1 Schallentstehung beim Auftreffen eines Wirbelpaars auf eine Wand

1.1 Problemstellung

Betrachtet wird der Fall, daß ein Wirbelpaar senkrecht auf eine Wand trifft. Die Wirbel sind gleichstark und drehen gegensinnig. Die Problemstellung ist zweidimensional. Es wird ein reibungsfreies Fluid angenommen, und die Wirbel werden durch singuläre Potentialwirbel dargestellt. Die feste Wand wird durch Spiegelwirbel realisiert, wie es in der Abbildung 1 dargestellt ist. Die beiden Wirbel A und B laufen zunächst ungestört nach

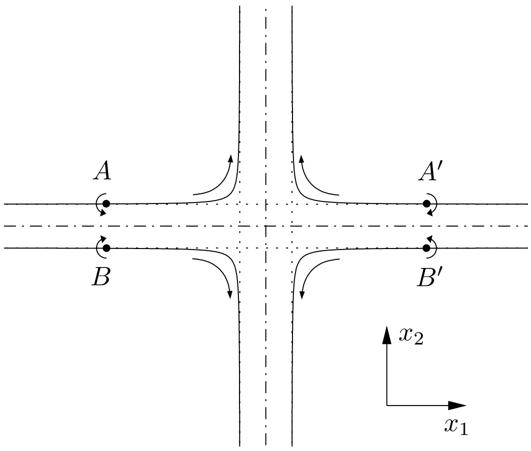

Abbildung 1: Wirbelpaar mit Spiegelwirbeln

rechts gegen die Symmetrielinie, die als Wand angesehen wird. Irgendwann geraten die Wirbel unter den Einfluß ihrer Spiegelwirbel A' und B' und werden abgelenkt.
Es können übrigens auch beide Symmetrielinien als Wände interpretiert werden. Die jeweiligen Bahnen der Wirbel entsprechen also auch der eines einzelnen Wirbels in einer rechtwinkligen Ecke.
Die Bahnen der Wirbel lassen sich mit Hilfe das Biot-Savart-Gesetzt berechnen. Bei der gegebenen Geometrie kann ein Differentialgleichungssystem für die Bewegung des Wirbels A unter Einfluß der drei anderen Wirbel angegeben werden. Dies ist zum Beispiel in dem Buch “Hydrodynamics” von H. Lamb gezeigt. Es ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_{\mathrm{w},1}}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{x_{\mathrm{w},1}^2}{x_{\mathrm{w},2}\, R^2} \tag{1}$$

und

$$\frac{\partial x_{\mathrm{w},2}}{\partial t} = +\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{x_{\mathrm{w},2}^2}{x_{\mathrm{w},1}\, R^2}\,. \tag{2}$$

Dabei ist $\left(x_{\mathrm{w},1}, x_{\mathrm{w},2}\right)$ die Position des Wirbels A, und mit

$$R = \left(x_{\mathrm{w},1}^2 + x_{\mathrm{w},2}^2\right)^{1/2} \tag{3}$$

ist der Abstand des Wirbels von dem Ursprung bezeichnet. Γ gibt die Zirkulation des Wirbels an. Die Differentialgleichungen können numerisch für eine gegebene Anfangsposition gelöst werden. Die Bahnen der anderen Wirbel ergeben sich durch Spiegelung.

1.2 Schall durch bewegte Punktwirbel in einer Ebene

Bei kleinen Machzahlen kann der durch Wirbelbewegung verursachte Schall näherungsweise mit der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2\, \Delta\, \rho' = \rho_0\, \mathrm{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \rho_0\, \mathrm{div}\vec{L} \tag{4}$$

beschrieben werden. Dabei ist mit $\vec{L} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ der sogenannte Lamb-Vektor als Abkürzung eingeführt worden. In der vorliegenden Problemstellung bewegen sich Punktwirbel in einer zweidimensionalen Ebene. Gleichung (4) beschreibt die Schallerzeugung in dreidimensionalen Raum mit dem Wirbelstärkevektor $\vec{\omega}$. Um die Gleichung anzuwenden, wird der ebene Fall in eine dreidimensional Darstellung übertragen. Die Punktwirbel entsprechen dann unendlich langen geraden Wirbelfäden, die parallel zur x_3-Achse ausgerichtet sind. Zunächst soll nur die Wirbelstärke eines Wirbels berücksichtigt werden. Die singuläre Wirbelstärkeverteilung des zweidimensionalen Punktwirbels kann mit

$$\vec{\omega}(\vec{x},t) = \Gamma\,\delta\big(x_1 - x_{\mathrm{w},1}(t)\big)\,\delta\big(x_2 - x_{\mathrm{w},2}(t)\big)\,\vec{e}_3 \tag{5}$$

