

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

5.1. Das Geschwindigkeitspotential

Bevor an einigen Beispielen einfache dreidimensionale Lösungen der Wellengleichung diskutiert werden, soll ein rein formales Hilfsmittel – das Geschwindigkeitspotential – vorgestellt werden. Das Geschwindigkeitspotential vereinfacht die Lösung der Gleichungen nicht grundlegend, es erlaubt jedoch eine sehr elegante Darstellung.

Die gesamten Überlegungen basieren auf der Wellengleichung für den Schalldruck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (5.1.1)$$

Weiterhin wird auch die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \text{grad } p' = 0 \quad (5.1.2)$$

benötigt. Wendet man den rot-Operator auf die Gleichung (5.1.2) an, ergibt sich

$$\rho_0 \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \right) + \underbrace{\text{rot grad } p'}_{=0} = 0 \quad (5.1.3)$$

Die Rotation von einem Gradientenfeld ist immer gleich Null. Damit verschwindet der zweite Term. Durch Vertauschen der Ableitungen im ersten Term folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{v}') = 0 \quad (5.1.4)$$

Das bedeutet, die Größe $\text{rot } \vec{v}'$ ist an jedem Ort zeitlich konstant. Geht man von einem Ausgangszustand $\vec{v}' = 0$ im gesamten Raum aus, und "schaltet" dann die Störungen ein, so bleibt

$$\text{rot } \vec{v}' = 0 \quad (5.1.5)$$

überall erhalten. Mathematisch kann gezeigt werden, daß ein rotationsfreies Vektorfeld immer als Gradientenfeld eines Potentials dargestellt werden kann. Es gibt also ein ϕ , so daß

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi \quad (5.1.6)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

gilt. Bisher sind die Überlegungen analog zu denen, die auch zur Potentialtheorie in der Strömungsmechanik angestellt werden. Spielen Reibungseffekte keine Rolle, kann im Strömungsfeld $\text{rot } \vec{v} = 0$ angenommen werden. Anschaulich kann man sich dies anhand eines Fluidelementes klarmachen, an dem nur Druckkräfte angreifen. Die Druckkräfte sind nicht in der Lage das Fluidelement in Drehung zu versetzen. Dazu ist Reibung und Schubspannung notwendig. Ohne Reibung bleibt ein rotationsfreies Strömungsfeld immer rotationsfrei. In der Euler-Gleichung ist die Reibung vernachlässigt. Daher lassen sich daraus die obigen Beziehungen ableiten. Dabei spielt es keine Rolle, daß die Euler-Gleichung linearisiert wurde. Das Potential kann auch in diesem Fall eingeführt werden.

Das Geschwindigkeitspotential zu einem vorgegebenen Schnellefeld $\vec{v}'(\vec{x}, t)$ ist nicht eindeutig. Es ist lediglich seine Existenz gegeben. Angenommen es sei ein Potential ϕ_1 mit

$$\text{grad } \phi_1(\vec{x}, t) = \vec{v}'(\vec{x}, t) \quad (5.1.7)$$

bekannt. Damit kann man sich leicht ein weiteres Potential

$$\phi_2(\vec{x}, t) = \phi_1(\vec{x}, t) + h(t) \quad (5.1.8)$$

ableiten, das ebenfalls

$$\text{grad } \phi_2(\vec{x}, t) = \vec{v}'(\vec{x}, t) \quad (5.1.9)$$

erfüllt. Die Funktion $h(t)$ kann eine beliebige Funktion der Zeit sein. Damit wird klar, daß es für jedes Schnellefeld eine unendliche Vielzahl von möglichen Potentialen gibt.

Es lassen sich jedoch spezielle Potentiale mit besonderen Eigenschaften finden, die für die Lösung akustischer Probleme eine elegante Darstellung ermöglichen. Es wird angenommen, das Schnellefeld $\vec{v}'(\vec{x}, t)$ gehört zu einer Lösung $p'(\vec{x}, t)$ der Wellengleichung (5.1.1), und zusammen erfüllen sie die linearisierte Euler-Gleichung (5.1.2). ϕ_1 sei ein Potential, das Gleichung (5.1.7) genügt. Dann kann man (5.1.7) in (5.1.2) einsetzen und erhält

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi_1) + \text{grad } p' = 0 \quad (5.1.10)$$

Vertauscht man die Ableitungen ergibt sich

$$\text{grad} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p' \right) = 0 \quad (5.1.11)$$

Daß bedeutet, der Ausdruck in den runden Klammern ist räumlich konstant. Er ist eine reine Funktion der Zeit, die mit

$$\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p' \equiv K_1(t) \quad (5.1.12)$$

dargestellt werden kann. Es läßt sich nun ein spezielles Potential finden, für das die Konstante immer gleich Null ist. Dazu konstruiert man

$$\phi_{\text{spezial}}(\vec{x}, t) = \phi_1(\vec{x}, t) + h_1(t) \quad (5.1.13)$$

5.1. Das Geschwindigkeitspotential

mit der speziellen Wahl einer Funktion $h_1(t)$, die

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} K_1(t) \quad (5.1.14)$$

erfüllt. Die Funktion $h_1(t)$ und damit auch ϕ_{Spezial} ist bis auf eine Konstante bestimmt. Es gilt

$$\rho_0 \frac{\partial \phi_{\text{Spezial}}}{\partial t} + p' = \underbrace{\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p'}_{K_1(t)} + \underbrace{\rho_0 \frac{dh_1}{dt}}_{-K_1(t)} \quad (5.1.15)$$

Und damit folgt

$$\rho_0 \frac{\partial \phi_{\text{Spezial}}}{\partial t} + p' = 0 \quad (5.1.16)$$

Der Vorteil dieses speziellen Potentials ist, daß beide in dem Schallfeld interessanten Größen – Schnelle und Druck – mit den Beziehungen

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi_{\text{Spezial}} \quad (5.1.17)$$

und

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi_{\text{Spezial}}}{\partial t} \quad (5.1.18)$$

aus dem Potential relativ einfach berechnet werden können. Ein Potential mit den Eigenschaften (5.1.17) und (5.1.18) wird akustisches Potential genannt. Im folgenden wird statt ϕ_{Spezial} nur noch ϕ geschrieben. Es wird immer davon ausgegangen, daß ein Potential ϕ beide Bedingungen (5.1.17) und (5.1.18) erfüllt.

Es zeigt sich, daß das Schallfeld besonders elegant durch das akustische Potential ausgedrückt werden kann. Es stellt sich die Frage, wie das akustische Potential ϕ praktisch berechnet werden kann. Die bisherigen Überlegungen zeigten lediglich die Existenz ausgehend von einem gegebenen ϕ_1 . Um eine Bestimmungsgleichung für ϕ zu erhalten, wird (5.1.18) in die Wellengleichung (5.1.1) eingesetzt. Soll das akustische Potential ϕ eine Lösung der Wellengleichung beschreiben, muß es

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \Delta \left(-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.1.19)$$

erfüllen. Durch Vertauschen der Ableitungen folgt daraus

$$-\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right] = 0 \quad (5.1.20)$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist zeitlich konstant. Für einen Ausgangszustand mit $\vec{v}' = 0$ und $p' = 0$ müssen die räumlichen und zeitlichen Ableitungen von ϕ verschwinden. Daß heißt, die eckige Klammer ist im Ausgangszustand überall gleich Null. Werden dann die Störungen "eingeschaltet", so bleibt der Wert überall gleich Null. Es muß daher auch für ϕ die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (5.1.21)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

	Stationäre Potentialströmung	Akustisches Feld/ Akustisches Potential
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \text{grad } \phi$	$\vec{v}' = \text{grad } \phi$ (Schnelle)
Druck	$p = p_0 - \frac{\rho}{2} \vec{v} ^2$ (Druck aus Bernoulli)	$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (Schalldruck direkt)
Bestimmungsgleichung	$\Delta \phi = 0$ (Laplace-Gleichung)	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0$ (Wellengleichung)

Tabelle 5.1.: Gegenüberstellung der Potentiale für stationäre Strömung und akustische Felder

gelten. Zweckmäßigerweise wird noch $\phi = 0$ im Ausgangszustand mit $\vec{v}' = 0$ und $p' = 0$ festgelegt. Dadurch ist ϕ dann mit der Wellengleichung eindeutig bestimmbar. Statt der Wellengleichung für den Druck kann Gleichung (5.1.21) gelöst werden, und der Druck dann anschließend mit (5.1.18) berechnet werden. Auf diesem Wege kann auch gleich die Schnelle mit (5.1.17) angegeben werden, ohne erst wieder die linearisierte Euler-Gleichung zum Umrechnen zwischen Druck und Schnelle zu bemühen.

Das akustische Potential ist ein formales Hilfsmittel, um die Lösung der Wellengleichung auf elegante Weise zu ermitteln und darzustellen. Es soll hier mit dem Geschwindigkeitspotential, das aus der Potentialtheorie der Strömungsmechanik bekannt ist, verglichen werden. Dabei wird von einer stationären Potentialströmung ausgegangen. Die Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die wesentlichen Merkmale. Beide, das Geschwindigkeits- und das Schnellefeld, sind als Gradient des Potentials gegeben. Der Druck kann im Fall des akustischen Potentials direkt aus ϕ berechnet werden. In der stationären Potentialströmung muß man die Bernoulli-Gleichung zu Hilfe nehmen, um den Druck zu bestimmen. Die Bestimmungsgleichung für ϕ ist in einem Fall die Laplace-Gleichung und im anderen Fall die Wellengleichung.

