

7. Schallerzeugung durch Strömungen

7.1. Lighthills akustische Analogie

In der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts wurden die ersten Düsentriebwerke entwickelt und eingesetzt. Mit Hilfe dieser neuen Technologie konnte die Leistungsfähigkeit der Flugzeuge deutlich verbessert werden, jedoch ergab sich durch die neuen Antriebe ein viel größeres Lärmproblem als mit den vorhandenen Propellerflugzeugen. Die Schallentstehung in turbulenten Strömungsfeldern, wie sie im Strahl eines Düsentriebwerks vorliegt, war bis dahin wenig erforscht. Dies lag zum Teil auch daran, daß es sich beim turbulenten Freistrahler um ein relativ kompliziertes Strömungsfeld handelt.

Der mit Abstand wichtigste Beitrag zum Verständnis der Schallentstehung in turbulenten Strömungen stammt von Lighthill (1951). Die Idee von Lighthill war es, eine Wellengleichung ohne Näherung aus den nichtlinearen Gleichungen abzuleiten. Die Strömung wird in jedem Fall durch die Kontinuitätsgleichung zusammen mit der Impulsgleichung beschrieben. Die linearen und die nichtlinearen Terme werden aufgespalten, und die nichtlinearen Terme werden zusammen mit den Reibungstermen auf die rechte Seite gebracht. Auf der linken Seite ergibt sich ein "normaler" Wellenausdruck. Die Terme auf der rechten Seite können als Quellen interpretiert werden.

Herleitung

Die Herleitung der Lighthill-Gleichung wird im folgenden vorgestellt, und die einzelnen Schritte werden denen zur Herleitung der linearen Wellengleichung gegenübergestellt. Es wird von der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (7.1.1)$$

ausgegangen. Diese kann in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (7.1.2)$$

mit Summationskonvention geschrieben werden. Gleichung (7.1.2) wurde zusammen mit der Euler-Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \operatorname{grad} p = 0 \quad (7.1.3)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

benutzt, um die Wellengleichung in Abschnitt 2.1 abzuleiten. Die Euler-Gleichung kann in Indexschreibweise als

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (7.1.4)$$

dargestellt werden. Diese Gleichung enthält keine Reibungseffekte, und auch die äußere Kräfte sind in der gegebenen Form nicht vorhanden.

Um die Wellengleichung zu erhalten, wurden die Gleichungen (7.1.2) und (7.1.4) zunächst linearisiert. Dieser Schritt zur Vereinfachung wird jetzt ausgelassen. Statt dessen wird sogar die Euler-Gleichung durch die Impulsgleichung mit Reibung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \operatorname{div} P = 0 \quad (7.1.5)$$

ersetzt. Daß heißt, es werden Reibungseffekte, die in (7.1.3) beziehungsweise (7.1.4) nicht enthalten sind, mit berücksichtigt. Auch die Impulsgleichung läßt sich komponentenweise mit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0 \quad (7.1.6)$$

schreiben. Die Reibungseffekte sind in dem Tensor

$$P_{ij} = (p - p_0)\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (7.1.7)$$

enthalten. Dort treten die Schubspannungen τ_{ij} auf. Mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (7.1.8)$$

ist die sogenannte Kronecker-Delta-Funktion bezeichnet.

Die Darstellung mit dem gegebenen Tensor P_{ij} ist aus Sicht der klassischen Strömungsmechanik etwas ungewöhnlich. Abweichend von der üblichen Form ist hier die Größe p_0 enthalten. Sie ist eine Konstante, die zunächst frei gewählt werden kann. Da in der Impulsgleichung nur die Ableitung von P_{ij} vorkommt, ist es möglich wie in (7.1.7) eine Konstante zu addieren. Die Gleichung gilt dann immer noch. Definiert man

$$p' = p - p_0 \quad (7.1.9)$$

so ergibt sich

$$P_{ij} = p' \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (7.1.10)$$

Dabei ist zu bemerken, daß die Einführung der Größe p' hier eine reine Definition darstellt und nicht mit einer Linearisierung oder sonstigen Näherung verbunden ist. Komponentenweise kann der Tensor P_{ij} als Matrix mit

$$P_{ij} = - \begin{pmatrix} \tau_{11} - p' & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - p' & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - p' \end{pmatrix} \quad (7.1.11)$$

geschrieben werden.

Für die folgenden Umformungen spielt die konkrete Form des Spannungstensors τ_{ij} keine Rolle. So sind zum Beispiel die Schubspannungen in einem Newtonschen Fluid durch den Ansatz

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (7.1.12)$$

gegeben, wobei η die Viskosität bezeichnet. Mit einem solchen Ansatz geht die Impulsgleichung (7.1.6) in die Navier-Stokes-Gleichung über. Die Beziehung (7.1.12) wird hier jedoch überhaupt nicht benötigt. Die folgenden Überlegungen gelten daher allgemein für beliebige Fluide.

Bei der Herleitung der linearen Wellengleichung wurde zuerst die linearisierte Kontinuitätsgleichung nach der Zeit differenziert. Die Ableitung wird nun auf die nichtlinearen Variante angewendet. Aus (7.1.2) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = 0 \quad (7.1.13)$$

In nächsten Schritt wurde die Divergenz von der linearisierten Euler-Gleichung gebildet. Das Entsprechende wird hier mit der nichtlinearen Impulsgleichung durchgeführt. Aus (7.1.6) erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0 \quad (7.1.14)$$

Dabei wurden im ersten Term die Ableitungen vertauscht. Der zweite Term in (7.1.13) ist mit den ersten Term in (7.1.14) identisch. Daran hat sich durch das Übergehen der Linearisierung nichts geändert. Zieht man (7.1.14) von (7.1.13) ab, folgt die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0 \quad (7.1.15)$$

Im zweiten Term dieser Gleichung sind die Nichtlinearitäten und Reibungseffekte enthalten.

Entsprechend zu p_0 wird mit ρ_0 eine weitere Konstante eingeführt, die zunächst frei wählbar ist. Analog wird auch

$$\rho' = \rho - \rho_0 \quad (7.1.16)$$

definiert. Es gilt für die Ableitung

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \quad (7.1.17)$$

Damit kann (7.1.15) in

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij}) \quad (7.1.18)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

umgeformt werden. Um schließlich auf der linken Seite einen Wellenausdruck zu erhalten, wird von beiden Seiten der Ausdruck

$$c_0^2 \Delta \rho' = c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_k^2} = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\delta_{ij} \rho') \quad (7.1.19)$$

abgezogen. Dabei ist c_0 eine weitere Konstante, die zunächst frei wählbar ist. Man erhält

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij} - c_0^2 \delta_{ij} \rho') \quad (7.1.20)$$

Es ergibt sich tatsächlich auf der linken Seite ein Ausdruck, wie er in der Wellengleichung zu finden ist. Ungewöhnlich scheint, daß in dem Wellenausdruck die Abweichung der Dichte ρ' und nicht die Druckschwankung auftritt. Gegenüber der üblichen Form ist der Ausdruck auch noch mit c_0^2 multipliziert. Dies ändert jedoch nichts an den Eigenschaften der Gleichung. Beziehung (7.1.20) stellt eine inhomogene Wellengleichung für ρ' dar. Die linke Seite beschreibt die lineare Ausbreitung der Schwankungen mit der Geschwindigkeit c_0 . Durch die rechte Seite ist eine Quellverteilung gegeben.