ausgedrückt werden. Mit $\vec{e}_3$ ist der Einheitsvektor in x_3-Richtung bezeichnet. Die Koordinaten $\big(x_{\mathrm{w},1}(t), x_{\mathrm{w},2}(t)\big)$ geben die zweidimensionale Position des Wirbels als Funktion der Zeit an. Der Lamb-Vektor kann dann in der Form

$$\vec{L} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ 0 \end{pmatrix} \delta\big(x_1 - x_{\mathrm{w},1}(t)\big)\,\delta\big(x_2 - x_{\mathrm{w},2}(t)\big) \tag{6}$$

dargestellt werden. Die beiden Komponenten $A_j(t)$ mit $j = 1,2$ sind durch die Zirkulation Γ und Geschwindigkeit des Wirbels $(v_{\mathrm{w},1}, v_{\mathrm{w},2}) = \big(\partial x_{\mathrm{w},1}/\partial t, \partial x_{\mathrm{w},2}/\partial t\big)$ in der x_1, x_2-Ebene festgelegt. Es ist

$$A_1 = -v_{\mathrm{w},2}\,\Gamma \qquad \text{und} \qquad A_2 = v_{\mathrm{w},1}\,\Gamma\,. \tag{7}$$

1.3 Lösung für einen Wirbel

Um eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung für die gegebene Quellverteilung zu finden, werden die Komponenten des Lamb-Vektors umgeschrieben, so daß ein Integral über die x_3-Koordinate auftritt. Es gilt

$$L_j(x_1,x_2,t) = A_j(t)\;\delta\big(x_1 - x_{\mathrm{w},1}(t)\big)\,\delta\big(x_2 - x_{\mathrm{w},2}(t)\big)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x_3)\,\mathrm{d}x_3 \qquad \text{für} \quad j = 1,2\,. \tag{8}$$

Das Integral auf der echten Seite ist gleich Eins. Zieht man die anderen Faktoren auf der rechten Seite mit in das Integral, können die Komponenten des Lamb-Vektors als

$$L_j(x_1,x_2,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_j(t)\,\delta\big(\vec{x} - \vec{x}_{\mathrm{w}}(t)\big)\,\mathrm{d}x_3 \qquad \text{für} \quad j = 1,2 \tag{9}$$

geschrieben werden. Dabei sind die Vektoren

$$\vec{x}_{\mathrm{w}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{w},1} \\ x_{\mathrm{w},2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

eingeführt worden. Der Vektor $\vec{x}_{\mathrm{w}}$ gibt die Position des Punktes an, in dem der Wirbelfaden durch die x_1, x_2-Ebene geht. Wird der Vektor – wie im obigen Integral – als Funktion der Zeit betrachtet, so gibt er die Bahn an, die der entsprechende Punkt durchläuft.
Nach dieser Vorbereitung wird eine Hilfsgröße ψ_j eingeführt, die die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\psi_j = A_j(t)\,\delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mathrm{w}}(t)) \tag{11}$$

erfüllen soll. Integriert man diese Gleichung über x_3 ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_j\;\mathrm{d}x_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_j(t)\,\delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mathrm{w}}(t))\;\mathrm{d}x_3 \equiv L_j\,. \tag{12}$$

Dabei wurde auf der linken Seite die Ableitungen des Wellenausdrucks mit der Integration vertauscht. Die rechte Seite entspricht wegen (9) gerade L_j. Differenziert man beide Seiten nach x_j und summiert über $j = 1,2$ folgt

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_j \, \mathrm{d}x_3 \right\} = \sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j} L_j \equiv \mathrm{div}\vec{L}\,. \tag{13}$$

Die rechte Seite entspricht dem dreidimensionalen $\mathrm{div}\vec{L}$, da überall $L_3 = 0$ gilt. Durch erweitern auf der linken Seite mit c_0^2 und Multiplikation mit ρ_0 erhält man schließlich:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2\,\Delta\right) \frac{\rho_0}{c_0^2} \sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_j \, \mathrm{d}x_3 \right\} = \rho_0 \, \mathrm{div}\vec{L}\,. \tag{14}$$

Vergleicht man diese Beziehung mit (4) ergibt sich für das Dichtefeld

$$\rho'(x_1, x_2, t) = \frac{\rho_0}{c_0^2} \sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_j \, \mathrm{d}x_3 \right\}\,. \tag{15}$$

Die Dichteverteilung hängt in dem zweidimensionalen Fall nicht von x_3 ab.
Schließlich soll noch die konkrete Form der Hilfgröße ψ_j eingesetzt werden. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung (11) lautet

$$\psi_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{A_j(\tau^*)}{r(\tau^*)\,|1 - M_r(\tau^*)|} \equiv \frac{1}{4\pi} \left[\frac{A_j}{r\,|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*}\,. \tag{16}$$

