1)}{(1 - M_1)} \quad (12.5.65)$$

und

$$T = (1 - R_b) \frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} \frac{(1 + M_1)}{(1 + M_2)} \quad (12.5.66)$$

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren hängen von der Grundströmung ab. In die Größen R_b und T_b gehen neben den geometrischen Parametern die Dichte ρ_0 und die Schallgeschwindigkeit c ein. Die Größen R und T hängen zusätzlich noch von der Strömungsgeschwindigkeit ab. Anscheinend ist die (b', μ') -Darstellung besser zur Beschreibung der Aufgabenstellung geeignet, weil sie auf etwas einfachere Gleichungen führt. Sie hat jedoch den Nachteil, daß die Ruheenthalpie gegenüber dem Druck eine relativ unanschauliche Größe ist.

Zahlenbeispiel

Zuletzt soll ein Zahlenbeispiel vorgestellt werden. Es wird eine Querschnittsänderung mit

$$d_2 = 2 d_1$$

und

$$S_2 = 4 S_1$$

angenommen. Der Durchmesser verdoppelt sich, und die Fläche vervierfacht sich. Die Machzahl im breiten Teil wird mit $M_2 = 0.1$ vorgegeben. Es strömt ein ideales Gas mit $\kappa = 1.4$ (z.B. Luft). Daraus berechnet sich

$$M_1 = 0.448$$

Für die Dichte in der Grundströmung ergibt sich

$$\rho_{0,1} = 0.906 \rho_K \quad \text{und} \quad \rho_{0,2} = 0.995 \rho_K$$

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

und die Schallgeschwindigkeiten werden mit

$$c_1 = 0.961 c_K \quad \text{und} \quad c_2 = 0.998 c_K$$

berechnet. Dabei sind die Werte auf die Ruhedichte ρ_K und die Ruheschallgeschwindigkeit c_K in der Strömung bezogen. Um den Reflexionsfaktor zu berechnen werden die Ausdrücke

$$\frac{\rho_{0,1} S_1}{c_1} = 0.943 \frac{\rho_K S_1}{c_K}$$

und

$$\frac{\rho_{0,2} S_2}{c_2} = 3.988 \frac{\rho_K S_1}{c_K}$$

berechnet. Daraus ergibt sich der Reflexionsfaktor für die Ruheenthalpiewelle mit

$$R_b = \frac{0.943 - 3.988}{0.943 + 3.988} = -0.617$$

Schließlich erhält man den Reflexionsfaktor für die Druckwelle mit

$$R = R_b \frac{1 + 0.448}{1 - 0.448} = -1.618$$

In diesem Beispiel hat die reflektierte Druckwelle eine größere Amplitude als die einlaufende Welle!

Sachverzeichnis

- Ansatz
 - harmonischer, 4, 120
- Beobachtungsmachzahl, 51, 60
- Beobachtungswinkel, 55, 59, 61
- Bernoulli-Gleichung, 168
- Bessel-Funktion, 124
- Besselsche Differentialgleichung, 121, 130
- Bezugssystem
 - mitbewegt, 87
- “Cut-Off”-Frequenz, 116, 135
- Dipol, 32
- Dipolfeld, 9
- Doppler-Faktor, 60
- Doppler-Verschiebung, 60
- Druckbauch, 117
- Durchgangsdämpfung, 158, 162
- Enthalpie
 - spezifische, 169
- Ersatzquellenmethode, 31
- Euler-Gleichung
 - linearisierte, 115
- Fernfeld, 67
 - geometrisches, 18
- Fowcs Williams und Hawkins
 - Gleichung von, 80, 93
- Fourier-Integralformel, 21
- Fourier-Transformierte, 21
- Frequenzverschiebung, 57
- Gammafunktion, 124
- Gas
 - ideales, 169
- Greensche Funktion, 46
- Greenscher Integralsatz, 5
- Grundmode, 117
- Hankel-Funktionen, 126
- Heaviside-Funktion, 76
- Helmholtz-Gleichung, 4, 120
 - inhomogene, 35
- Helmholtz-Resonator, 41, 150
- Helmholtz-Zahl, 20
- Impedanz, 147, 153, 156
- Impulsleichung, 78
- Impulsquelle
 - bewegte, 64
- Körperoberfläche
 - undurchlässige, 34
- Kanal
 - mit rechteckigem Querschnitt, 112
 - mit rundem Querschnitt, 127
 - mit veränderlichem Querschnitt, 138
- Kirchhoff-Helmholtz-Integral, 4, 8
- Kirchhoff-Integral, 24, 96, 101
- Knotenlinie, 132
- Knotenring, 132
- Kolben
 - in unendlich ausgedehnter Wand, 17
- Kontinuitätsgleichung, 77
- Kugelwelle, 4
- Lösungen
 - zylindersymmetrische, 120
- Lighthill-Gleichung, 76
 - erweiterte, 80, 93
- “Loading-Noise”, 106
- “Lumped Parameters”, 146

- Machscher Kegel, 61
- Machscher Winkel, 63
- Massenquelle
 - bewegte, 63
- Mediengrenze, 148
- Mode
 - im Kanal, 116
 - im Rohr, 132
- Monopol, 32
 - bewegter, 47
- Monopolfeld, 9
- Multipolentwicklung, 31

- Neumann-Funktion, 124
- Normalengeschwindigkeit, 75, 77

- Oberfläche
 - bewegte, 73, 74
 - lokal reagierend, 43

- Parameter
 - zusammengefaßte, 147
- Potential
 - akustisches, 11
- Propellergeräusche, 104

- Quadrupol, 32
- Quelle
 - bewegt mit Überschall, 54
 - bewegte, 47
- Quellverteilung
 - flächenhafte, 80
- Querschnittssprung
 - durchströmt, 163

- Randbedingung, 34
 - periodische, 130
- Randelementemethode, 26
- Reflexionsfaktor, 144, 157, 161, 173
- Resonanzfrequenz, 153
- Resonanzfrequenzen
 - im Quader, 119
- Reziprozitätsprinzip, 44
- Rohrende
 - offenes, 145
- Rotorgeräusche, 104

- Ruheenthalpie
 - spezifische, 169

- Schalldämpfer, 154
- Schalldämpfertopf, 159
- “Spinning Mode”, 133
- Strömungssimulation, 95

- “Thickness-Noise”, 107
- Transmissionsfaktor, 144, 161

- Überschallknall, 62

- Wand
 - lokal reagierende, 39
 - schallhart, 39, 114
 - schallweich, 39
- Wandimpedanz, 39
- Wellen
 - stehende, 126
- Wellengleichung, 112, 120
 - inhomogene, 8, 34, 47, 82
- Wellenwiderstand, 148
- Wellenzahlenl
 - im Kanal, 116
- Wellenzahlen
 - im durchströmten Kanal, 164
 - im Kanal, 114

- Zeit
 - retardierte, 47, 55, 82
- Zylinderkoordinaten, 120