Zweckmäßigerweise wird der Ausdruck in den runden Klammern auf der rechten Seite mit

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + P_{ij} - c_0^2 \delta_{ij} \rho' \quad (7.1.21)$$

abgekürzt. Setzt man P_{ij} nach (7.1.10) ein, ergibt sich

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - \tau_{ij} + \delta_{ij} (p' - c_0^2 \rho') \quad (7.1.22)$$

Damit wird die inhomogene Wellengleichung zu

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}} \quad (7.1.23)$$

Dies ist die typische Form der Lighthill-Gleichung, wie man sie häufig in der Literatur findet. Der Tensor T_{ij} wird als Lighthillscher Spannungstensor bezeichnet. Durch die zweite räumliche Ableitung der T_{ij} ergibt sich eine Quadrupolverteilung.

Bemerkenswert ist, daß die Lighthill-Gleichung (7.1.23) ohne Näherung aus den nichtlinearen Gleichungen folgt. Sie gilt damit überall, wenn man die Gültigkeit der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung voraussetzt.

Im freien Raum ohne Berandungen kann die Lösung von (7.1.23) angegeben werden. Sie lautet

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (7.1.24)$$

Diese Lösung ist jedoch zunächst nicht von großen praktischen Nutzen. Die zu berechnende Größe ρ' tritt auch auf der rechten Seite auf. Um sie mit (7.1.24) zu bestimmen, muß sie schon überall bekannt sein. Dies macht wenig Sinn. Zudem sind die drei Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 noch frei wählbar.

Eigenschaften und Anwendungen

Die Lighthill-Gleichung (7.1.23) ergibt sich ohne Näherungen und Linearisierungen durch Umformungen der strömungsmechanischen Grundgleichungen. Die lineare Wellengleichung basiert auf den gleichen Grundgleichungen. Bei ihrer Herleitung wird die Reibung vernachlässigt, und die Grundgleichungen werden in einem der ersten Schritte linearisiert. Sie gilt, wenn nur kleine Schwankungen vorliegen und das Medium im Mittel ruht. Bei diesen Bedingungen sollte die Lighthill-Gleichung daher bis auf eine geringe Abweichung mit der Wellengleichung übereinstimmen. Es sollte sogar möglich sein, die Wellengleichung für den Schalldruck aus der Lighthill-Gleichung zu gewinnen. Dazu müssen nur die entsprechenden Vernachlässigungen und Näherungen sozusagen "nachträglich" vorgenommen werden.

Auf den ersten Blick scheint es relativ leicht zu sein, aus Gleichung (7.1.23) eine "normale" Wellengleichung abzuleiten. Auf der linken Seite ist bereits ein linearer Wellenausdruck vorhanden. Allerdings ist die physikalische Deutung dieses Ausdrucks nicht so einfach, wie man vielleicht vermutet. Es ist zu beachten, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_0 eine frei wählbare Konstante ist. Auch in der Schwankungsgröße $\rho' = \rho - \rho_0$ steckt eine gewisse Unsicherheit über deren Bedeutung, da ρ_0 frei wählbar ist. Damit die linke Seite der Lighthill-Gleichung (7.1.23) wirklich dem "normalen" Wellenausdruck entspricht, müssen die freien Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 geeignet gewählt werden. Zusätzlich muß auch das Bezugssystem, in dem man die Gleichung anwendet, passend festgelegt werden. Die Wellengleichung, wie sie in Abschnitt 2.1 abgeleitet wurde, gilt nur, wenn das Medium im Mittel ruht. Die Lighthill-Gleichung gilt unabhängig von der Wahl der Konstanten und des Bezugssystems. Damit die linke Seite der Gleichung die Ausbreitung von Wellen in der gewohnten Weise beschreibt, muß die mittlere Geschwindigkeit gleich Null sein. Dieser Fall soll zunächst untersucht werden.

Im folgenden wird davon ausgegangen, das in gesamten Raum nur kleine Schwankungen um einen Ausgangszustand auftreten. Das Bezugssystem wird so gewählt, daß im Ausgangszustand überall $v_i = 0$ gilt. Alle Schwankungen der Geschwindigkeit werden durch Schall hervorgerufen. Man kann die Geschwindigkeit als Schnelle auffassen:

$$v_i = v'_i \quad (7.1.25)$$

Als Konstante ρ_0 wird die Dichte im Ausgangszustand gewählt. Entsprechend ist p_0 der Druck und c_0 die Schallgeschwindigkeit im Ausgangszustand. Damit ist ρ' eine kleine Schwankung im akustischen Sinn, und die linke Seite von (7.1.23) ergibt einen Wellenausdruck, der die Ausbreitung der Schwankungen mit Schallgeschwindigkeit beschreibt.

Bis auf einen Fehler von zweiter Ordnung gilt die lineare Wellengleichung für den Schalldruck p' . Entsprechend gilt auch eine Wellengleichung für die Dichteschwankungen ρ' . Sie kann als

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = 0 \quad (7.1.26)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung gilt näherungsweise, wenn lediglich kleine Schwankungen auftreten. Daraus folgt, daß die rechte Seite von (7.1.23) in dem be-

7. Schallerzeugung durch Strömungen

trachteten Fall zu vernachlässigen sei muß. Der Ausdruck

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \quad (7.1.27)$$

muß im akustischen Sinn klein sein gegenüber den Termen auf der linken Seite, wie zum Beispiel

$$c_0^2 \Delta \rho' \quad (7.1.28)$$

Um dies zu überprüfen, wird der Lighthillsche Spannungstensor T_{ij} genauer betrachtet. Der Term

$$\rho v_i v_j = \mathcal{O}(2) \quad (7.1.29)$$

ist von zweiter Ordnung in den Schwankungsgrößen. In akustischen Wellen sind die Spannungen durch Reibung gegenüber den Druckspannungen sehr gering. Damit ist auch τ_{ij} gegenüber p' oder $c_0^2 \rho'$ zu vernachlässigen. Bis auf einen Fehler höherer Ordnung gilt für die Schwankungen

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (7.1.30)$$

Somit ist die Differenz $p' - c_0^2 \rho'$ auch von höherer Ordnung. Zusammen ergibt sich daher tatsächlich, daß die Lighthillschen Spannungen T_{ij} in einem Gebiet, in dem nur kleine Schwankungen im akustischen Sinn auftreten, gegenüber den Termen von erster Ordnung vernachlässigt werden können. Formal kann man schreiben

$$|T_{ij}|_{\max} \ll |c_0^2 \rho'|_{\max} \quad (7.1.31)$$

Das Maximum wird dabei über den betrachteten Bereich und über die Zeit genommen.

In der Lighthill-Gleichung treten die Ableitungen von T_{ij} und $c_0^2 \rho'$ auf. Es stellt sich die Frage, ob aus (7.1.31) auch

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \right|_{\max} \ll |c_0^2 \rho'|_{\max} \quad (7.1.32)$$

folgt. Man könnte sich vorstellen, daß die Größe T_{ij} räumlich mit einer relativ kurzen Wellenlänge oszilliert. Obwohl die Amplitude von T_{ij} viel kleiner als die von $c_0^2 \rho'$ ist, könnte rein theoretisch für die zweiten Ableitungen das Gegenteil gelten. In einer Schallwelle sind jedoch die Schwankungen aller Größen miteinander verknüpft. Daher können die Lighthillschen Spannungen auch nur mit der gleichen Wellenlänge oszillieren wie die anderen Größen. Unter diesen Bedingungen folgt dann wirklich aus (7.1.31) immer auch (7.1.32).