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

Gegeben sei eine sogenannte atmende Kugel, deren Mittelpunkt sich im Koordinatenursprung befindet. Der Radius der Kugel schwankt sinusförmig um den mittleren Wert a . Die komplexe Amplitude der Auslenkung wird mit ε bezeichnet. Für den momentanen Radius $R_K(t)$ soll

$$R_K(t) = a + \varepsilon e^{i\omega t} \quad (5.2.1)$$

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

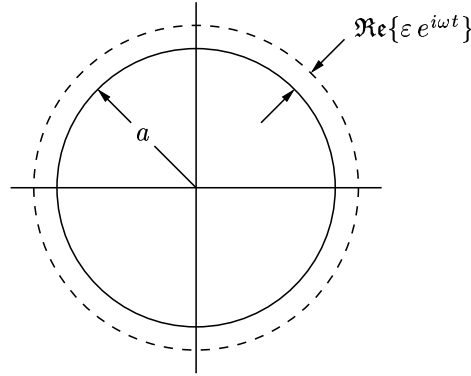


Abbildung 5.1.: Atmende Kugel

gelten. Die Parameter sind in Abbildung 5.1 veranschaulicht. Das gegebene Problem wird zweckmäßigerweise in Kugelkoordinaten (r, θ, β) dargestellt. Mit $r = |\vec{x}|$ wird der Abstand von Ursprung bezeichnet, und die Größen θ und β sind Winkel. Die Orientierung der Koordinaten wird in Anhang A.2 beschrieben. In der Wellengleichung tritt der Laplace-Operator auf. Dieser lautet in den Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (5.2.2)$$

Da das Problem kugelsymmetrisch ist, gibt es keine Abhängigkeit von den Winkeln θ und β . Für die Ableitungen gilt entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = 0 \quad (5.2.3)$$

Dadurch vereinfacht sich der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, und die Wellengleichung für das akustische Potential wird bei Kugelsymmetrie zu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.2.4)$$

Die Ableitungen im zweiten Term auf der linken Seite können ausgeführt werden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \phi}{\partial r} = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) \quad (5.2.5)$$

Setzt man dies in (5.2.4) ein und multipliziert mit r , folgt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{r \phi\} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \{r \phi\} = 0 \quad (5.2.6)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Dabei wurde die Variable r im ersten Term mit in die Zeitableitung hineingezogen. Gleichung (5.2.6) hat die Form einer eindimensionalen Wellengleichung. Die Variable dieser Wellengleichung ist das Produkt $\{r \phi\}$. Daß heißt, $\{r \phi\}$ erfüllt die Wellengleichung (5.2.6), falls ϕ die radiale Wellengleichung (5.2.4) erfüllt. Für den eindimensionalen Fall sind die Lösungen bekannt. Die allgemeine Lösung für (5.2.6) lautet

$$\{r \phi\} = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (5.2.7)$$

Dabei sind f und g beliebige Funktionen. Daraus kann die Lösung für (5.2.4) einfach abgeleitet werden. Division durch r liefert

$$\phi(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r} \quad (5.2.8)$$

Lösungen dieser Form werden als Kugelwellen bezeichnet. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt eine nach außen in positive r -Richtung laufende Welle. Der zweite Term stellt eine nach innen in negative r -Richtung laufende Welle dar. Im Unterschied zu der ebenen Welle nehmen hier die Amplituden nach außen hin mit $1/r$ ab. Ein nach außen laufender Puls behält seine Form, denn diese ist durch die Funktion f festgelegt. Jedoch nimmt die Stärke des Pulses mit zunehmendem Abstand vom Ursprung ab. Umgekehrt wird ein nach innen laufender Puls immer stärker. Am Ursprung bei $r = 0$ tritt eine Singularität auf. Dort ist weder die Lösung (5.2.8) noch die Wellengleichung (5.2.4) gültig. Die Lösungen sind trotzdem verwendbar, da die Singularität bei der betrachteten Geometrie im Inneren der Kugel liegt und so praktisch keine Bedeutung hat.

Druck- und Schnellefeld

Bisher wurde die kugelsymmetrische Lösung für das akustische Potential abgeleitet. Die Randbedingung an der Oberfläche der atmenden Kugel ist eine Bedingung an das Schnellefeld. In der Praxis ist besonders der Schalldruck von Interesse. Folglich soll das Druck- und Schnellefeld zu der gefundenen Lösung bestimmt werden. Dabei wird jedoch nicht von der allgemeinen Lösung (5.2.8) ausgegangen, sondern die spezielle Form

$$\phi(r, t) = A \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (5.2.9)$$

betrachtet. Da die Kugel harmonisch pulsiert, ist es sinnvoll, auch von einer harmonischen Lösung mit der gleichen Frequenz für das Schallfeld auszugehen. Zusätzlich wird angenommen, daß von außen keine Wellen eintreffen. Alle Wellen werden von der Kugel erzeugt und laufen nach außen. Nach innen laufende Wellen sind entsprechend in (5.2.9) nicht berücksichtigt.

Der Druck ergibt sich aus dem akustischen Potential durch die Beziehung

$$p'(r, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.2.10)$$

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

Einsetzen von (5.2.9) ergibt

$$p'(r, t) = -\frac{i\omega\rho_0 A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.2.11)$$

Die komplexen Ausdrücke für Druck und akustischen Potential unterscheidet sich nur durch den Faktor $-i\omega\rho_0$. Für weitere Umformungen bietet sich die Schreibweise mit komplexer Amplitude an. Das Druckfeld kann in der Form

$$p'(r, t) = \hat{p}(r) e^{i\omega t} \quad (5.2.12)$$

geschrieben werden. Die komplexe Amplitude \hat{p} hängt vom Abstand r ab und ist mit

$$\hat{p}(r) = -\frac{i\omega\rho_0 A}{r} e^{-i\omega r/c} = -\frac{i\omega\rho_0 A}{r} e^{-ikr} \quad (5.2.13)$$

gegeben. Dabei ist die Wellenzahl $k = \omega/c$ eingesetzt worden.

Das Schnellefeld kann mit der Beziehung

$$\vec{v}' = \text{grad}\phi \quad (5.2.14)$$

aus dem akustischen Potential bestimmt werden. Bei der Darstellung in Kugelkoordinaten ist es zweckmäßig die radiale Schnelle

$$u'_R = \vec{v}' \cdot \frac{\vec{x}}{r} \quad (5.2.15)$$

einzuführen. Dabei ist

$$\frac{\vec{x}}{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (5.2.16)$$

der nach außen zeigende Einheitsvektor an der Stelle \vec{x} . Für den Gradienten des Potentials gilt

$$\text{grad}\phi \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (5.2.17)$$

Für die radiale Schnelle folgt

$$u'_R = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (5.2.18)$$

Damit kann die Schnelle für das in (5.2.9) gegebene Potential berechnet werden. Es ergibt sich

$$u'_R(r, t) = A \left(-\frac{i\omega}{rc} - \frac{1}{r^2} \right) e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.2.19)$$

Es wird – wie für den Druck – auch für die Schnelle eine komplexe Amplitude eingeführt. Das Schnellefeld wird mit

$$u'_R(r, t) = \hat{u}_R(r) e^{i\omega t} \quad (5.2.20)$$

dargestellt. Die komplexe Amplitude der Schnelle ist durch

$$\hat{u}_R(r) = A \left(-\frac{i\omega}{rc} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-ikr} = \left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) \frac{A}{r} e^{-ikr} \quad (5.2.21)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

gegeben. Um einen Zusammenhang zwischen den komplexen Amplituden zu erhalten, wird die Gleichung (5.2.21) durch (5.2.13) dividiert. Es ergibt sich

$$\frac{\hat{u}_R(r)}{\hat{p}(r)} = \frac{1}{\rho_0 c} \left(1 - \frac{ic}{\omega r} \right) \quad (5.2.22)$$

Vergleicht man dies Resultat mit den Verhältnissen in der ebenen Welle, so erkennt man deutliche Unterschiede. In einer eindimensionalen ebenen Welle gilt

$$p' = \rho_0 c u' \quad (5.2.23)$$

Diese Beziehung ist unabhängig von der Form der Welle. Sie gilt für harmonische Wellen aber auch für einzelne Pulse. Gleichung (5.2.22) ist dagegen eine Beziehung zwischen den komplexen Amplituden, die nur im harmonischen Fall gilt. Das Verhältnis zwischen Druck und Schnelle in der Kugelwelle hängt von der Frequenz ω ab. In der ebenen Welle ist der Wellenwiderstand reell. Daß bedeutet, Druck und Schnelle sind immer in Phase. Das Verhältnis in der Kugelwelle ist durch einen komplexen Faktor in (5.2.22) gegeben. Es kann sich damit auch eine Phasenverschiebung ergeben.

Üblicherweise wird zur einfacheren Darstellung die radiale Impedanz Z_R eingeführt. Für sie gilt

$$\hat{p} = Z_R \hat{u}_R \quad (5.2.24)$$

Damit muß

$$Z_R = \rho_0 c \left(1 - \frac{ic}{\omega r} \right)^{-1} \quad (5.2.25)$$

sein. Um die Abhängigkeit der radialen Impedanz vom Abstand und der Frequenz zu untersuchen, wird der Ausdruck in (5.2.25) umgeformt. Durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen der runden Klammer ergibt sich

$$Z_R = \rho_0 c \frac{1 + i \frac{c}{\omega r}}{1 + \left(\frac{c}{\omega r} \right)^2} \quad (5.2.26)$$

Jetzt ist der Nenner reell und Real- und Imaginärteil von Z_R können angegeben werden. In (5.2.26) tritt der Faktor

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{1}{kr} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (5.2.27)$$

auf. Er bestimmt die radiale Impedanz. Es ergibt sich der Grenzfall

$$Z_R \rightarrow \rho_0 c \quad \text{für} \quad \frac{c}{\omega r} \rightarrow 0 \quad (5.2.28)$$

Daß bedeutet, es gilt näherungsweise

$$Z_R \approx \rho_0 c \quad \text{falls} \quad r \gg \lambda \quad (5.2.29)$$

Diese Erkenntnis ist für die Praxis von großem Nutzen. Sie besagt, daß die Verhältnisse in Kugelwellen denen in ebenen Wellen entsprechen, wenn man sich – relativ zur

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

Wellenlänge – weit entfernt von Ursprung befindet. Dort ist die akustische Impedanz gleich dem Wellenwiderstand in der ebenen Welle, und Druck und Schnelle sind in Phase.

Vollständigkeithalber wird hier auch noch der andere Grenzfall betrachtet. Es ergibt sich

$$Z_R \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow 0 \quad (5.2.30)$$

Dies verdeutlicht, daß die Singularität im Schnellefeld ($1/r^2$) stärker als die im Druckfeld ist. Rein formal könnte man auch den Ursprung als schallweich ansehen.