Dies gilt für den Fall, daß keine Berandungen vorhanden sind. Die Schreibweise $[\ldots]_{\tau=\tau^*}$ mit der eckigen Klammer wird als Abkürzung für die auf der rechten Seite vorkommende Summe eingeführt. Alle Größen in der eckigen Klammer werden zur retardierten Zeit τ^* genommen. Sie erfüllt die Gleichung

$$c \cdot (t - \tau^*) = |\vec{x} - \vec{x}_\mathrm{w}(\tau^*)|\,. \tag{17}$$

Falls mehr als eine Lösung τ^* existiert, ist mit der eckigen Klammer in (16) die Summe gemeint. Wenn es keine Lösung τ^* gibt, so ist der Ausdruck gleich Null definiert. Der Abstand r zwischen Beobachter und Quelle ist für eine feste Beobachtungsposition $\vec{x}$ eine Funktion der Quellzeit τ. Es gilt

$$r(\tau) = |\vec{x} - \vec{x}_\mathrm{w}(\tau)| = \left\{ \big(x_1 - x_{\mathrm{w},1}(\tau)\big)^2 + \big(x_2 - x_{\mathrm{w},2}(\tau)\big)^2 + x_3^2 \right\}^{1/2}\,. \tag{18}$$

Für die Beobachtungsmachzahl kann analog

$$M_r(\tau) = \frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{x}_\mathrm{w}(\tau)}{|\vec{x} - \vec{x}_\mathrm{w}(\tau)|} \cdot \vec{v}_\mathrm{w}(\tau) \tag{19}$$

angegeben werden. Die Dichteschwankungen, die durch den einzelnen Wirbel verursacht werden, lassen sich schließlich als

$$\rho'(x_1, x_2, t) = \frac{\rho_0}{4\pi c_o^2} \sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_j}{r\,|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} \mathrm{d}x_3 \right\} \tag{20}$$

ausdrücken. Der Ausdruck in dem Integral entspricht formal der Schallfeld einer bewegte Punktquelle, deren Bahn in der x_1, x_2-Ebene verläuft. Das zweidimensionale Schallfeld des Wirbels ergibt sich durch Integration über unendlich viele Beobachter in x_3-Richtung.

Das Integral in Gleichung (20) läßt aber auch als Integral über unendliche viele Quellen deuten. Der Integrand bleibt gleich, wenn Quelle und Beobachter parallel in x_3-Richtung verschoben werden. Das bedeutet, statt der Beobachtungs- und Quellpositionen nach (10) kann man auch

$$\vec{x}_{\mathrm{w}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{w},1} \\ x_{\mathrm{w},2} \\ -x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

wählen. An dem Wert des Integranden ändert sich dadurch nichts. Das Integral kann dann als eines über eine unendlich ausgedehnte Quelle – den Wirbelfaden – angesehen werden. Bei dieser Interpretation gibt es nur eine Beobachtungsposition, die in der x_1, x_2-Ebene liegt.

1.4 Das gesamte Schallfeld

Um das gesamte Schallfeld zu erhalten müssen die Anteile der vier Wirbel aufsummiert werden. Dazu wird ein Index m eingeführt, der die Wirbel kennzeichnet. Er wird so definiert, daß $m = 1, 2, 3, 4$ den Wirbeln aus der Abbildung 1 in der Reihenfolge A, B, A', B' entspricht. Die Dichteschwankungen können dann in der Form

$$\rho'(x_1, x_2, t) = \frac{\rho_0}{4\pi c_o^2} \sum_{m=1}^{4} \left(\sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_j^{(m)}}{r^{(m)} \left|1 - M_r^{(m)}\right|} \right]_{\tau=\tau^*(m)} \mathrm{d}x_3 \right\} \right) \tag{22}$$

ausgedrückt werden. Die Größen in der eckigen Klammer hängen alle von dem jeweiligen Wirbel ab und sind entsprechend mit (m) gekennzeichnet. Die Wirbel haben alle unterschiedliche Bahnen. Damit ist auch die retardierte Zeit τ^* für jeden Wirbel verschieden. Die Größen A_j im Zähler ergeben sich aus der Spiegelung. Es gilt

$$v_{\mathrm{w},1}^{(1)} = v_{\mathrm{w},1}^{(2)} = -v_{\mathrm{w},1}^{(3)} = -v_{\mathrm{w},1}^{(4)}$$

und

$$v_{\mathrm{w},2}^{(1)} = -v_{\mathrm{w},2}^{(2)} = v_{\mathrm{w},2}^{(3)} = -v_{\mathrm{w},2}^{(4)} \,.$$

Bei der praktischen Berechnung können die räumlichen Ableitungen numerisch bestimmt werden. Dazu kann die Summe über m mit der über j vertauscht werden.