Die rechte Seite der Lighthill-Gleichung ist also vernachlässigbar klein, wenn nur kleine Schwankungen vorliegen. Es sei nochmal darauf hingewiesen, daß dies nur bei passender Wahl der Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 und des Bezugssystems gilt. Stimmen zum Beispiel die Konstanten nicht alle mit den entsprechenden Werten im Ausgangszustand überein, dann kann keine Abschätzung für die rechte Seite angegeben werden. Im allgemeinen wird ihr Wert – relativ zu den kleinen Schwankungen – dann groß werden.

7.1. Lighthills akustische Analogie

Liegen nicht nur kleine Schwankungen vor, dann ist es unter Umständen nicht mehr möglich, durch Anpassung der Konstanten die rechte Seite der Lighthill-Gleichung auf relativ kleine Werte zu beschränken. Betrachtet man zum Beispiel einen einzelnen Wirbel im freien Raum, so kann je nach Zirkulation im Kernbereich die Größe $\rho v_i v_j$ groß werden. Daran kann auch die Wahl eines geeigneten Bezugssystems nichts ändern. Man kann es nur so wählen, daß die Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ außerhalb des Kernbereichs abfällt und mit steigendem Abstand vom Wirbelzentrum gegen Null geht. Im Außenbereich ist dann die rechte Seite der Lighthill-Gleichung klein im akustischen Sinn. Daraus ergibt sich die typische Interpretation der Lighthill-Gleichung. Sie wird als Wellengleichung für kleine Störungen verstanden, die überall gilt. In bestimmten Bereichen – wie zum Beispiel den Kernbereich des Wirbels – ergeben sich auf der rechten Seite Quellterme, die nicht vernachlässigt werden können. Außerhalb dieser Bereiche wird die Quellstärke näherungsweise als Null angenommen.

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, daß die Größe $\rho v_i v_j$ besonders groß in Bereichen mit turbulenter Strömung ist. So spielt die zeitliche Mittelwert $\langle v_i v_j \rangle$, die als Reynoldssche Spannungen bezeichnet werden, bei der theoretischen Beschreibung der Turbulenz eine große Rolle. Es wurden daher viele Messungen gerade dieser Größe durchgeführt. Typischerweise sind in turbulenten Strömungen die Reynoldsschen Spannungen deutlich größer als die laminaren Spannungen, und es gilt

$$|\rho v_i v_j|_{\max} \gg |\tau_{ij}|_{\max} \quad (7.1.33)$$

So wird es besonders dort zu stärkeren Quellen kommen.

Es können auch noch andere Effekte zu Quellen führen. Wenn die Schwankungen des Drucks und der Dichte größer werden, dann wächst auch der Fehler in der linearisierten Beziehung (7.1.30) immer weiter an. Ab einer bestimmten Stärke der Schwankungen werden die nichtlinearen Abweichungen deutlich, und die Differenz $p' - c_0^2 \rho'$ ist nicht mehr vernachlässigbar. Das gleiche gilt auch, wenn räumliche Entropieschwankungen vorliegen. Als Beispiel kann ein einfacher sogenannter "Hot Spot" betrachtet werden. Der Druck ist überall konstant, jedoch ist in einem kleinen Bereich die Temperatur erhöht. Entsprechend findet man dort eine niedrigere Dichte. Wählt man die Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 so, daß im Außenbereich die Differenz $p' - c_0^2 \rho'$ verschwindet, ergibt sich im "Hot Spot" eine von dem Temperaturunterschied abhängiger Wert. So können sich durch nichtlineare Effekte relativ große Werte für die Lighthillschen Spannungen T_{ij} ergeben.

Die bisherigen Überlegungen führen direkt auf einen typischen Anwendungsfall der Lighthill-Gleichung. Im allgemeinen kann der Bereich, in dem die nichtlinearen Effekte und die Reibung eine Rolle spielen, räumlich eingegrenzt werden. Es wird dann angenommen, das außerhalb dieses Bereiches nur kleine Störungen auftreten und die Lighthillschen Schubspannungen T_{ij} werden dort gleich Null gesetzt. So folgt für die Lösung im Fall ohne feste Wände näherungsweise

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{V_Q} \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (7.1.34)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Dabei ist im Vergleich zur exakten Lösung nur der Integrationsbereich auf ein Volumen V_Q , welches alle Gebiete mit nichtlinearen Effekten umfaßt, eingeschränkt worden. So

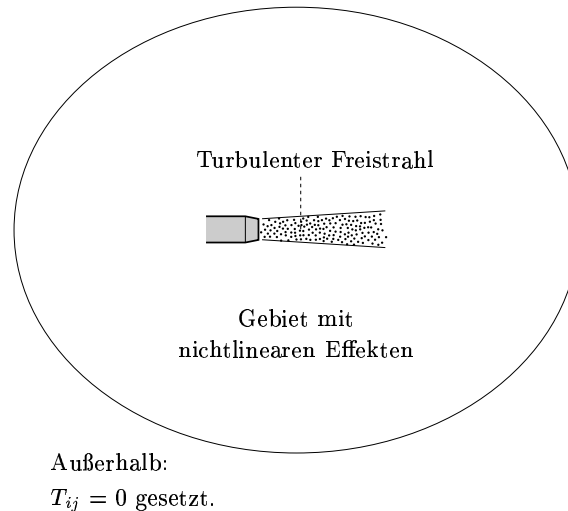


Abbildung 7.1.: Prinzipskizze zur Anwendung der Lighthill-Gleichung

läßt sich die Lighthill-Gleichung praktisch einsetzen. Ist in einem begrenzten Bereich durch numerische Simulation die Strömung bekannt, können die akustischen Schwankungen außerhalb des Rechengebietes mit der Lösung (7.1.34) ermittelt werden. Damit läßt sich der Schall im Fernfeld berechnen. Dies ist durch eine numerische Simulation der nach außen laufenden Wellen wegen der Größe des benötigten Rechengitters im allgemeinen nicht möglich. Lighthill selbst benutzte die Lösung seiner Gleichung für eine Abschätzung des durch einen turbulenten Freistrah erzeugten Schalls. Dabei geht er ebenfalls davon aus, daß das "aktive Gebiet", in dem die T_{ij} wirklich einen nennenswerten Beitrag liefern, um den Freistrah eingeschränkt werden kann.

Lighthill-Gleichung mit dem Schalldruck

In der Literatur findet man auch eine Variante der Lighthill-Gleichung, die auf der linken Seite die Druck- statt den Dichteschwankungen enthält. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man die Lighthill-Gleichung für die Druckschwankungen ableiten kann. Bei der gezeigten Herleitung ergab sich als Zwischenergebnis die Beziehung (7.1.18). Durch Subtraktion eines geeigneten Ausdrucks von beiden Seiten folgte daraus die klassische Lighthill-Gleichung. Nun wird abweichend von der ursprünglichen Herleitung der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (p' \delta_{ij}) \quad (7.1.35)$$

subtrahiert. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij} - p' \delta_{ij}) \quad (7.1.36)$$

Setzt man den Tensor

$$P_{ij} = p' \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (7.1.37)$$

ein, vereinfacht sich die rechte Seite, und es folgt

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}) \quad (7.1.38)$$

Im nächsten Schritt wird auf beiden Seiten

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c_0^2} p' - \rho' \right) \quad (7.1.39)$$

addiert. Es ergibt sich

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c_0^2} p' - \rho' \right) \quad (7.1.40)$$

Dabei wurden die zweiten Ableitungen entsprechend

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \Delta p' \quad (7.1.41)$$

mit dem Laplace-Operator dargestellt. Gleichung (7.1.40) erhält die einfache Form