Randbedingung

Nachdem die kugelsymmetrische Lösung der Wellengleichung eingehend untersucht wurde, soll schließlich noch die Lösung an die zu Beginn vorgegebene Randbedingung angepaßt werden. Die Oberfläche der Kugel bewegt sich nach (5.2.1) mit der Geschwindigkeit

$$u_s(t) = \frac{\partial R_K}{\partial t}(t) = i\omega\varepsilon e^{i\omega t} \quad (5.2.31)$$

in radialer Richtung. Die Geschwindigkeit kann in der Form

$$u_s(t) = \hat{u}_s e^{i\omega t} \quad (5.2.32)$$

mit der komplexen Amplitude

$$\hat{u}_s = i\omega\varepsilon \quad (5.2.33)$$

geschrieben werden. Die atmende Kugel stellt eine Randbedingung an das Schnellefeld. Exakterweise müßte die radiale Schnelle u'_R am momentanen Kugelradius $R_K(t)$ der Geschwindigkeit der Oberfläche u_s entsprechen. Analog zur Anregung von ebenen Wellen durch einen bewegten Kolben wird auch hier die vereinfachte Version der Randbedingung – wie in Abschnitt 3.1 vorgestellt – angewendet. Die Geschwindigkeit der Oberfläche wird nicht am momentanen Radius sondern am mittleren Radius angenommen. Daß bedeutet, an der Stelle $r = a$ soll die Geschwindigkeit u'_R des Mediums mit der Oberflächengeschwindigkeit u_s übereinstimmen:

$$u'_R(a, t) = u_s(t) \quad (5.2.34)$$

Diese vereinfachte Randbedingung ist eine gute Approximation, falls die Auslenkung klein gegenüber der Wellenlänge ist. Es gilt

$$u'_R(a, t) = \hat{u}_R(a) e^{i\omega t} \quad (5.2.35)$$

Damit muß für die komplexe Amplitude bei $r = a$ die Beziehung

$$\hat{u}_R(a) = \hat{u}_s = i\omega\varepsilon \quad (5.2.36)$$

erfüllt sein. Mit (5.2.21) folgt daraus

$$\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{a}\right) \frac{A}{a} e^{-ika} = i\omega\varepsilon \quad (5.2.37)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Dies kann nach der unbekanntenen Größe A aufgelöst werden. Man erhält

$$A = \frac{i\omega\varepsilon a e^{ika}}{\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\varepsilon a c e^{ika}}{\left(1 - i\frac{c}{\omega a}\right)} \quad (5.2.38)$$

Der Betrag der Größe A legt die Stärke des Schallfeldes fest. Es ergibt sich wie erwartet ein linearer Zusammenhang zwischen der Auslenkung der Kugeloberfläche ε und der Stärke $|A|$. Die Abhängigkeit der Stärke vom Kugelradius a ist komplizierter. Der e^{ika} -Term ist nur für die Phase wichtig. Der Faktor $c/(\omega a) = \lambda/(2\pi a)$ spielt dagegen eine entscheidende Rolle für die Stärke. Für eine relativ große Kugel im Sinne von $a \gg \lambda$ ist der Imaginärteil des Nenners in (5.2.38) vernachlässigbar. Die Stärke ändert sich dann nahezu linear mit dem Radius. Bei einer relativ kleinen Kugel ($a \ll \lambda$) ist die Situation anders. In diesem Fall ist der Imaginärteil im Nenner dominant, und die Stärke A ist näherungsweise proportional zu a^2 . Eine kleine atmende Kugel strahlt anscheinend relativ ineffizient Schall ab.

Beispielaufgabe

Die bisherigen Erkenntnisse über Druck und Schnelle in den Kugelwellen sollen jetzt auf ein konkretes Beispiel mit einer atmenden Kugel angewendet werden. Die atmende Kugel kann als ein perfekter Kugellautsprecher angesehen werden. Es sei ein solcher Kugellautsprecher mit einem Radius von $a = 0.25$ m gegeben. Mit diesem Lautsprecher soll in 30 m Entfernung vom Mittelpunkt ein Schalldruckpegel von 110 dB bei den Frequenzen 10 kHz, 1 kHz und 50 Hz erzeugt werden. Beantwortet werden sollen die beiden Fragen:

- Wie groß muß die maximale Auslenkung $|\varepsilon|$ der Kugeloberfläche sein, um die geforderte Lautstärke zu erreichen?
- Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle an der Kugeloberfläche bei den drei Frequenzen?

Zuerst wird der Pegel in einen Effektivwert umgerechnet. Es ergibt sich

$$L_p = 110 \text{ dB} \quad \leftrightarrow \quad p_{\text{rms}} = 6.32 \text{ Pa} \quad (5.2.39)$$

Bei einer harmonischen Schwingung ist die maximale Auslenkung immer um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als der Effektivwert. Damit kann der Betrag der komplexen Amplitude in 30 m Entfernung berechnet werden. Es gilt

$$|\hat{p}(30 \text{ m})| = \sqrt{2} \cdot 6.32 \text{ Pa} = 8.93 \text{ Pa} \quad (5.2.40)$$

Im folgenden werden nur die Beträge der Größen betrachtet. Dies reicht völlig aus, um die Frage a) zu beantworten.

Es wird von einem Druckfeld mit einer komplexen Amplitude nach (5.2.13) ausgegangen. Zweckmäßigerweise wird

$$\hat{p}(r) = \frac{B}{r} e^{-ikr} \quad (5.2.41)$$

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

geschrieben, wobei die komplexe Konstante

$$B = -i\omega\rho_0 A \quad (5.2.42)$$

eingeführt wurde. Es gilt

$$|\hat{p}| = \frac{|B|}{r} \quad (5.2.43)$$

Daraus ergibt sich

$$|B| = 30 \text{ m} \cdot 8.93 \text{ Pa} = 268.13 \text{ Pa} \cdot \text{m} \quad (5.2.44)$$

Damit kann der Betrag der Schalldruckamplitude an der Kugel berechnet werden. Es folgt

$$|\hat{p}(0.25 \text{ m})| = \frac{|B|}{0.25 \text{ m}} = 1072.52 \text{ Pa} \quad (5.2.45)$$

Dieser Wert entspricht einem Pegel von etwa 155 dB und soll durch das Pulsieren der Kugel erzeugt werden.

Aus (5.2.36) folgt für die Schnelleamplitude

$$|\hat{u}_R(a)| = \omega |\varepsilon| \quad (5.2.46)$$

Bildet man den Betrag auf beiden Seiten von Gleichung (5.2.22) folgt

$$|\hat{u}_R| = \frac{1}{\rho_0 c} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega r}\right)^2} |\hat{p}| \quad (5.2.47)$$

Damit kann schließlich die Auslenkung der Oberfläche in Abhängigkeit der Druckamplitude an der Oberfläche ausgedrückt werden. Es ergibt sich

$$|\varepsilon| = \frac{|\hat{u}_R(a)|}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\rho_0 c} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega a}\right)^2} |\hat{p}(a)| \quad (5.2.48)$$

Um $|\varepsilon|$ zu berechnen, ist nur der Betrag der Druckamplitude erforderlich. Die Tabelle 5.2 faßt das Ergebnis für die drei Frequenzen zusammen. In allen Fällen bleibt die maximale Auslenkung klein gegenüber der Wellenlänge, so daß die Anwendung der Randbedingung (5.2.36) nachträglich gerechtfertigt wird.

Um die Frage b) zu beantworten, werden die komplexen Amplituden von Druck und Schnelle betrachtet. Das Verhältnis zwischen den Amplituden ist durch die radiale Impedanz Z_R nach (5.2.25) gegeben. In bestimmten Fällen ist es zweckmäßiger statt der Impedanz deren Kehrwert zu betrachten. Der Kehrwert wird als Admittanz bezeichnet.

Dieser Begriff ist nicht ganz so gebräuchlich wie die Impedanz. Jedoch bietet es sich in unserem Fall an, die radiale Admittanz mit

$$Y_R \equiv \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{\rho_0 c} \left[1 - i \frac{c}{\omega r} \right] \quad (5.2.49)$$

einzuführen. Es gilt dann

$$\hat{u}_R = Y_R \hat{p} \quad (5.2.50)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

$f = \frac{\omega}{2\pi}$	$\frac{c}{\omega a}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega a}\right)^2}$	$ \hat{u}_R(a) $	$ \varepsilon $
10 kHz	0.0216	1.00023	2.62 m/s	$4.18 \cdot 10^{-5}$ m
1 kHz	0.2164	1.023	2.689 m/s	$4.28 \cdot 10^{-4}$ m
50 Hz	4.329	4.44	11.679 m/s	0.037 m

Tabelle 5.2.: Ergebnisse für die atmende Kugel bei verschiedenen Frequenzen

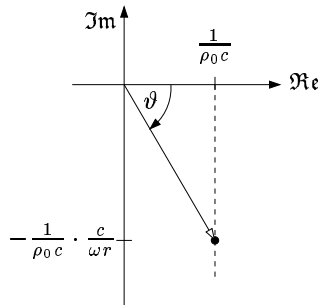


Abbildung 5.2.: Verlauf der radialen Admittanz Y_R bei Variation der Frequenz (gestrichelte Kurve)

Der komplexe Faktor Y_R bestimmt den Phasenwinkel zwischen \hat{u}_R und \hat{p} . Ist Y_R reell, so sind Druck und Schnelle in Phase. Dies ist näherungsweise gegeben, wenn

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{\lambda}{2\pi r} \ll 1 \quad (5.2.51)$$

erfüllt ist. Es gilt dann

$$Y_R \approx \frac{1}{\rho_0 c} \quad (5.2.52)$$

Der Realteil von Y_R ist unabhängig von Frequenz und Abstand. Der Imaginärteil geht gegen $-\infty$ für steigendes $c/(\omega r)$. Die Situation ist in der Abbildung 5.2 veranschaulicht. Formal kann die komplexe Admittanz mit Betrag und Phase als

$$Y_R = |Y_R| \cdot e^{-i\vartheta} \quad (5.2.53)$$

dargestellt werden. Der Winkel ϑ liegt zwischen 0 und 90 Grad. Entsprechend hat nach (5.2.50) der Druck einen Phasenvorsprung vor der Schelle. Man sagt, der Druck eilt der Schnelle voraus. Für die Phasenverschiebung gilt

$$\tan \vartheta = \frac{c}{\omega r} \quad (5.2.54)$$

5.3. Kausalität und Sommerfeld's Ausstrahlbedingung

Damit kann der Winkel mit

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{c}{\omega r}\right) \quad (5.2.55)$$

berechnet werden. Für die drei gegebenen Frequenzen f ergeben sich an der Kugeloberfläche bei $r = 0.25$ m die Werte in der Tabelle 5.3. Bei 10 kHz ist die Wellenlänge

f	ϑ
10 kHz	1.23°
1 kHz	12.21°
50 Hz	76.99°

Tabelle 5.3.: Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle für die betrachteten Frequenzen

wesentlich kleiner als der Kugelradius. Das Verhältnis zwischen Druck und Schnelle an der Kugeloberfläche entspricht näherungsweise der Situation in einer ebenen Welle, in der Druck und Schelle in Phase sind ($\vartheta = 0$). Bei 1 kHz ist die Wellenlänge in der Größenordnung des Kugelradius und eine merkliche Abweichung von der ebenen Welle festzustellen. Bei 50 Hz liegt bereits eine erhebliche Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle vor. Die Situation ist völlig anders als in einer ebenen Welle.

5.3. Kausalität und Sommerfeld's Ausstrahlbedingung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde nur die nach außen laufende harmonische Kugelwelle betrachtet. Jedoch ist neben (5.2.9) auch mit dem Ansatz

$$\phi = \frac{A}{r} e^{i\omega(t+r/c)} \quad (5.3.1)$$

eine Lösung gegeben, die bei entsprechender Wahl von A die Randbedingung an der Kugeloberfläche erfüllt. Die Lösung (5.3.1) stellt eine Kugelwellen dar, die aus dem Unendlichen kommend auf die Kugeloberfläche zuläuft und dort eine Schnellebewegung entsprechend der Auslenkung der Kugeloberfläche bewirkt. Formal ist dies eine Lösung des Randwertproblems. Die ankommenden Wellen existieren schon unendlich lange. In den Wellen ist daher schon vorher die Information enthalten, wie sich die Kugeloberfläche zu einem bestimmten Zeitpunkt bewegt.

