Strömungsakustik II SS 03, Übungen Blatt 2

Schall durch Wirbelpaar

Zur Zeit $t = 0$ werden zwei Punktwirbel mit einer zweidimensionalen Wirbelkanone erzeugt. Die Ausgangspositionen der Wirbel sind bei $(x_1, x_2) = (-20.0, 0.1)$ und $(-20.0, -0.1)$. Die Wirbel sind gleichstark und drehen gegensinnig, so daß sich das Paar in positive x_1-Richtung bewegt. Die Zirkulation beträgt $\Gamma = \pm 2\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. An der Position $x_1 = 0$ befindet sich eine feste Wand.
Die Bahn der Wirbel wurde bis zur Zeit $t = 8$ für die gegebene Geometrie numerisch berechnet. Es liegt sowohl die Position $(x_{\mathrm{w},1}, x_{\mathrm{w},2})$ als auch die Geschwindigkeit $(v_{\mathrm{w},1}, v_{\mathrm{w},2})$ des ersten Wirbels zu äquidistanten Zeiten t_n vor. Die Daten sind in einer Datei gespeichert. Die Bahn des zweiten Wirbels ergibt sich durch Spiegelung an der $x_2 = 0$ Linie. Es wird angenommen, daß sich die Wirbel zwischen den gegebenen Position geradlinig und gleichförmig bewegen.
Ziel ist es, daß zweidimensionale Schallfeld zu berechnen, welches durch die instationäre Wirbelbewegung verursacht wird. Ausgangspunkt ist die als (4) im beiliegenden Text angegebene Gleichung, die in Kapitel 7 der Vorlesung aus der Lighthill-Gleichung abgeleitet wurde. Setzt man die konkrete Quellstärkeverteilung ein, ergibt sich die Lösung für die Dichteschwankungen in der Form (22). Da hier die Bahnen der Wirbel nur diskret vorliegen, kann die Gleichung (22) nur numerisch ausgewertet werden. Hier soll zunächst grundsätzlich untersucht werden, wie sich die Genauigkeit der Eingangsdaten auf die Genauigkeit des berechneten Schallfeldes auswirkt.
Um einen Vergleich zu ermöglichen, wurden die Bahnen der Wirbel mit unterschiedlichen Zeitschrittweiten berechnet. In allen Fällen wurde ein einfaches Prädiktor-Korrektor-Schema verwendet. Die Ergebnisse werden in getrennten Dateien zur Verfügung gestellt. Die einzelnen Zeilen enthalten jeweils nebeneinander die Größen

$$(t;\ x_{\mathrm{w},1};\ x_{\mathrm{w},2};\ v_{\mathrm{w},1};\ v_{\mathrm{w},2})$$

für den Wirbel A, der den Index $m = 1$ besitzt. Die Werte für die anderen Wirbel ergeben sich durch Spiegelung.
Es ist ein Programm zu erstellen, welches die Daten in dem gegebenen Format einlesen kann.
Gleichung (22) kann in der Form

$$\rho'(x_1, x_2, t) = \frac{\rho_0}{4\pi c_0^2} \sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \sum_{m=1,4} I_j^{(m)}(x_1, x_2, t) \right\}$$

mit

$$I_j^{(m)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_j^{(m)}\,\mathrm{d}x_3$$

dargestellt werden. Das Feld $\psi_j^{(m)}(\vec{x}, t)$ ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi_j^{(m)} = A_j^{(m)}(t) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mathrm{w}}^{(m)}(t))\,,$$

die mit

$$\psi_j^{(m)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{A_j^{(m)}}{r^{(m)}\,|1 - M_r^{(m)}|} \right]_{\tau=\tau^*(m)}$$

gegeben ist. Die Lösung soll in mehreren Schritten berechnet werden.
Als Medium wird Luft mit $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ und $c_0 = 340\,\mathrm{m/s}$ angenommen.

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Zunächst wird nur der Wirbel A mit $m = 1$ betrachtet. Es wird ein Beobachter an Ort $(x_1, x_2, x_3) = (-100, 100, 0)$ angenommen. Berechne das Feld $\psi_1^{(1)}$ an der gegebenen Beobachtungsposition zu den Beobachtungszeiten $t = 4.0, 4.5, 5.0$. Gebe auch die entsprechenden retardierten Zeiten τ^* die Abstände r und die Beobachtungsmachzahlen M_r an.
Hinweis: Interpoliere zwischen den diskreten Daten, um die Zeit τ^* zu ermitteln. Verwende den Datensatz mit der hohen Genauigkeit.