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij}^* + \frac{\partial^2}{\partial t^2} W \quad (7.1.42)$$

wenn man die Abkürzungen

$$T_{ij}^* = \rho v_i v_j - \tau_{ij} \quad (7.1.43)$$

und

$$W = \frac{1}{c_0^2} p' - \rho' \quad (7.1.44)$$

eingeführt. Dabei ist T_{ij}^* ein verallgemeinerter Spannungstensor, der dem Lighthillschen Spannungstensor ähnlich ist, jedoch nicht mit ihm übereinstimmt. Um den Unterschied deutlich zu machen wurde das Symbol * verwendet. Die Größe W kann als ein Maß für die Abweichung von der linearen Beziehung (7.1.30) angesehen werden. Gleichung (7.1.42) stellt eine inhomogene Wellengleichung für die Druckschwankungen p' dar. Sie folgt wie die originale Lighthill-Gleichung ohne Näherungen aus der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung. Die linke Seite besitzt die übliche Form der Wellengleichung für den Schalldruck. Auf der rechten Seite stehen zwei Ausdrücke, ein Quadrupol- und ein Monopol-Quellterm. Dies ist sozusagen der Preis dafür, daß man auf der linken Seite die gewohnte Form wiederfindet.

7.2. Freistrahllärm

Lighthill benutzte die Lösung (7.1.34), um die Abhängigkeit des Freistrahllärms von den Parametern des Freistrahls zu bestimmen. Dazu führte er die im folgenden dargestellten Abschätzungen und Dimensionenüberlegungen durch. In Abbildung 7.2 ist die

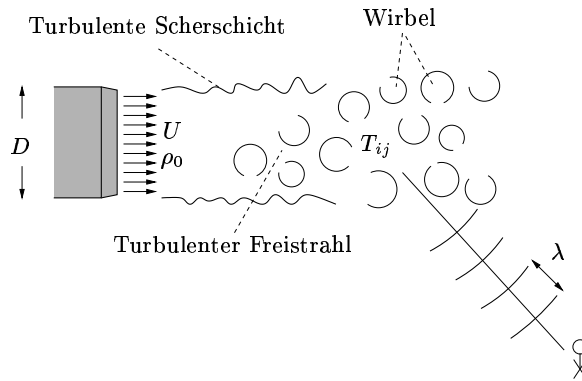


Abbildung 7.2.: Düse mit turbulenten Freistrahllärm

Situation illustriert. Der Freistrahllärm tritt aus einer Düse mit einem Durchmesser D aus. Das Geschwindigkeitsprofil am Austritt wird eben angenommen. Die Geschwindigkeit des Freistrahls wird mit U bezeichnet. Der Freistrahllärm wird als kalt vorausgesetzt. Daß bedeutet, die Dichte im Inneren entspricht der Dichte im Außenbereich, die mit ρ_0 bezeichnet wird.

Am Rand des Freistrahls bildet sich eine turbulente Scherschicht. In dem turbulenten Bereich entstehen Wirbel. Mit den Wirbeln sind ebenfalls Scherungen verbunden, so daß in diesem Bereich die Lighthillschen Spannungen T_{ij} besonders groß sind. Es wird davon ausgegangen, daß eine typische Zeitkonstante Δt in dem turbulenten Gebiet existiert. Diese kann man zum Beispiel als die Zeit ansehen, die im Mittel zwischen dem Eintreffen von zwei Wirbeln an einem festgelegten Punkt vergeht. Mit dieser Zeitkonstante ist eine Frequenz und eine typische Wellenlänge λ verknüpft. Daß bedeutet, wenn sich die Vorgänge im Freistrahllärm durchschnittlich nach der Zeitspanne Δt wiederholen, ergibt sich im Mittel diese Wellenlänge.

Die Abläufe im Freistrahllärm werden durch U , D , ρ_0 und weitere Parameter, wie zum Beispiel die Zähigkeit, festgelegt. Aus einer Dimensionsbetrachtung ergibt sich für die typische Zeitkonstante die Proportionalität

$$\Delta t \sim \frac{D}{U} \quad (7.2.1)$$

Damit folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = c_0 \Delta t \sim c_0 \frac{D}{U} \quad (7.2.2)$$

Dies kann durch

$$\lambda \sim \frac{D}{M} \quad (7.2.3)$$

ausgedrückt werden, wenn man die mit der Schallgeschwindigkeit im Außenbereich gebildete Machzahl

$$M = \frac{U}{c_0} \quad (7.2.4)$$

einführt.

Auf den ersten Blick mag die einfache Dimensionsbetrachtung recht grob erscheinen, jedoch läßt sich die Beziehung (7.2.3) tatsächlich mit Beobachtungen und Erfahrungen aus dem Alltag in Einklang bringen. Jeder kennt das typische Geräusch eines defekten Fahrrad- oder Autoreifens, aus dem langsam durch ein kleines Loch die Luft entweicht. Es ist ein Zischen zu hören, das durch die turbulenten Verwirbelungen der austretenden Luft hervorgerufen wird. Das Geräusch enthält Frequenzen, die am oberen Ende des hörbaren Bereichs liegen. Der Überdruck, der normalerweise in einem Autoreifen herrscht, bewirkt eine Strömung mit Schallgeschwindigkeit im engsten Querschnitt der Öffnung. Daß bedeutet, die Machzahl in dem "unerwünschten" Freistrahл erreicht zumindest lokal Werte um Eins und darüber. Die Proportionalität (7.2.3) sagt aus, daß bei gleicher Machzahl eine Vergrößerung der Ausdehnung D die typische Wellenlänge erhöht. Entsprechend muß sich die typische Frequenz verringern. In der Tat sind die Frequenzen, die der relative große turbulente Freistrahл mit ähnlichen Machzahlen hinter einem Flugzeugtriebwerk erzeugt, im Vergleich viel niedriger. In dem Spektrum sind sogar Anteile unterhalb der Hörschwelle enthalten. Dies kann jeder bestätigen, der an einem Flughafen einmal aus der Nähe den Start eines Düsenflugzeugs erlebt hat.

Die Ausdehnung des Freistrahls wird proportional zum Durchmesser D angenommen. Daß heißt, auch die Länge des Strahls wird durch den Durchmesser bestimmt. Dies entspricht den Beobachtungen. Der Strahl hinter dem Flugzeugtriebwerk ist natürlich viel länger als der Freistrahл am defekten Autoreifen.

Unabhängig, wie groß die Proportionalitätskonstante in (7.2.3) wirklich ist, ergibt gilt für eine hinreichend kleine Machzahl M immer

$$\lambda \gg D \quad (7.2.5)$$

Daß heißt, im Grenzfall $M \rightarrow 0$ ist die Wellenlänge groß gegenüber der Ausdehnung der Düse und des gesamten Freistrahls. Die Schallquelle, die durch den Freistrahл entsteht, ist in diesem Grenzfall kompakt. Diese Eigenschaft wird im weiteren verwendet, um einige Näherungen und Abschätzungen durchzuführen. Daß bedeutet, die gesamte Betrachtung wird auf sehr kleine Machzahlen eingeschränkt. Zusätzlich werden alle festen Wände und damit zum Beispiel auch die Düse, die den Freistrahл erzeugt, vernachlässigt. Man geht von der Lösung der Lighthill-Gleichung für den freien Raum ohne Berandungen nach (7.1.34) aus.