Es ist denkbar, daß das Atmen der Kugel mit einem Schalter ein- und ausgeschaltet werden kann. Die ankommenden Wellen müßten dann vorher "wissen", wann die Kugel eingeschaltet wird. Das ist natürlich in der Praxis nicht möglich, und daher ist die nach innen laufende Kugelwelle nach (5.3.1) keine physikalische sinnvolle Lösung des Randwertproblems. Man sagt sie verletzt das Kausalitätsprinzip. Würde man das Problem nicht analytisch lösen, sondern die Lösung einschließlich des Einschaltvorganges numerisch simulieren, so würde sich selbstverständlich nur die physikalisch sinnvolle Lösung – nämlich die nach außen laufende Kugelwelle – ergeben.

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Anscheinend erhält man die unphysikalischen Lösungen nur dadurch, daß man sich auf harmonische Lösungen beschränkt hat und die Einschwingvorgänge außer acht läßt. Die Problematik soll im folgenden verdeutlicht werden. Die Wellengleichung für das akustische Potential lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (5.3.2)$$

Beschränkt man sich auf harmonische Lösungen, so kann ein Ansatz der Form

$$\phi = \varphi e^{i\omega t} \quad (5.3.3)$$

verwendet werden. Dabei ist $\varphi(\vec{x})$ die komplexe Amplitude des Potentials. Setzt man (5.3.3) in (5.3.2) ein ergibt sich

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \varphi e^{i\omega t} - \Delta \varphi e^{i\omega t} = 0 \quad (5.3.4)$$

Daraus folgt eine Bestimmungsgleichung für die komplexe Amplitude

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (5.3.5)$$

Diese Gleichung wird in der Literatur auch als Helmholtz-Gleichung bezeichnet.

Sucht man rein formal die Lösungen von (5.3.5) und leitet daraus Lösungen von (5.3.2) ab, so werden eventuell auch unphysikalische Lösungen gefunden, die das Kausalitätsprinzip verletzen. Man könnte das Problem umgehen, indem man immer die Einschwingvorgänge mit berücksichtigt und (5.3.2) löst. In der Praxis sind jedoch oft nur die eingeschwingenen harmonischen Lösungen von Interesse. Lösungen von (5.3.5) sind auch meist wesentlich einfacher zu ermitteln, als Lösungen, die den kompletten Einschwingvorgang mit beinhalten. Es ist daher sinnvoll ein Kriterium zu formulieren, daß die unphysikalischen von den sinnvollen Lösungen unterscheidet.

In dem bisher betrachteten einfachen kugelsymmetrischen Beispiel, war die Situation anschaulich klar. Jedoch können bei komplizierteren Randbedingungen die Lösungen komplexer und unanschaulicher werden. Von Sommerfeld wurde daher die sogenannte Ausstrahlbedingung vorgeschlagen. Nur Lösungen, die

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} = 0 \quad (5.3.6)$$

erfüllen, sind physikalisch sinnvoll. Die Bedingung gilt natürlich nur für die Abstrahlung von Wellen im offenen Raum. Zum Beispiel ist für die Betrachtung im Inneren einer atmenden Kugel natürlich auch die nach innen laufende Welle im Lösungsansatz mit zu berücksichtigen.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß eine nach außen laufende Kugelwelle mit

$$\phi(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} \quad (5.3.7)$$

auch tatsächlich die Ausstrahlbedingung (5.3.6) erfüllt. Dabei ist $f(\xi)$ eine beliebige Funktion, die die Form der Welle festlegt. Das Argument hängt mit $\xi = r - ct$ vom Ort und Zeit ab. Es gilt für die Zeitableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{c}{r} \frac{df}{d\xi} \quad (5.3.8)$$

Wegen $\partial \xi / \partial r = 1$ folgt für die räumliche Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f + \frac{1}{r} \frac{df}{d\xi} \quad (5.3.9)$$

Setzt man die beiden Ableitungen von ϕ in Gleichung (5.3.6) ein, so heben sich die Terme mit den Ableitungen $df/d\xi$ heraus. Aus (5.3.8) und (5.3.9) ergibt sich

$$r \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} = r \left\{ -\frac{f}{r^2} \right\} = -\frac{f}{r} \quad (5.3.10)$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $r \rightarrow \infty$. Damit wird die Ausstrahlbedingung (5.3.6) tatsächlich von Lösung (5.3.7) erfüllt. Entsprechend kann gezeigt werden, daß der Ansatz (5.3.1) die Ausstrahlbedingung nicht erfüllt.

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer in (5.3.6) würde für eine künstliche Welle verschwinden, die ohne mit $1/r$ abzufallen sich wie eine ebene Welle in positive r -Richtung bewegt. Eine solche Welle hätte die Form

$$\phi = h(r - ct) \quad (5.3.11)$$

wobei h eine beliebige Funktion wäre. Der Ansatz (5.3.11) löst natürlich nicht die Wellengleichung. Entsprechend weichen die Kugelwellen von der künstlichen Welle ab, jedoch werden die Verhältnisse in den Kugelwellen mit steigendem Abstand immer ähnlicher zu dieser. Der Faktor $1/r$ ändert sich für große r immer langsamer, wenn r weiter ansteigt. Zusätzlich reduziert sich mit wachsendem r die Krümmung der Wellenfronten. Entsprechend verhält sich die Lösung (5.3.7) immer mehr wie eine ebene Welle. In Gleichung (5.3.10) wird sozusagen in der geschweiften Klammer die Abweichung zum ebenen Fall berechnet. Die Abweichung fällt mit r^2 nach außen ab.

5.4. Energie und Intensität

In Abschnitt 3.2 wurde die akustische Energie in eindimensionalen Wellen eingeführt. Die gesamten Überlegungen aus diesem Abschnitt lassen sich auch auf den dreidimensionalen Fall übertragen. Für die kinetische akustische Energie pro Volumen ergibt sich

$$e_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 \quad (5.4.1)$$

Im Unterschied zum eindimensionalen Fall tritt hier das Quadrat des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}'^2 \equiv |\vec{v}'|^2$ auf. Daß heißt, statt der skalaren Geschwindigkeit wird der

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Betrag der Geschwindigkeit eingesetzt. Die potentielle akustische Energie pro Volumen wird weiterhin mit

$$e_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \quad (5.4.2)$$

angenommen. Dies entspricht exakt der eindimensionalen Welle. Dagegen ist die akustische Intensität jetzt eine vektorielle Größe, die mit

$$\vec{I}_a = p' \vec{v}' \quad (5.4.3)$$

definiert ist. Der Vektor \vec{I}_a ist ein Energieflußdichtevektor. Für die akustische Energie gilt auch im dreidimensionalen eine Erhaltungsgleichung. Diese lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}}) + \text{div } \vec{I}_a = 0 \quad (5.4.4)$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \right) + \text{div} (p' \vec{v}') = 0 \quad (5.4.5)$$

Die Gültigkeit der Energieerhaltungsgleichung kann gezeigt werden, indem die Schelle und der Druck durch das akustischen Potential ausgedrückt wird. Setzt man

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi \quad (5.4.6)$$

und

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.4.7)$$

in (5.4.5) ein, so kann die Gleichung nach

$$\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right\} = 0 \quad (5.4.8)$$

umgeformt werden. Die Zwischenschritte dieser Umformung sind im Anhang B.2 gegeben. In der geschweiften Klammer in (5.4.8) steht der Wellengleichungsterm für das Potential. Entsprechen p' und \vec{v}' einer gültigen Lösung, so erfüllt auch das dazugehörige akustische Potential die Wellengleichung, und der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist gleich Null. Damit ist (5.4.8) erfüllt und die Richtigkeit von (5.4.4) beziehungsweise (5.4.5) gezeigt.

Intensität in der Kugelwelle

Bisher wurde allgemein der Energieerhaltungssatz im dreidimensionalen Fall behandelt, und die Definition der akustischen Intensität erweitert. Im folgenden sollen die Erkenntnisse auf die Kugelwellen angewendet werden. Zweckmäßigerweise definiert man die radiale Intensität mit

$$I_R = \vec{I}_a \cdot \frac{\vec{x}}{r} \quad (5.4.9)$$

Dabei ist

$$\frac{\vec{x}}{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (5.4.10)$$

der nach außen zeigende Einheitsvektor am Ort \vec{x} . Es ergibt sich für die radiale Intensität

$$I_{\text{R}} = p' \vec{v}' \frac{\vec{x}}{r} = p' u'_{\text{R}} \quad (5.4.11)$$

Als Beispiel soll die Intensität für den in Abschnitt 5.2 vorgestellten Fall der atmenden Kugel berechnet werden. Das Schalldruckfeld und die Schnelle können in der komplexen Schreibweise mit

$$p'(r, t) = \hat{p}(r) e^{i\omega t} \quad (5.4.12)$$

und

$$u'_{\text{R}}(r, t) = \hat{u}_{\text{R}}(r) e^{i\omega t} \quad (5.4.13)$$

dargestellt werden. Bei den Gleichungen (5.4.12) und (5.4.13) ist implizit die Realteilbildung auf der rechten Seite enthalten, obwohl sie nicht hingeschrieben wird. Dies ist beim Einsetzen von in (5.4.11) unbedingt zu beachten. Vor der Multiplikation der komplexen Ausdrücke müssen die Realteile gebildet werden. Für die radiale Intensität folgt

$$I_{\text{R}} = \Re\{\hat{p} e^{i\omega t}\} \cdot \Re\{\hat{u}_{\text{R}} e^{i\omega t}\} \quad (5.4.14)$$

Nach (5.2.13) ist in der Kugelwelle die komplexe Druckamplitude \hat{p} nur vom Abstand r abhängig. Es kann

$$\hat{p}(r) = \frac{B}{r} e^{-ikr} \quad (5.4.15)$$

geschrieben werden. Dabei ist B eine komplexe Konstante, die Stärke und Phase des Druckfeldes festlegt. Schreibt man

$$B = |B| e^{i\sigma} \quad (5.4.16)$$

so ist durch $|B|$ die Stärke und durch σ die Phase bestimmt. Um die Berechnung der Intensität zu vereinfachen, wird die komplexe Druckamplitude in der Form

$$\hat{p} = \frac{|B|}{r} e^{i\sigma} e^{-ikr} = \frac{|B|}{r} e^{-i\psi} \quad (5.4.17)$$

dargestellt. Dabei wurde zusätzlich die Abkürzung

$$\psi = kr - \sigma \quad (5.4.18)$$

eingeführt. Für den Schalldruck ergibt sich

$$p' = \Re\{\hat{p} e^{i\omega t}\} = \Re\left\{\frac{|B|}{r} e^{i(\omega t - \psi)}\right\} \quad (5.4.19)$$

Der reelle Faktor kann aus der Realteilbildung herausgezogen werden. Man erhält

$$p' = \frac{|B|}{r} \Re\{e^{i(\omega t - \psi)}\} \quad (5.4.20)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Schließlich kann die Realteilbildung ausgeführt werden. Für die Exponentialfunktion gilt die allgemeine Beziehung

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (5.4.21)$$

Es folgt damit

$$p' = \frac{|B|}{r} \cos(\omega t - \psi) \quad (5.4.22)$$

Diese einfache Form ergibt sich nur, weil in (5.4.17) der Faktor $e^{i\sigma}$ geschickt abgespalten wurde.