Aufgabe 2: (2 Punkte)
In der ersten Aufgabe wurde die Bewegung $\vec{x}_\mathrm{w}^{(1)}(\tau)$ der Quelle, die Beobachtungsposition $\vec{x}$ und die Beobachtungszeit t vorgegeben. Dann wurden dazu passend die retardierten Zeiten τ^* ermittelt. Da sich die Quelle immer mit Unterschall bewegt gibt es genau ein τ^*. Jetzt soll umgekehrt für ein vorgegebenes τ^* eine passende Beobachtungsposition $\vec{x}$ gefunden werden. Es wird wieder nur der Wirbel A mit $m = 1$ betrachtet. Festgelegt ist die Bahn $\vec{x}_\mathrm{w}^{(1)}(\tau)$ der Quelle, die Beobachtungszeit t und die Koordinaten $x_1 = -100$ und $x_2 = 100$ der Beobachtungsposition. Bestimmt werden soll die Koordinate x_3 des Beobachters. Als retardierte Zeiten werden einfach die diskreten Zeitpunkte τ_i angenommen, an denen die Position der Quelle gegeben ist. Das heißt, es soll nacheinander $\tau^* = \tau_i$ gesetzt werden, und dann ein passendes $(x_3)_i$ zu bestimmen. Diese Prozedur ist für die Beobachtungszeiten $t = 4.0, 4.5, 5.0$ durchzuführen. Zu beachten ist, daß x_3 nicht eindeutig ist. In jedem Fall sind nur reelle x_3 zugelassen. Stelle das Ergebnis als Kurve von τ^* über x_3 dar. Es sind also insgesamt drei Kurven – eine für jede Beobachtungszeit – zu zeichnen. Die Werte $(x_3)_i$ liegen alle in einem Intervall $[-(x_3)_\mathrm{max}, (x_3)_\mathrm{max}]$. Wie groß ist $(x_3)_\mathrm{max}$ für die drei Beobachtungszeiten ?
Hinweis: Es gibt nicht immer eine Lösung für x_3.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Das Ergebnis der Aufgabe 2 läßt sich so verstehen, daß für eine nichtäquidistante Verteilung von Beobachtungspositionen $\vec{x}_i = \big(-100, 100, (x_3)_i\big)$ die passende retardierte Zeit $(\tau^*)_i$ bekannt ist. Da die Zeiten $(\tau^*)_i$ genau den gegebenen Datenpunkten entsprechen, liegen die entsprechenden Werte der Wirbelbewegung direkt vor und brauchen nicht erst interpoliert werden. Man berechne aus den Daten die Größen $\psi_1^{(1)}(\vec{x}_i, t)$ und $\psi_2^{(1)}(\vec{x}_i, t)$ und trage sie als Funktion der Koordinate x_3 auf. Dies ist wieder für die drei Beobachtungszeiten $t = 4.0, 4.5, 5.0$ durchzuführen. Insgesamt sind also sechs Kurven zu zeichnen. Schließlich kann durch numerische Integration über dem jeweiligen Intervall $[-(x_3)_\mathrm{max}, (x_3)_\mathrm{max}]$ die Fläche unter den Kurven bestimmt werden. Sie entspricht den Integralen $I_1^{(1)}(x_1, x_2, t)$ beziehungsweise $I_2^{(1)}(x_1, x_2, t)$. Gebe die sechs Werte an.
Hinweis: Zur Integration kann eine einfache Trapezregel verwendet werden.

Aufgabe 4: (2 Punkte)
In Aufgabe 2 und 3 wurden schrittweise die Integrale $I_1^{(1)}(x_1, x_2, t)$ und $I_2^{(1)}(x_1, x_2, t)$ für festgelegte Koordinaten x_1 und x_2 und festgelegte Beobachtungszeiten t berechnet. Die Prozedur ist so zu automatisieren, das allgemein die Integrale $I_j^{(m)}(x_1, x_2, t)$ für beliebig vorgegebene Argumente und alle Wirbel $m = 1, 2, 3, 4$ berechnet werden können. Es ist $I_1^{(m)}(x_1, x_2, t)$ bei $t = 4.5$, $x_2 = 100$ in dem Intervall $-400 \le x_1 \le 0$ in 200 Schritten zu berechnen. Man trage die vier Kurven $I_1^{(m)}$ über der Koordinate x_1 auf. In einer zweiten Darstellung ist $\sum_{m=1}^{4} I_1^{(m)}$ über x_1 zu zeichnen. Was ist über die Genauigkeit der Summe hinsichtlich einer numerischen Ableitung in x_1-Richtung zu sagen ?
Hinweis: Die Rechnungen können mit verschiedenen Datensätzen durchgeführt werden. Zum Testen ist der mit der kleinsten Anzahl von Zeitschritten ausreichend.