Im Abschnitt 6.5 wurde gezeigt, wie die Lösung für eine kompakte Quelle im Fernfeld abgeschätzt werden kann. Dort wurde die Lösung (6.5.1) der inhomogenen Wellengleichung für den Schalldruck behandelt. Die Lösung der Lighthill-Gleichung (7.1.34)

7. Schallerzeugung durch Strömungen

unterscheidet sich davon rein formal durch die zweite Ableitung vor dem Integral. Dennoch lassen sich die in Abschnitt 6.5 gewonnenen Ergebnisse auch hier anwenden. Dazu wird zunächst die Lösung (7.1.34) in der Form

$$\rho' = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.2.6)$$

mit der Abkürzung

$$F_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{V_Q} \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (7.2.7)$$

geschrieben. Im ersten Schritt wird das Feld F_{ij} für weit entfernte Beobachter abgeschätzt, und dann erst wird die zweite Ableitung gebildet. Wie in Abschnitt 6.5 wird nur eine Frequenz betrachtet. Die ist jetzt natürlich die typische Frequenz $\omega = 2\pi c/\lambda$, die der oben beschriebenen typischen Wellenlänge λ entspricht. Man nimmt damit an, die kompakte Quelle strahlt im wesentlichen mit dieser Frequenz ab. Die Quellstärke ist durch die Lighthill-Spannungen T_{ij} festgelegt. Es soll also

$$T_{ij}(\vec{x}, t) = \hat{T}_{ij}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (7.2.8)$$

gelten. Dabei ist \hat{T}_{ij} die komplexe Amplitude der Lighthill-Spannung an einem Ort. Setzt man dies in die Gleichung (7.2.7) ein, folgt

$$F_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{V_Q} \frac{\hat{T}_{ij}(\vec{y}) e^{i\omega(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (7.2.9)$$

Die Entfernung des Beobachters von der Quelle wird wieder mit

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| \quad (7.2.10)$$

bezeichnet. Dabei ist \vec{y}_M ein festgelegter Mittelpunkt der Quelle. Dies muß nicht unbedingt der geometrische Mittelpunkt des Freistrahls sein, sondern es kann zum Beispiel auch einfach die Mitte des Düsenaustritts genommen werden. Für einen Beobachtungsort \vec{x} im Fernfeld gilt $R \gg \lambda$. Wegen der kompakten Quelle ist $\lambda \gg D$, und damit gilt auch $R \gg D$. Daß heißt, ein Beobachter im akustischen Fernfeld befindet sich bei kompakter Quelle automatisch auch im geometrischen Fernfeld. Unter diesen Voraussetzungen kann, wie in Abschnitt 6.5 gezeigt, der Ausdruck $|\vec{x} - \vec{y}|$ im Integral durch den mittleren Abstand R ersetzt werden. Es ergibt sich im Fernfeld

$$F_{ij}(\vec{x}, t) \approx \int_{V_Q} \hat{T}_{ij}(\vec{y}) \frac{e^{i\omega(t - R/c_0)}}{R} d^3\vec{y} \quad (7.2.11)$$

Der Quotient im Integranden hängt nun nicht mehr von der Integrationsvariablen ab. Er kann vor das Integral gezogen werden. Man erhält

$$F_{ij}(\vec{x}, t) \approx A_{ij} \frac{e^{i\omega(t - R/c_0)}}{R} \quad (7.2.12)$$

Dabei ist mit

$$A_{ij} = \int_{V_Q} \widehat{T}_{ij}(\vec{y}) \, d^3\vec{y} \quad (7.2.13)$$

das von dem Beobachter (Ort und Zeit) unabhängige Restintegral über die komplexe Amplitude abgekürzt worden.

Der Quotient, welcher in Gleichung (7.2.11) und (7.2.12) auftritt, wird hier wie in Abschnitt 6.5 mit

$$F_M = \frac{e^{i\omega(t-R/c_0)}}{R} \quad (7.2.14)$$

abgekürzt. Es ist dann

$$F_{ij}(\vec{x}, t) \approx A_{ij} F_M(\vec{x}, t) \quad (7.2.15)$$

Für die Dichte im Fernfeld kann

$$\rho' \approx \frac{A_{ij}}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2 F_M}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.2.16)$$

geschrieben werden. Die hier vorkommende zweite Ableitung wurde bereits berechnet und auch für das Fernfeld abgeschätzt. Nach (6.5.52) gilt

$$\left. \frac{\partial^2 F_M}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{R \gg \lambda} = \left(\frac{i\omega}{c_0} \right)^2 F_M \cos \theta_i \cos \theta_j \quad (7.2.17)$$

Mit θ_i und θ_j ist jeweils der Beobachtungswinkel relativ zur x_i - beziehungsweise x_j -Achse bezeichnet. Der Ausdruck fällt wie das Feld F_M selbst mit $1/R$ nach außen ab. Setzt man die zweite Ableitung in Gleichung (7.2.16) ein, ergibt sich

$$\rho' \approx \frac{A_{ij}}{4\pi c_0^2} \left(\frac{i\omega}{c_0} \right)^2 \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c_0)}}{R} \right\} \cos \theta_i \cos \theta_j \quad (7.2.18)$$

Im nächsten Schritt wird betrachtet, zu welchen Größen die Dichteschwankungen im Fernfeld proportional sind. Daß heißt, wie skaliert der Ausdruck auf der rechten Seite von (7.2.18), wenn sich zum Beispiel die Machzahl, die mittlere Dichte, die Schallgeschwindigkeit oder die Ausdehnung des Freistrahls ändert. Aus Dimensionsüberlegungen folgt für die komplexe Amplitude der Lighthill-Spannungen die Proportionalität

$$\widehat{T}_{ij} \sim \rho_0 U^2 \quad (7.2.19)$$

Die Spannungen T_{ij} , die typischerweise auftreten, sind damit bei doppelter Geschwindigkeit viermal so groß. Das Integral über das Volumen V_Q ist proportional zur Ausdehnung von V_Q und damit aus Dimensionsgründen proportional zu D^3 . Es folgt entsprechend

$$A_{ij} = \int_{V_Q} \widehat{T}_{ij} \, d^3\vec{y} \sim \rho_0 U^2 D^3 \quad (7.2.20)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

In der runden Klammer in (7.2.18) tritt der Faktor ω/c_0 auf. Er ist umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ . Die geschweifte Klammer entspricht dem Feld F_M , welches mit $1/R$ skaliert.

Damit kann auch für die Dichte im Fernfeld eine Proportionalität angegeben werden. Unter Berücksichtigung der verschiedenen Relationen ergibt sich aus (7.2.18) für die Dichte im Fernfeld

$$\rho' \sim \frac{\rho_0 U^2 D^3}{c_0^2} \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{R} \quad (7.2.21)$$

Wegen (7.2.3) gilt

$$\frac{1}{\lambda} \sim \frac{M}{D} \quad (7.2.22)$$

Damit kann die Beziehung für die Dichte weiter vereinfacht werden. Es folgt

$$\rho' \sim \rho_0 M^4 \frac{D}{R} \quad (7.2.23)$$

Die hergeleitete Beziehung besagt, daß die Dichteschwankungen an einem festen Punkt im Fernfeld proportional zur vierten Potenz der Machzahl sind. Eine Verdoppelung der Geschwindigkeit des Freistrahls würde 16 mal so starke Dichteschwankungen bewirken.

Im Zusammenhang mit dem Strahlärm wird häufig die akustische Leistung betrachtet. Sie ist proportional zum Quadrat der Schwankungen ρ'^2 . Für die mittlere akustische Leistung des Freistrahls folgt

$$\langle \rho'^2 \rangle \sim \rho_0^2 M^8 \frac{D^2}{R^2} \quad (7.2.24)$$

Diese Beziehung ist das bekannte M^8 -Gesetz, das häufig auch als U^8 -Gesetz bezeichnet wird. Es drückt die sehr starke Abhängigkeit der akustischen Leistung von der Geschwindigkeit des Freistrahls aus.