Im nächsten Schritt muß ein reeller Ausdruck für u'_R gefunden werden. Dazu wird die komplexe Amplitude der Schnelle betrachtet. Verwendet man die radiale Admittanz Y_R nach (5.2.49), so ergibt sich

$$\hat{u}_R = Y_R \hat{p} = Y_R \frac{|B|}{r} e^{-i\psi} \quad (5.4.23)$$

Für die radiale Schnelle folgt

$$u'_R = \Re\{\hat{u}_R e^{i\omega t}\} = \Re\left\{Y_R \frac{|B|}{r} e^{i(\omega t - \psi)}\right\} = \frac{|B|}{r} \Re\{Y_R e^{i(\omega t - \psi)}\} \quad (5.4.24)$$

Es muß der Realteil von dem Ausdruck

$$Y_R e^{i(\omega t - \psi)} = \left[\Re\{Y_R\} + i \Im\{Y_R\}\right] \cdot \left[\cos(\omega t - \psi) + i \sin(\omega t - \psi)\right] \quad (5.4.25)$$

bestimmt werden. Multipliziert man die rechte Seite aus, dann ergeben sich zwei reelle und zwei komplexe Summanden. Für den Realteil sind nur die Reellen wichtig. Es folgt

$$\Re\{Y_R e^{i(\omega t - \psi)}\} = \Re\{Y_R\} \cos(\omega t - \psi) - \Im\{Y_R\} \sin(\omega t - \psi) \quad (5.4.26)$$

und damit

$$u'_R = \frac{|B|}{r} \left[\Re\{Y_R\} \cos(\omega t - \psi) - \Im\{Y_R\} \sin(\omega t - \psi) \right] \quad (5.4.27)$$

Mit (5.4.22) und (5.4.27) sind die beiden Schwankungsgrößen durch rein reelle Ausdrücke gegeben. Für die radiale Intensität ergibt sich durch Multiplikation

$$I_R = p' u'_R = \frac{|B|^2}{r^2} \left[\Re\{Y_R\} \cos^2(\omega t - \psi) - \Im\{Y_R\} \cos(\omega t - \psi) \sin(\omega t - \psi) \right] \quad (5.4.28)$$

In der eckigen Klammer tritt das Produkt von Sinus und Cosinus eines Arguments auf. Dies kann mit Hilfe der allgemeinen Beziehung

$$\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \quad (5.4.29)$$

in einen einfachen Sinus-Ausdruck umgewandelt werden. Für die radiale Admittanz gilt

$$Y_R = \frac{1}{\rho_0 c} \left[1 - i \frac{c}{\omega r} \right] \quad (5.4.30)$$

Daraus folgt für den Realteil

$$\Re\{Y_R\} = \frac{1}{\rho_0 c} \quad (5.4.31)$$

und den Imaginärteil

$$\Im\{Y_R\} = -\frac{1}{\rho_0 \omega r} \quad (5.4.32)$$

Setzt man diese beiden Teile in (5.4.28) ein, erhält man unter Berücksichtigung von (5.4.29) die Beziehung

$$I_R = \frac{|B|^2}{r^2 \rho_0 c} \cos^2(\omega t - \psi) + \frac{|B|^2}{2r^3 \rho_0 \omega} \sin(2\omega t - 2\psi) \quad (5.4.33)$$

Formal setzt sich die radiale Intensität aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Term ist immer positiv. Der zweite Summand wechselt das Vorzeichen mit der Zeit. Er oszilliert mit der doppelten Frequenz der Lösung.

In der Praxis ist oft nur die zeitlich gemittelte Intensität von Bedeutung. Bildet man den Mittelwert, so liefert der zweite Summand in (5.4.33) keinen Beitrag. Der Mittelwert des \cos^2 -Terms ist $1/2$. Es ergibt sich

$$\langle I_R \rangle = \frac{|B|^2}{2r^2 \rho_0 c} \quad (5.4.34)$$

Der zeitliche Mittelwert beschreibt die effektiv abgestrahlte Leistung. Der zweite Summand in (5.4.33) beschreibt die sogenannte Blindleistung. Ihr Momentanwert kann die mittlere Leistung weit übersteigen. Die Amplitude des zweiten Terms kann als Produkt

$$\frac{|B|^2}{2r^3 \rho_0 \omega} = \frac{|B|^2}{2r^2 \rho_0 c} \left(\frac{c}{\omega r} \right) = \langle I_R \rangle \left(\frac{c}{\omega r} \right) \quad (5.4.35)$$

geschrieben werden. Das Verhältnis zwischen der Amplitude der Blindleistung pro Fläche und der mittleren Intensität ist durch den Faktor

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (5.4.36)$$

gegeben. Dieser Faktor tritt schon im Ausdruck (5.4.30) für die radiale Admittanz auf. Er legt das Verhältnis zwischen Real- und Imaginärteil und damit gemäß (5.2.54) auch die Phasenverschiebung ϑ zwischen Druck und radialer Schnelle fest. Wie die Phasenverschiebung sich auf den Intensitätsverlauf auswirkt, ist in Abbildung 5.3 an drei Fällen veranschaulicht. Im Fall a) ist Druck und Schnelle in Phase. Dies entspricht dem Grenzfall $r \rightarrow \infty$. Entsprechend ist der Faktor in (5.4.36) und damit auch die Blindleistung gleich Null. Die Intensität ist immer positiv. Sie oszilliert mit der doppelten Frequenz. Je dichter man sich am Ursprung befindet, umso größer wird die Phasenverschiebung. Im Fall b) ist gerade eine Verschiebung von 45° dargestellt. Dies entspricht einem Abstand, für den $c/(\omega r) = 1$ gilt. Die Intensität wird zeitweise negativ. Schließlich ist im Fall c) die Situation bei einer Verschiebung von 90° gezeigt. Dies entspricht dem Grenzfall $r \rightarrow 0$. Dann wird der Faktor in (5.4.36) unendlich

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

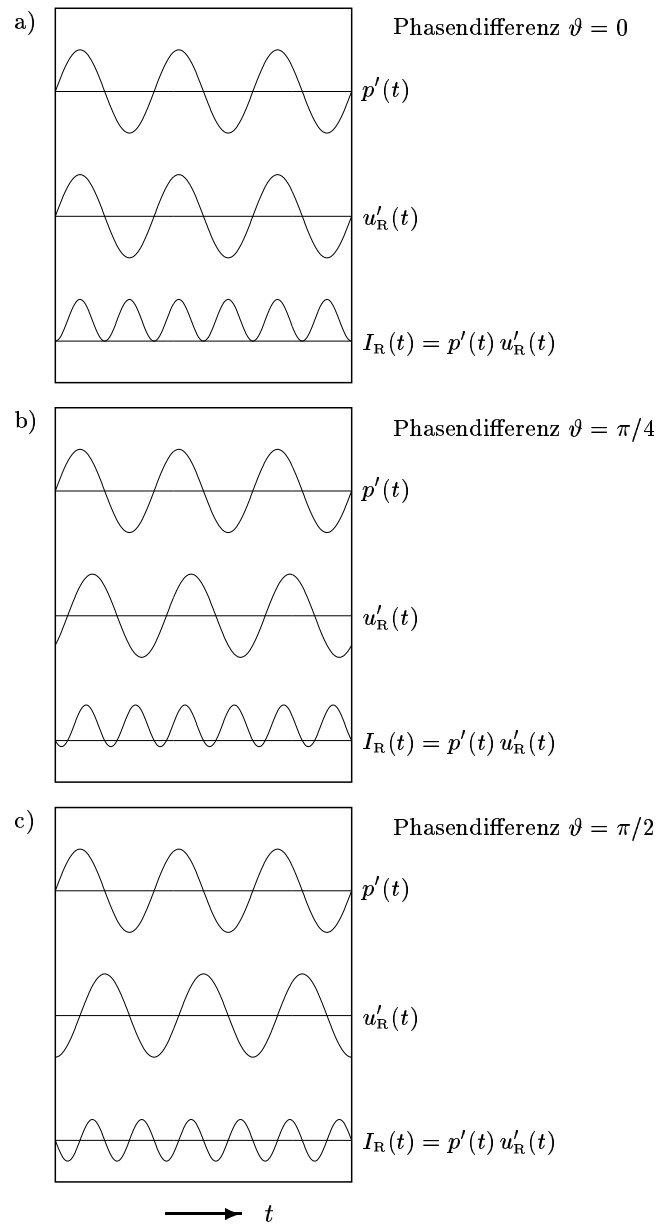


Abbildung 5.3.: Zur Veranschaulichung der Intensität bei Phasenverschiebung

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

groß. Entsprechend ist die mittlere Intensität gleich Null. Es ergibt sich eine reine Blindleistung.

Der Faktor in (5.4.36) ist klein, falls

$$r \gg \lambda \quad (5.4.37)$$

gilt. Wenn man sich relativ zur Wellenlänge weit entfernt vom Zentrum der Kugelwelle befindet, dann ist die Blindleistung verschwindend gering gegenüber der effektiven Wirkleistung. Dagegen überwiegt die Blindleistung an Stellen, wo $\lambda > 2\pi r$ gilt. In der nach außen laufenden Kugelwelle tritt dort periodisch eine starke negative radiale Intensität auf. Die akustische Energie "pendelt" sozusagen im Schallfeld hin und her.

Der Bereich, in dem die Bedingung (5.4.37) gilt, wird Fernfeld genannt. Entsprechend befindet man sich im Nahfeld, wenn (5.4.37) nicht erfüllt ist. Im Fernfeld ist die Situation mit der in der ebenen Welle vergleichbar.

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Im Abschnitt 5.2 wurde das Schallfeld einer atmenden Kugel behandelt. Im folgenden wird der etwas kompliziertere Fall der vibrierenden Kugel vorgestellt. Mit dem Ausdruck "vibrierende Kugel" ist eine periodisch hin- und herbewegte Kugel gemeint. Das Problem ist nun nicht mehr kugelsymmetrisch, wie im Fall der atmenden Kugel.