Hier sei nochmal darauf hingewiesen, daß die Beziehung (7.2.24) nur für sehr kleine Machzahlen mit $M \ll 1$ gilt. Zusätzlich ist die Überlegung auch nur für kalte Freistrahlen gültig, bei denen im Inneren die gleiche Dichte ρ_0 wie im Außenbereich herrscht. Für diesen Fall ist das M^8 -Gesetz auch experimentell bestätigt worden.

Näherung für nichtkompakte Quelle

Bisher wurde von einer kompakten Quelle ausgegangen. Dadurch konnte die gezeigte Abschätzungen für das Fernfeld erst durchgeführt werden. Im folgenden soll eine approximative Umformung der Gleichung (7.1.34) vorgestellt werden, die nicht die Kompaktheit sondern lediglich das geometrische Fernfeld voraussetzt. Es wird angenommen, daß der Abstand des Beobachtungsortes zur Quelle groß gegenüber deren Ausdehnung ist. Zur Vereinfachung wird zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Bezugssystem so gewählt, daß der Mittelpunkt der Quellverteilung – also des Freistrahls – im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Daß heißt, es gilt

$$\vec{y}_M = 0 \quad (7.2.25)$$

Damit wird der Abstand einfach

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| = |\vec{x}| \quad (7.2.26)$$

Für den weit entfernten Beobachter wird vorausgesetzt, daß alle Quellpositionen \vec{y} im Quellvolumen V_Q die Ungleichung

$$|\vec{y}| \ll |\vec{x}| \quad (7.2.27)$$

erfüllen. Damit kann die erste Näherung

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} \quad (7.2.28)$$

angegeben werden. Sie entspricht der Approximation (6.5.8), die in Abschnitt 6.5 für Beobachter im geometrischen Fernfeld bereits abgeleitet wurde. Mit ihr folgt für die Lösung der Lighthill-Gleichung (7.1.34) die Beziehung

$$\rho'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0}) d^3\vec{y} \right\} \quad (7.2.29)$$

Der Term $1/|\vec{x}|$ ist vor das Integral gezogen worden. Dies dient zur Vorbereitung der weiteren Schritte.

Im folgenden soll die Lösung in eine praktischere Form gebracht werden. Dazu wird die zweite Ableitung berechnet. Da nur der Schall im Fernfeld von Interesse ist, werden ausschließlich die Anteile der Lösung berücksichtigt, die mit $1/R$ abfallen. Alle Anteile, die mit höheren Potenzen von $1/R$ skalieren werden vernachlässigt. Im ersten Schritt wird die erste Ableitung des Ausdrucks in der geschweiften Klammer betrachtet. Es muß die Produktregel angewendet werden. Dies ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \right\} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} + \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} \quad (7.2.30)$$

wobei die retardierte Zeit mit

$$\tau(\vec{x}, \vec{y}, t) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \quad (7.2.31)$$

abgekürzt ist. Auf der rechten Seite von (7.2.30) stehen zwei Summanden, in denen jeweils das gleiche Integral auftritt. Das Integral selbst fällt nicht mit der Entfernung R ab. Dagegen skaliert sowohl die x_i -Ableitung des Integrals als auch die Vorfaktoren vor den Integralausdrücken irgendwie mit $1/R$. Zunächst wird der erste Vorfaktor betrachtet. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \right\} = -\frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \quad (7.2.32)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Dieser Ausdruck fällt mit $1/|\vec{x}|^2$ beziehungsweise $1/R^2$ ab. Diese Skalierung gilt dann für den gesamten ersten Summand auf der linken Seite. Man kann

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \right\} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (7.2.33)$$

schreiben.

Um den zweiten Summand in (7.2.30) zu untersuchen, wird die x_i -Ableitung mit der Integration vertauscht. Es ergibt sich

$$\frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} = \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T_{ij}(\vec{y}, \tau) \right\} d^3\vec{y} \quad (7.2.34)$$

Der Ausdruck $T_{ij}(\vec{y}, \tau)$ hängt über die retardierte Zeit τ von der Beobachtungsposition \vec{x} ab. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T_{ij}(\vec{y}, \tau) \right\} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t}(\vec{y}, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \quad (7.2.35)$$

Für die Ableitung von τ ergibt sich aus (7.2.31)

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} = -\frac{1}{c_0} \frac{(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{1}{c_0} \frac{y_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (7.2.36)$$

Mit der Näherung für das geometrische Fernfeld (7.2.28) folgt

$$\frac{x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{x_i}{|\vec{x}|} \quad (7.2.37)$$

Dieser Ausdruck skaliert nicht mit R . Er hängt nur von der Beobachtungsrichtung ab. Dagegen fällt der zweite Quotient

$$\frac{y_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{y_i}{|\vec{x}|} \quad (7.2.38)$$

mit $1/R$ ab. Er kann im geometrischen Fernfeld ($|\vec{y}| \ll |\vec{x}|$) gegenüber dem Ersten vernachlässigt werden. Für weit entfernte Beobachter gilt damit die Näherung

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|} \quad (7.2.39)$$

Im Fernfeld kann also die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T_{ij}(\vec{y}, \tau) \right\} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t}(\vec{y}, \tau) \quad (7.2.40)$$

geschrieben werden. Nach Einsetzen in (7.2.34) ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|^2} \int_{V_Q} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t}(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \quad (7.2.41)$$

Dieser Ausdruck skaliert mit $1/R$ im Fernfeld. Hätte man den Quotienten aus (7.2.38) nicht vernachlässigt, würde jetzt noch ein Anteil erscheinen, der mit $1/R^2$ abfällt.

Die Untersuchung ergibt, daß auf der rechten Seite von (7.2.30) nur der zweite Summand einen Anteil besitzt, der mit $1/R$ abfällt. Alle anderen Anteile skalieren mit einer höheren Potenz von $1/R$. Sie werden im Fernfeld nicht berücksichtigt. Es ergibt sich für weit entfernte Beobachtungspunkte

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \right\} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|^2} \int_{V_Q} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.2.42)$$

Die gleichen Überlegungen lassen sich auch für die zweite Ableitung durchführen. Unter Vernachlässigung der $1/R^2$ -Anteile erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \right\} \approx \frac{1}{c_0^2} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3} \int_{V_Q} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.2.43)$$

Damit kann die Dichte im Fernfeld näherungsweise angegeben werden. Es gilt

$$\rho'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3} \int_{V_Q} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.2.44)$$

Im Gegensatz zur ursprünglichen Lösung (7.2.29) tritt hier keine räumliche sondern eine zeitliche Ableitung auf. Die Ableitung wirkt zudem nur auf die Lighthillschen Schubspannungen T_{ij} und nicht auf das gesamte Integral. Die Gleichung (7.2.44) ist daher für praktische Berechnungen häufig besser geeignet als die Lösung (7.2.29). Es muß nur der zeitliche Verlauf der Schubspannungen T_{ij} bekannt sein. Viele Abschätzungen basieren auf dieser Gleichung. Sie wird aber auch zur Berechnung des Fernfeldes aus numerischen Daten verwendet. Sind die Lighthillschen Schubspannungen T_{ij} in einem Gebiet aus einer numerischen Strömungssimulation bekannt, so kann der von der Strömung bewirkte Fernfeldschall mit (7.2.44) ermittelt werden.

7.3. Wirbelschall

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, das in turbulenten Strömungsfeldern die sogenannten Reynoldsschen Spannungen $v_i v_j$ relativ groß sind. So ist der Betrag des Ausdrucks $\rho v_i v_j$ im Zeitlichen Mittel deutlich größer als die Beträge der laminaren Spannungen τ_{ij} . Daraus kann man schließen, daß die Lighthillschen Spannungen

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - \tau_{ij} + \delta_{ij} (p' - c_0^2 \rho') \quad (7.3.1)$$

in Gebieten mit turbulenten Schwankungen im wesentlichen von dem ersten Term dominiert werden. Bei der Wechselwirkung von Wirbeln in einem turbulenten Feld

7. Schallerzeugung durch Strömungen

nimmt der Term $\rho v_i v_j$ betragsmäßig besonders große Werte an. Auf dieser Vorstellung basiert auch die Herleitung des M^8 -Gesetzes für den Freistrahlschall, das im vorigen Abschnitt vorgestellt wurde. Dieses Gesetz ist zwar in Experimenten bestätigt worden, jedoch wird besonders dann eine Abweichung beobachtet, wenn zwischen Freistrah und Außenbereich ein Dichteunterschied vorliegt. Genauere Untersuchungen zeigen, daß in diesem Fall wegen des $(p' - c_0^2 \rho')$ -Terms die Lighthillschen Spannungen nicht mit der einfachen Dimensionsbetrachtung aus dem vorigen Abschnitt abgeschätzt werden können. Dagegen scheinen ohne Dichteunterschiede alle für die Schallerzeugung wesentlichen Vorgänge durch den $\rho v_i v_j$ -Term erfaßt zu werden. Im folgenden soll dieser Term etwas genauer betrachtet werden, um auch eine anschauliche Vorstellung von den grundlegenden Mechanismen bei der Schallerzeugung zu erhalten.

Es wird von einer isolierten Wirbelstärkeverteilung ausgegangen. Dabei kann es sich zum Beispiel um zwei Wirbel handeln, die gerade miteinander wechselwirken. Die Betrachtung wird auf kleine Machzahlen beschränkt. Vereinfachend wird angenommen, daß das Strömungsfeld isentrop ist. Bei kleinen Machzahlen sind die Dichteschwankungen in der Strömung relativ gering. Näherungsweise entspricht die Dichte überall einem Außenwert ρ_0 . In diesem Fall können die Lighthillschen Spannungen mit

$$T_{ij} = \rho_0 v_i v_j \quad (7.3.2)$$

angenähert werden. Daß bedeutet, es wird nur noch die durch die Reynoldsschen Spannungen bewirkte Quellstärke berücksichtigt. Vereinfachend sind dazu noch in dem Term $\rho v_i v_j$ die Dichteschwankungen vernachlässigt.

Für die Quellstärke in der Lighthill-Gleichung ergeben diese Vereinfachungen

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 (v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.3.3)$$

Die Quellstärke ist damit proportional zur zweiten Ableitung von $v_i v_j$. Um den Ausdruck in eine etwas anschaulichere Form zu überführen, wird zunächst die erste Ableitung des Produkts $v_i v_j$ betrachtet. Es gilt

$$\frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (7.3.4)$$

Im ersten Term auf der rechten Seite tritt der Ausdruck

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{v} \quad (7.3.5)$$

auf. Bei kleinen Machzahlen ist das Strömungsfeld näherungsweise inkompressibel und die Divergenz der Geschwindigkeit verschwindet: $\text{div } \vec{v} = 0$. Entsprechend kann der erste Ausdruck auf der rechten vernachlässigt werden.

Der zweite Term auf der rechten Seite von (7.3.4) wird umgeschrieben. Es ergibt sich

$$v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \quad (7.3.6)$$

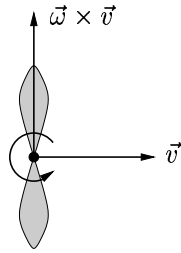


Abbildung 7.3.: Zur Quellstärke durch einen bewegten Wirbel

Der Vektor $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$ bezeichnet dabei die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes. Mit der Vernachlässigung des ersten Terms folgt für die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 (v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} = \text{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) + \Delta \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \quad (7.3.7)$$

Daraus ergibt sich schließlich eine approximative Variante der Lighthill-Gleichung mit

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \rho_0 \text{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) + \rho_0 \Delta \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \quad (7.3.8)$$

Diese gilt bei kleinen Machzahlen und einem isentropen Strömungsfeld, in dem die Reibung vernachlässigt ist.

In der modifizierten Lighthill-Gleichung (7.3.8) treten zwei Quellterme auf. Der Erste entspricht einer typischen Dipolverteilung, wie sie sich zum Beispiel auch bei Impulszufuhr ergibt. Die Schallerzeugung durch Störung der Impulserhaltung wurde in Abschnitt 6.3 ausführlich betrachtet. Die Quellstärke bei Impulszufuhr ist mit $-\text{div}(\vec{g})$ gegeben, wenn der zugeführte Impuls pro Volumen und Zeit mit \vec{g} bezeichnet wird. Die Größe \vec{g} kann als Kraft pro Volumen aufgefaßt werden. Hier ist statt der Kraft \vec{g} das Vektorfeld $\vec{\omega} \times \vec{v}$ für die Schallerzeugung maßgeblich. Um diese Größe zu veranschaulichen, wird ein einfaches zweidimensionales Beispiel betrachtet. Man geht von einem einfachen Wirbel mit konzentrierter Wirbelstärkeverteilung – zum Beispiel ein Potentialwirbel – aus. Der Wirbel bewegt sich mit Geschwindigkeit \vec{v} . Die Situation ist in Abbildung 7.3 veranschaulicht. Außerhalb des Wirbelkerns ist die Wirbelstärke $\vec{\omega}$ gleich Null. Dort ist dementsprechend keine Quellstärke vorhanden. Nur im Wirbelkern – beim Potentialwirbel also nur in einem Punkt – ergibt sich ein $\vec{\omega} \times \vec{v} \neq 0$. Der Vektor $\vec{\omega} \times \vec{v}$ steht senkrecht zur Bewegungsrichtung. Entsprechend ist der resultierende Dipol quer zur Bewegungsrichtung orientiert. Dies ist in der Abbildung 7.3 durch die eingezeichnete typische Richtcharakteristik eines Dipols angedeutet.

Falls der Wirbel ruht, ist $\vec{v} = 0$ und folglich auch keine Schallquelle vorhanden. Bewegt sich der Wirbel mit konstanter Geschwindigkeit, ergibt sich eine Quellstärke. Die Größe $\vec{\omega} \times \vec{v}$ ist jedoch zeitlich konstant. Das resultierende Druckfeld zeigt dement-

7. Schallerzeugung durch Strömungen

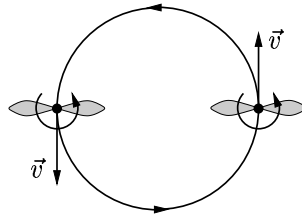


Abbildung 7.4.: Modell mit zwei gleichsinnig drehenden Wirbel, die um einander kreisen.

sprechend keine echte Schwingung. Nur in der Nähe des Wirbels ergibt sich eine Druckschwankung, wenn der Wirbel vorbeikommt. Ein weit entfernter Beobachter registriert durch die konstante Quelle eine Abweichung vom Ausgangsdruck, die sich – je nach Entfernung – zeitlich relativ langsam verändert.