Betrachtet wird eine starre Kugel mit undurchlässiger Oberfläche. Ihr Radius wird mit a bezeichnet. Die Kugel schwingt in x_1 -Richtung hin und her. Die Bewegung ist harmonisch, d.h. sinusförmig. Der Mittelpunkt der Kugel bewegt sich auf der x_1 -Achse. Die mittlere Position des Kugelmittelpunktes befindet sich im Ursprung bei $\vec{x} = 0$ beziehungsweise $r = 0$. Die Bewegung ist in der Abbildung 5.4 veranschaulicht. Es ist ein

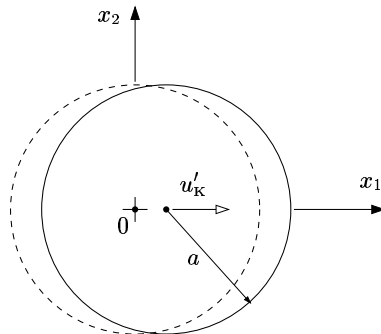


Abbildung 5.4.: Schematische Darstellung der vibrierenden Kugel mit Bewegung in x_1 -Richtung

Schnitt durch die Kugel dargestellt. Die Kugel in der mittleren Position ist gestrichelt eingezeichnet. Die Schnittebene ist die x_1, x_2 -Ebene. Das Problem ist rotationssymmetrisch im Bezug auf die x_1 -Achse. Daß heißt, das gleiche Bild würde sich auch in

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

der x_1, x_3 -Ebene ergeben. Die Geschwindigkeit der Kugel wird mit u'_k bezeichnet. Der Strich deutet an, daß es sich um eine kleine Geschwindigkeit im akustischen Sinne handeln soll. Daß heißt, die Geschwindigkeit soll klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit sein. Für die harmonische Bewegung gilt

$$u'_k(t) = \hat{u}_k e^{i\omega t} \quad (5.5.1)$$

Dabei ist \hat{u}_k eine komplexe Konstante, die Stärke und Phase der Bewegung festlegt.

Für die Randbedingung an das Schnellefeld sind mehrere Punkte zu beachten. Es darf kein Durchströmen der Kugeloberfläche geben, da die Kugel undurchlässig ist. Eine Bewegung des Fluids tangential zur Oberfläche ist jedoch erlaubt, weil keine Haftbedingung erfüllt werden muß. Es wird analog zu Abschnitt 3.1 eine vereinfachte Randbedingung verwendet. Die Schnelle wird nicht an der aktuellen Position der Kugeloberfläche vorgegeben, sondern an der mittleren Position bei $r = a$. Diese Näherung ist erlaubt, wenn die Auslenkung der Kugel klein gegenüber der Wellenlänge ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung $|u'_k| \ll c$.

Um eine formale Beschreibung der Randbedingung zu erhalten, wird ein kleines Element der Kugeloberfläche betrachtet. Da die Kugel starr ist, wird durch die Bewegung der Kugel mit u'_k in x_1 -Richtung auch das Element mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt. Die Komponente der Oberflächenbewegung in radialer Richtung muß mit der radialen Schnelle u'_R an dieser Stelle übereinstimmen. Andernfalls würde das Oberflächenelement durchströmt werden. Das Verhältnis von u'_k und u'_R an der Oberfläche hängt von der Position ab. Die Situation ist in Abbildung 5.5 veranschaulicht.

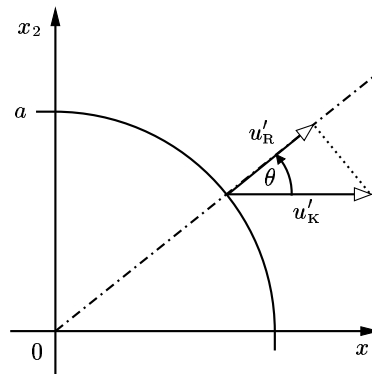


Abbildung 5.5.: Zur Berechnung der radialen Geschwindigkeit an der Kugeloberfläche

Im Gegensatz zum Fall der atmenden Kugel ist jetzt die radiale Schnelle auch von dem Winkel θ abhängig:

$$u'_R = u'_R(r, \theta, t) \quad (5.5.2)$$

Es bietet sich weiterhin die Darstellung in Kugelkoordinaten an. Aus Abbildung 5.5 ergibt sich für die radiale Schnelle an der Oberfläche der Zusammenhang

$$u'_R(a, \theta, t) = \cos \theta u'_k(t) \quad (5.5.3)$$

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Mit dem harmonischen Ansatz (5.5.1) folgt

$$u_{\text{r}}'(a, \theta, t) = \hat{u}_{\text{K}} \cos \theta e^{i\omega t} \quad (5.5.4)$$

Diese Beziehung stellt die Randbedingung an das Schnellefeld dar. Es stellt sich die Frage welche Lösung der Wellengleichung eine solche Randbedingung erfüllt. Dazu sind einige Punkte zu bemerken:

- Es werden nur harmonische Lösungen betrachtet, da die Randbedingung auch harmonisch ist. Für die exakte Randbedingung, bei der die Schnelle an der aktuellen Position vorgegeben wird, würde sich jedoch keine harmonische Lösung finden lassen. Dies wurde schon in Abschnitt 3.1 für den Kolben diskutiert. Bei der Vorgabe der Schnelle an der mittleren Position liefert eine harmonische Randbedingung auch harmonische Lösungen.
- Die Lösung soll die Ausstrahlbedingung von Sommerfeld erfüllen. Aus dem Unendlichen kommende Wellen, die "zufällig" die Randbedingung an der Kugeloberfläche erfüllen, werden nicht berücksichtigt.

Zur Darstellung der Lösung wird der Formalismus mit dem akustischen Potential verwendet. Die Lösung lautet

$$\phi = A \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \right\} \quad (5.5.5)$$

Führt man die Differentiation aus ergibt sich

$$\phi = -A \cos \theta \left(\frac{1}{r} + i \frac{\omega}{c} \right) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (5.5.6)$$

Weiter unten wird gezeigt, daß das diesem Potential entsprechende Schnellefeld tatsächlich die Randbedingung (5.5.4) erfüllt. Zuvor soll überprüft werden, ob (5.5.6) auch eine Lösung der Wellengleichung ist. Dazu wird zunächst ein allgemeines Prinzip vorgestellt.

Neue Lösungen der Wellengleichung durch Differenzieren

Ist ϕ_* eine Lösung der Wellengleichung, die

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_* - \Delta \phi_* = 0 \quad (5.5.7)$$

erfüllt, so ist auch

$$\phi = \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} \quad (5.5.8)$$

eine Lösung der Wellengleichung. Dies läßt sich leicht nachweisen, wenn man die Wellengleichung (5.5.7) nach x_1 differenziert. Es ergibt sich

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_* - \Delta \phi_* \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} \right\} - \Delta \left\{ \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} \right\} \quad (5.5.9)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer entspricht gerade ϕ . So folgt direkt

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \Delta \phi \quad (5.5.10)$$

Daß bedeutet, das Potential ϕ nach (5.5.8) erfüllt ebenfalls die Wellengleichung. Das Gleiche gilt übrigens für alle Ableitungen der Lösung ϕ_* sowohl nach einer Raumrichtung x_j als auch nach der Zeit t . Es ergibt sich eine allgemeine Regel:

Durch Differenzieren nach x_j oder t ergibt sich aus einer Lösung der Wellengleichung immer eine neue Lösung.

So lassen sich aus einer bekannten Lösung beliebig viele neue Lösungen herleiten.

Auch die Lösung (5.5.6) läßt sich durch differenzieren aus einer Ausgangslösung ϕ_* gewinnen. Und zwar wurde die entsprechende Lösung bereits im Abschnitt 5.2 behandelt. Das akustische Potential nach (5.2.9) beschreibt eine nach außen laufende harmonische Kugelwelle. Sie löst die Wellengleichung und erfüllt die Randbedingung an der Oberfläche einer atmenden Kugel. Diese Kugelwelle wird im weiteren mit

$$\phi_* = A \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (5.5.11)$$

als Ausgangslösung eingesetzt. Dieses Feld ist kugelsymmetrisch:

$$\phi_* = \phi_*(r, t) \quad (5.5.12)$$

Für die Ableitung nach x_1 folgt

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi_*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (5.5.13)$$

Dies würde deutlich komplizierter werden, wenn ϕ_* auch noch von θ abhängen würde. Der Abstand r ist mit

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \quad (5.5.14)$$

gegeben. Für die Ableitung von r ergibt sich

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} \quad (5.5.15)$$

Die Koordinate x_1 kann durch Kugelkoordinaten ausgedrückt werden. Es gilt

$$x_1 = r \cos \theta \quad (5.5.16)$$

Damit läßt sich die Ableitung auch als

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos \theta \quad (5.5.17)$$

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

darstellen. Setzt man (5.5.11) und (5.5.17) in (5.5.13) ein, folgt

$$\phi = \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ A \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \right\} \quad (5.5.18)$$

Jetzt braucht man nur noch die Konstante A vorziehen, und man erhält die angegebene Lösung (5.5.5). Daß bedeutet die Lösung für die hin- und herbewegte Kugel ergibt sich aus der Lösung für die atmende Kugel durch Differenzieren in der Bewegungsrichtung.

Das Schnellefeld

Bisher wurde gezeigt, daß die Lösung (5.5.5) beziehungsweise (5.5.6) die Wellengleichung erfüllt. Im folgenden muß noch überprüft werden, ob die angegebene Lösung tatsächlich auch der Randbedingung für die harmonisch hin- und herbewegte Kugel entspricht. Die Randbedingung ist eine Bedingung an das Schnellefeld. Die Schnelle wird aus dem Potential ϕ durch

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi \quad (5.5.19)$$

bestimmt. In dem vorliegenden Fall ist nur die radiale Schnelle von Bedeutung, denn nur sie kommt in den Randbedingung vor. Für die radiale Schnelle ergibt sich

$$u'_R = \vec{v}' \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \text{grad } \phi \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (5.5.20)$$

Diese Beziehung gilt allgemein für die Darstellung in Kugelkoordinaten und wurde auch schon bei der Betrachtung der atmenden Kugel verwendet. Dort ergab sich durch die Kugelsymmetrie eine von der Richtung unabhängige Schnelle. Hier erhält man jetzt aus (5.5.6) durch Differenzieren nach r eine vom Winkel θ abhängige radiale Schnelle mit

$$u'_R(r, \theta, t) = A \cos \theta \left(\frac{2}{r^3} + i \frac{2\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.5.21)$$

Die Randbedingung wird an der mittleren Position der Oberfläche bei $r = a$ vorgegeben. Es muß nun der komplexe Faktor A so gewählt werden, damit die durch (5.5.21) gegebene radiale Schnelle bei $r = a$ tatsächlich die Gleichung (5.5.4) erfüllt. Setzt man $r = a$ in (5.5.21) ein und vergleicht das Ergebnis mit (5.5.4), folgt

$$A \cos \theta \left(\frac{2}{a^3} + i \frac{2\omega}{ca^2} - \frac{\omega^2}{c^2 a} \right) e^{-i\omega(t-a/c)} = \hat{u}_K \cos \theta e^{-i\omega t} \quad (5.5.22)$$

Division durch die Faktoren $\cos \theta$ und $e^{i\omega t}$ liefert

$$A \left(\frac{2}{a^3} + i \frac{2\omega}{ca^2} - \frac{\omega^2}{c^2 a} \right) e^{-ika} = \hat{u}_K \quad (5.5.23)$$

Schließlich kann nach A aufgelöst werden. Es folgt

$$A = \frac{\hat{u}_K a^3 e^{ika}}{2 + 2i \left(\frac{\omega a}{c} \right) - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2} \quad (5.5.24)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Damit ist gezeigt, daß bei entsprechender Wahl von A die Randbedingung wirklich erfüllt wird. Das Ergebnis zeigt auch, wie die Stärke des Schallfeldes von dem Radius der Kugel a abhängt. Die Stärke ist durch $|A|$ bestimmt. Durch den komplexen Faktor \hat{u}_k ist die Bewegung der Kugel vorgegeben. Der Faktor

$$\frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (5.5.25)$$

legt fest, wie die Stärke des Schallfeldes von dem Radius a abhängt. Der Ausdruck e^{ika} spielt für den Betrag von A keine Rolle. Er geht lediglich in die Phase von A ein. Ebenso ist für die Stärke des Schallfeldes nur der Betrag von \hat{u}_k wichtig.