Eine merkliche Schwingung – also hörbaren Schall – ergibt sich, wenn die Größe $\vec{\omega} \times \vec{v}$ zeitlich schwankt. Bei einem Potentialwirbel kann man davon ausgehen, daß die Wirbelstärke $\vec{\omega}$ konstant bleibt. Die angesprochenen Schwankungen können dann nur durch eine beschleunigte Wirbelbewegung entstehen. In Abbildung 7.4 ist ein einfaches Beispiel mit einer solchen Bewegung dargestellt. Es handelt sich um zwei gleichsinnig drehende Potentialwirbel, die zusätzlich gleichstark sein sollen. Die Wirbel induzieren jeweils ein Geschwindigkeitsfeld am Ort des anderen Wirbels. Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz bewegen sich die Wirbel dann auf einer Kreisbahn um einander herum. Dabei ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} permanent. Es ergibt sich eine Überlagerung von zwei Dipolen, also eine quadrupolartige Quellverteilung. Ein weit entfernter Beobachter registriert entsprechend eine periodische Dichteschwankung, die von den beiden Punktquellen verursacht wird.

Bisher wurde lediglich der erste Quellterm auf der rechten Seite von (7.3.8) untersucht. Der zweite Term läßt sich leider nicht so einfach anschaulich deuten. Es kann jedoch gezeigt werden, daß für weit entfernte Beobachter der Anteil des Schalls durch den zweiten Term vernachlässigbar gering ist. Die dazu notwendige Abschätzung ist jedoch etwas umfangreich, und kann hier aus Platzgründen nur grob skizziert werden. Dies soll im folgenden geschehen.

Ohne Berandungen kann die Lösung der Gleichung (7.3.8) wie gewohnt durch ein Integral über das Quellgebiet dargestellt werden. Für das Dichtefeld ergibt sich

$$\frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v})_i(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int_{V_Q} \frac{\frac{1}{2}\vec{v}^2(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (7.3.9)$$

Zweckmäßigerweise wurde dabei durch die Dichte im Ausgangszustand ρ_0 dividiert. Das Quellvolumen V_Q erstreckt sich über alle Bereiche, in denen einer der beiden Quellterme ungleich Null ist. Aus dem Divergenzterm ergibt sich die erste räumliche Ableitung $\partial/\partial x_i$ des Integrals über V_Q . Im Integrand tritt dabei die i -te Komponente

des $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ -Feldes auf. Der Laplace-Term liefert eine zweite Ableitung vor dem Integral. Zur Vereinfachung wird wieder der Mittelpunkt des Quellvolumens V_Q in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt.

In einer ersten Abschätzung für Beobachter im geometrischen Fernfeld wird von der Beziehung

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} \quad (7.3.10)$$

Gebrauch gemacht. Diese gilt für alle Punkte $|\vec{x}| \gg l$, wobei die Größe l die Ausdehnung des Quellvolumens darstellt. Daß heißt, es gilt für alle Punkte \vec{y} im Quellvolumen: $|\vec{y}| < l$. Analog zur Herleitung der Fernfeldnäherung (7.2.44) ergibt sich hier

$$\begin{aligned} \frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} \approx \frac{1}{4\pi c_0^2 |\vec{x}|} \left\{ -\frac{x_i}{c_0 |\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_Q} (\vec{\omega} \times \vec{v})_i \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \right. \\ \left. + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_Q} \frac{1}{2} \vec{v}^2 \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \right\} \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Aus den räumliche Ableitungen ergeben sich wieder Zeitableitungen. Im Gegensatz zu (7.2.44) sind die Ableitungen nur vor dem Integral geschrieben. Alle Terme, die mit $1/|\vec{x}|^2$ beziehungsweise $1/R^2$ abfallen sind vernachlässigt worden. Das Schallfeld setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, die durch die beiden Integrale in (7.3.11) gegeben sind. Im weiteren werden die Anteile mit I_1 und I_2 bezeichnet. Es gilt damit

$$\frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} \approx I_1 + I_2 \quad (7.3.12)$$

Bei der angenommenen kleinen Machzahl kann die Quelle als kompakt angesehen werden. Daß bedeutet, die Wellenlänge ist groß gegenüber der Ausdehnung der Quelle. Dies läßt sich auch anhand des Beispiels aus Abbildung 7.4 anschaulich plausibel machen. Die induzierten Geschwindigkeiten sind klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit. Dementsprechend lange benötigen die beiden Punktwirbel für einen Umlauf auf der Kreisbahn. In der Zeit eines halben Umlaufs legen Schallwellen eine Strecke zurück, die sehr groß gegenüber dem Umfang oder dem Durchmesser des Kreises ist. Die ausgestrahlte Wellenlänge λ stimmt genau mit dieser Strecke überein. Die Ausdehnung l des Quellvolumens entspricht dem Kreisdurchmesser. Damit gilt $l \ll \lambda$.

Bei kompakter Quelle kann die Variation der retardierten Zeit in dem Quellvolumen vernachlässigt werden. Das vereinfacht die Integrale zusätzlich. Zunächst wird der zweite Anteil I_2 näher betrachtet. Es wird $|\vec{x} - \vec{y}|$ durch $|\vec{x}|$ ersetzt. Man erhält

$$I_2 = \frac{1}{4\pi c_0^4 |\vec{x}|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_Q} \frac{1}{2} \vec{v}^2 \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.3.13)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Mit einer Dimensionsbetrachtung läßt sich dieser Ausdruck weiter abschätzen. Es ergibt sich letztlich die Proportionalität

$$I_2 \sim \frac{l}{|\vec{x}|} M^6 \quad (7.3.14)$$

Auf analoge Weise kann auch der erste Anteil I_1 angenähert werden. Es folgt näherungsweise bei kompakter Quelle

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi c_0^3 |\vec{x}|} \cdot \frac{x_i}{|\vec{x}|} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_Q} (\vec{\omega} \times \vec{v})_i \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.3.15)$$

Die anschließende Abschätzung liefert

$$I_1 \sim \frac{l}{|\vec{x}|} M^4 \quad (7.3.16)$$

Es zeigt sich, daß bei kleinen Machzahlen der zweite Anteil gegenüber dem Ersten für Beobachter im Fernfeld vernachlässigbar ist. Daß bedeutet, für eine Untersuchung des Schalls im Fernfeld kann statt Gleichung (7.3.8) die noch weiter reduzierte Variante

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \rho_0 \operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (7.3.17)$$

herangezogen werden. Sie beschreibt zwar die Schwankungen im Nahfeld nicht korrekt, jedoch sind in der Regel sowieso nur die Fernfeldschwankungen von Interesse.

Die Gleichung (7.3.17) wurde 1975 von Howe angegeben. Er formulierte die Lighthillsche Analogie um, so daß die Quellstärke durch den Ausdruck $\operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{v})$ gegeben ist. Die Analogie ist dann zwar nur noch approximativ für kleine Machzahlen gültig, jedoch sind die Lösungen viel einfacher zu bestimmen. Wesentlicher Vorteil ist, daß sich das Integrationsgebiet deutlich verkleinert. Zur Lösung von (7.3.17) ist nur über die Gebiete mit Wirbelstärke zu integrieren. Diese sind im Allgemeinen viel kleiner als die Bereiche, in denen die Lighthillschen Spannungen T_{ij} einen nicht vernachlässigbaren Beitrag liefern. Im Beispiel der Punktwirbel aus Abbildung 7.4 ist die Quellstärke nur in zwei Punkten von Null verschieden. Aus dem Integral wird eine Summe, die viel einfacher zu berechnen ist.