Ist der Kugelradius klein gegenüber der Wellenlänge λ , so ist der Faktor in (5.5.25) ebenfalls klein und der Nenner in (5.5.24) ist näherungsweise gleich 2. Daraus ergibt sich eine Abhängigkeit der Stärke mit der dritten Potenz vom Kugelradius. Daß bedeutet, die Erzeugung von Schallfeldern mit einer kleinen Kugel ist relativ ineffizient. Ist dagegen der Radius der Kugel groß gegenüber der Wellenlänge, so ist der Faktor in (5.5.25) groß. In diesem Fall dominiert das Quadrat des Faktors den Nenner in (5.5.24). Dann ist der Betrag von A linear mit dem Kugelradius a verknüpft. Für relativ große Kugeln ergibt also eine Verdoppelung des Durchmessers bei gleicher Bewegung ein doppelt so starkes Schallfeld. Ein ähnliche Abhängigkeit ergab sich auch im Abschnitt 5.2 für die atmende Kugel.

In Abbildung 5.6 soll die Lösung für die vibrierende Kugel veranschaulicht werden. Zum Vergleich ist im oberen Teil das ϕ -Feld einer atmenden Kugel nach (5.5.20) abgebildet. Im unteren Teil ist die Lösung nach (5.5.5) zu sehen. Dargestellt ist ϕ in einer Kreisscheibe um die Kugel in der x_1, x_2 -Ebene. Diese Ebene schneidet die Kugel in der Mitte. Die Darstellung ist pseudo-dreidimensional. In der dritten Dimension ist ϕ zu einem festen Moment aufgetragen. Die Lage der x_1 - und x_2 -Achsen ist mit dunklen Linien markiert. Die Lösung für die atmende Kugel ist kugelsymmetrisch. Entsprechend ergibt sich in jeder Richtung der gleiche Verlauf. Bei der vibrierenden Kugel ist das nicht der Fall. In der Richtung senkrecht zur x_1 -Achse – also senkrecht zur Bewegungsrichtung – ist ϕ gleich Null, da $\cos \theta$ dort verschwindet. Dies wird im unteren Teil von Abbildung 5.6 deutlich. In x_1 -Richtung breiten sich Wellen aus und in x_2 -Richtung ist keine Auslenkung zu beobachten. Auffällig ist auch, daß die in entgegengesetzter Richtung laufenden Wellen auch ein entgegengesetzte Phase besitzen.

Druckverteilung und radiale Impedanz

Bisher wurde lediglich das Potential ϕ und die radiale Schnelle u'_r betrachtet. Schließlich soll auch noch das Druckfeld untersucht werden. Dies ist wie die radiale Schelle auch richtungsabhängig. Das Druckfeld berechnet sich allgemein mit

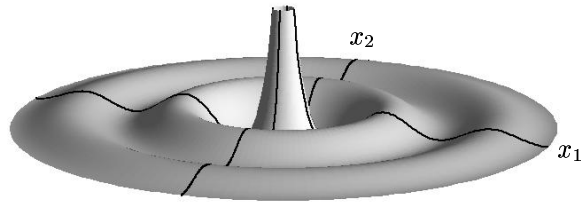
$$p'(r, \theta, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.5.26)$$

aus dem Potential. Für die Lösung (5.5.6) ergibt sich speziell

$$p'(r, \theta, t) = i\omega\rho_0 A \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{\omega}{rc} \right) e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.5.27)$$

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Atmende Kugel



Vibrierende Kugel

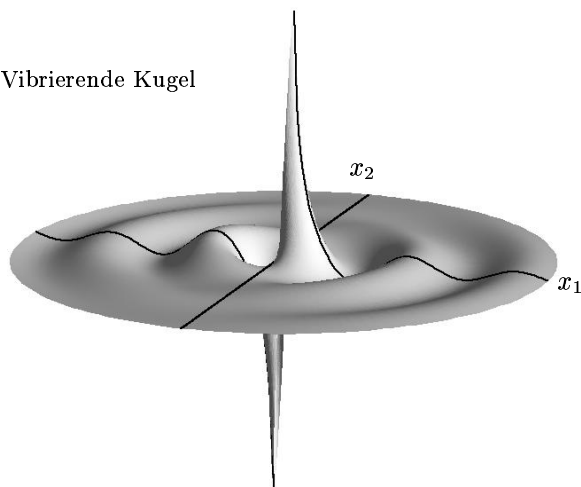


Abbildung 5.6.: Gegenüberstellung der ϕ -Felder für die atmende Kugel (oben) und die vibrierende Kugel (unten); dargestellt ist ϕ in der x_1, x_2 -Ebene; die vibrierende Kugel schwingt in x_1 -Richtung.

Sowohl für die radiale Schnelle als auch für den Druck lassen sich komplexe Amplituden \hat{u}_R beziehungsweise \hat{p} einführen. Damit kann das Schnellefeld mit

$$u'_r(r, \theta, t) = \hat{u}_R(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (5.5.28)$$

und das Druckfeld mit

$$p'(r, \theta, t) = \hat{p}(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (5.5.29)$$

dargestellt werden. Die komplexen Amplituden hängen vom Abstand r und vom Winkel θ ab. Durch Vergleich mit (5.5.21) und (5.5.27) können \hat{u}_R und \hat{p} einfach ermittelt

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

werden. Es ergibt sich

$$\hat{u}_R(r, \theta) = A \cos \theta \left(\frac{2}{r^3} + i \frac{2\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) e^{-ikr} \quad (5.5.30)$$

und

$$\hat{p}(r, \theta) = i\omega\rho_0 A \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{\omega}{rc} \right) e^{-ikr} \quad (5.5.31)$$

Analog zur atmenden Kugel kann dann eine radiale Impedanz als Quotient der komplexen Amplituden berechnet werden. Man erhält

$$Z_R \equiv \frac{\hat{p}}{\hat{u}_R} = \frac{\rho_0 \left(i \frac{\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{rc} \right)}{\frac{2}{r^3} + i \frac{2\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r}} \quad (5.5.32)$$

Zu bemerken ist, daß die radiale Impedanz Z_R nicht vom Winkel θ abhängt. Die $\cos \theta$ -Abhängigkeit von \hat{u}_R und \hat{p} fällt bei der Division heraus. Es ist lediglich

$$Z_R = Z_R(r) \quad (5.5.33)$$

Natürlich hängt Z_R auch noch von ρ_0 , c und ω ab, aber diese Parameter werden bei der weiteren Diskussion als konstant angenommen.

Die radiale Impedanz ist komplex wie im Fall der atmenden Kugel. Durch Erweitern mit rc^2/ω^2 auf der rechten Seite von (5.5.32) ergibt sich

$$Z_R = \rho_0 c \frac{i \left(\frac{c}{\omega r} \right) - 1}{2 \left(\frac{c}{\omega r} \right) + 2i \left(\frac{c}{\omega r} \right) - 1} \quad (5.5.34)$$

In dieser Form wird die Abhängigkeit der radialen Impedanz vom Abstand r etwas deutlicher. Entscheidend ist der Faktor

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (5.5.35)$$

Im Grenzfall für große Abstände r geht der Faktor gegen Null. Für den Limes der radiale Impedanz ergibt sich dann

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Z_R = \rho_0 c \quad (5.5.36)$$

Für große Abstände im Sinne von

$$r \gg \lambda \quad (5.5.37)$$

gilt also näherungsweise

$$Z_R \approx \rho_0 c \quad (5.5.38)$$

Dies entspricht auch dem Fall der atmenden Kugel. Im Fernfeld $r \gg \lambda$ ist die radiale Impedanz näherungsweise reell. Damit sind radiale Schnelle und Schalldruck in Phase. Das Verhältnis zwischen beiden entspricht dem in einer ebenen Welle. Dagegen wird für kleinere Abstände r , die nicht (5.5.37) erfüllen, die radiale Impedanz komplex. Daß heißt, es gibt eine nicht vernachlässigbare Phasenverschiebung zwischen Druck und radialer Schnelle.

Kraft auf die Kugel

Die Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle bewirkt eine Blindleistung im Nahfeld, wie im Fall der atmenden Kugel. In Abschnitt 5.4 wurde die Intensität in dem Schallfeld der atmenden Kugel untersucht. Die abgestrahlte Leistung ergibt sich dann durch Integration über eine geschlossene Fläche um die Kugel. Im Fall der vibrierenden Kugel kann die abgestrahlte Leistung aus der zur Bewegung notwendigen Kraft abgeleitet werden. Diese Kraft kompensiert die durch die unsymmetrische Druckverteilung auf der Kugeloberfläche entstehende Kraft. Sie stellt damit die Gegenkraft zur Druckkraft dar. Zunächst soll diese Kraft berechnet werden.

Der Druck auf der Oberfläche läßt sich formal mit

$$p'(a, \theta, t) = \hat{p}(a, \theta) e^{i\omega t} \quad (5.5.39)$$

darstellen. Für die Bewegung ist nur die Kraftkomponente in x_1 -Richtung wichtig. Diese ergibt sich durch Integration des Drucks über die Oberfläche S der Kugel. Dabei braucht nur der Schalldruck berücksichtigt werden. Das Integral des Gleichanteils p_0 über die Oberfläche ist gleich Null. Die Druckkraft auf einem infinitesimalen Flächenelement dS bewirkt eine Kraft in radialer Richtung. Die x_1 -Komponente dieser Kraft ist durch Multiplikation mit $\cos \theta$ gegeben. Es ergibt sich für die zur Bewegung notwendige Kraft

$$F_1(t) = \int_S \cos \theta p'(a, \theta, t) dS \quad (5.5.40)$$

Im folgenden werden die beiden Punkte, an denen die x_1 -Achse die Kugeloberfläche durchstößt, als Pole bezeichnet. Eine positive Druckstörung an dem Pol auf der positiven Halbachse bei $\theta = 0$ bewirkt eine Kraft entgegen der x_1 -Richtung – also eine negative Kraft auf die Kugel. Diese muß durch eine positive Gegenkraft ausgeglichen werden. Druckstörungen an dem Äquator der Kugel bei $\theta = \pi/2$ ergeben keinen Anteil in x_1 -Richtung.

Mit Hilfe der radialen Impedanz läßt sich der Druck auf der Oberfläche in der Form

$$p'(a, \theta, t) = \hat{u}_R(a, \theta) Z_R(a) e^{i\omega t} \quad (5.5.41)$$

schreiben. Aus der Randbedingung (5.5.4) folgt für die komplexe Amplitude \hat{u}_R bei $r = a$ die Beziehung

$$\hat{u}_R(a, \theta) = \hat{u}_K \cos \theta \quad (5.5.42)$$

Damit ergibt sich für den Druck

$$p'(a, \theta, t) = \hat{u}_K \cos \theta Z_R(a) e^{i\omega t} \quad (5.5.43)$$

Die Winkelabhängigkeit des Drucks $p'(a, \theta, t)$ steckt in dem $\cos \theta$ -Term. Wird (5.5.43) auf der rechten Seite von (5.5.40) eingesetzt, können alle Terme, die nicht von θ abhängen und damit überall auf der Oberfläche S konstant sind, aus dem Integral herausgezogen werden. Es ergibt sich

$$F_1(t) = \hat{u}_K Z_R(a) e^{i\omega t} \int_S \cos^2 \theta dS \quad (5.5.44)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Das verbleibende Integral läßt sich nach Parametrisierung der Oberfläche mit den Kugelkoordinaten θ und β einfach berechnen. Man erhält

$$\int_S \cos^2 \theta \, dS = \frac{4}{3} \pi a^2 \quad (5.5.45)$$

Zweckmäßigerweise wird auch die Kraft F_1 in komplexer Schreibweise mit

$$F_1(t) = \hat{F}_1 e^{i\omega t} \quad (5.5.46)$$

dargestellt. Die komplexe Amplitude \hat{F}_1 ist durch die Vorfaktoren in (5.5.44) gegeben. Es gilt

$$\hat{F}_1 = \frac{4}{3} \pi a^2 \hat{u}_K Z_R(a) \quad (5.5.47)$$

Leistung der vibrierenden Kugel

Die an der Kugel vollbrachte Leistung berechnet sich nach

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Kraft} \times \text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad (5.5.48)$$

aus dem Produkt von Kraft und Geschwindigkeit. Für die Geschwindigkeit der Kugel gilt

$$u'_K(t) = \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.49)$$

Bei der Berechnung der Leistung ist wieder die korrekte Realteilbildung zu beachten. Vereinbarungsgemäß ist implizit in dem Gleichheitszeichen in (5.5.46) und (5.5.49) die Realteilbildung enthalten. Daher muß die Leistung, die mit P bezeichnet wird, nach

$$P(t) = \Re\{\hat{F}_1 e^{i\omega t}\} \cdot \Re\{\hat{u}_K e^{i\omega t}\} \quad (5.5.50)$$

berechnet werden. Im Fall der atmenden Kugel wurde die radiale Intensität mit Hilfe der Gleichung (5.4.14) berechnet. Auch dort wurde ein Produkt von zwei Realteilen gebildet. Anschließend wurde durch Integration über die Kugeloberfläche aus der Intensität die Leistung bestimmt. Hier wurde dagegen die Integration bereits vor der Produktbildung durchgeführt.

Wie im Fall der atmenden Kugel kann die Leistung in einen Blindanteil, der im zeitlichen Mittel verschwindet, und einen Wirkanteil zerlegt werden. Das Verhältnis von Blind- und Wirkleistung ist durch die Phasenverschiebung zwischen der Kraft und der Geschwindigkeit gegeben. Sind die Größen in Phase, dann besitzen beide Realteile in (5.5.50) immer das gleiche Vorzeichen. Damit ist $P(t)$ für alle Zeiten positiv, und der Blindanteil ist gleich Null. Bei einer Phasenverschiebung um 90° wechselt das Vorzeichen von $P(t)$ gerade so, daß die Leistung im zeitlichen Mittel verschwindet. Dann liegt nur noch Blindleistung vor. Im allgemeinen liegt die Phasenverschiebung irgendwo zwischen diesen beiden extremen Konstellationen. Die Amplituden \hat{u}_K und \hat{F}_1 können, wie es in Abbildung 5.7 dargestellt ist, als Vektoren in der komplexen Ebene angesehen werden. Die Kraftamplitude \hat{F}_1 läßt sich in zwei Komponenten parallel und

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

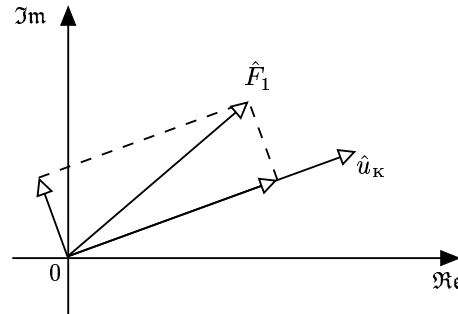


Abbildung 5.7.: Komplexe Amplituden der Kraft und Geschwindigkeit

senkrecht zu \hat{u}_k zerlegen. Der Anteil in Richtung von \hat{u}_k bestimmt die Wirkleistung und die senkrechte Komponente die Blindleistung. Die Größen \hat{u}_k und \hat{F}_1 hängen nach (5.5.47) voneinander ab. Die Phasenverschiebung zwischen den komplexen Amplituden wird durch die radiale Impedanz $Z_r(a)$ bestimmt. Ist \hat{u}_k gegeben, wird die Komponente von \hat{F}_1 parallel zu \hat{u}_k durch den Realteil $\Re\{Z_r(a)\}$ festgelegt. Die Senkrechte Komponente hängt entsprechend nur von $\Im\{Z_r(a)\}$ ab.

Bisher wurde nicht berücksichtigt, daß auch eine Kraft notwendig ist, um die Masse M_k der Kugel bei der Bewegung zu beschleunigen. Die mechanische Kraft ergibt zusammen mit F_1 , die im folgenden als akustische Kraft bezeichnet wird, die Gesamtkraft. Für die mechanische Kraft (Masse \times Beschleunigung) gilt

$$F_{\text{mech}} = M_k \frac{du'_k}{dt} \quad (5.5.51)$$

Für den harmonischen Fall ergibt sich in komplexer Formulierung

$$F_{\text{mech}}(t) = \hat{F}_{\text{mech}} e^{i\omega t} = i\omega M_k \hat{u}_k e^{i\omega t} \quad (5.5.52)$$

Die mechanische Kraft $F_{\text{mech}}(t)$ ist damit relativ zur Geschwindigkeit $u'_k(t)$ um 90° phasenverschoben. Im zeitlichen Mittel wird keine mechanische Leistung beim hin- und herbewegen der Kugelmasse verbraucht. Die Energie pendelt sozusagen zwischen dem Antrieb und der Kugel hin- und her. Bei Beschleunigen wird Arbeit an der Kugel geleistet, die dann beim Abbremsen zurückgewonnen wird. Wenn der Antrieb reibungsfrei ist, ergibt sich durch die mechanische Kraft nur eine Blindleistung.

Um die Phasenverschiebung zwischen $F_1(t)$ und $u'_k(t)$ zu bestimmen, wird die radiale Impedanz genauer betrachtet. Der Ausdruck für Z_r in (5.5.32) wird so umgeformt, daß der Nenner reell wird. Dies ist durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Wert des Nenners möglich. Es ergibt sich

$$Z_{\text{R}} = \frac{\rho_0 c}{2} \cdot \frac{i \left(\frac{\omega r}{c}\right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^4}{\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2} \quad (5.5.53)$$

Real- und Imaginärteil von Z_{R} lassen sich in dieser Form besser miteinander vergleichen. Der gesamte Ausdruck hängt von dem Term

$$\frac{\omega r}{c} = kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (5.5.54)$$

ab. Speziell an der Kugeloberfläche bei $r = a$ ist demnach der Faktor

$$\frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (5.5.55)$$

für $Z_{\text{R}}(a)$ entscheidend. Der Realteil hängt mit der vierten Potenz von diesem Faktor ab. Der Imaginärteil besitzt dagegen einen Anteil, der nur linear mit dem Faktor verknüpft ist.

Betrachtet man den Grenzfall einer relativ kleinen Kugel im Sinne von

$$a \ll \lambda \quad (5.5.56)$$

dann gilt

$$\frac{\omega a}{c} \ll 1 \quad (5.5.57)$$

In diesem Fall ist der Realteil von $Z_{\text{R}}(a)$ gegenüber dem Imaginärteil vernachlässigbar gering. Der Nenner des zweiten Quotienten in (5.5.53) ist approximativ gleich Eins. Entsprechend folgt die Näherung

$$Z_{\text{R}}(a) \approx i \frac{\rho_0 c}{2} \left(\frac{\omega a}{c}\right) = i\omega \frac{\rho_0 a}{2} \quad (5.5.58)$$

Setzt man diese Beziehung in (5.5.47) ein, erhält man für die akustische Kraft

$$F_1 = \hat{F}_1 e^{i\omega t} \approx i\omega \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_0 \hat{u}_{\text{K}} e^{i\omega t} \quad (5.5.59)$$

Bei einer relativ kleinen Kugel ergibt sich demnach überwiegend Blindleistung. Die Wirkleistung ist demgegenüber verschwindend gering. Berechnet man die Gesamtkraft

$$F_{\text{ges}}(t) = F_{\text{mech}}(t) + F_1(t) = (\hat{F}_{\text{mech}} + \hat{F}_1) e^{i\omega t} \quad (5.5.60)$$

auf die Kugel, ergibt sich zusammen mit (5.5.52) die Näherung

$$F_{\text{ges}}(t) \approx i\omega (M_{\text{K}} + M_{\text{F}}) \hat{u}_{\text{K}} e^{i\omega t} \quad (5.5.61)$$

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Dabei wurde die Abkürzung

$$M_F = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 = \frac{1}{2} V_K \rho_0 \quad (5.5.62)$$

eingeführt. Anschaulich entspricht M_F der halben Masse des Mediums, welches durch die Kugel mit dem Volumen V_K verdrängt wird. Daß bedeutet, im Grenzfall der relativ kleinen Kugel wirkt die Druckkraft auf die Kugel so wie eine zusätzliche Masse. Man bezeichnet daher M_F auch als die mitschwingende Mediummasse.

Im Grenzfall einer relativ großen Kugel im Sinne von

$$a \gg \lambda \quad (5.5.63)$$

gilt

$$\frac{c}{\omega a} \ll 1 \quad (5.5.64)$$

Die radiale Impedanz für große Abstände r wurde bereits oben diskutiert. Gemäß (5.5.38) gilt

$$Z_R(a) \approx \rho_0 c \quad (5.5.65)$$

Für eine relativ große Kugel entspricht die radiale Impedanz an der Kugeloberfläche näherungsweise dem reellen Wellenwiderstand. Die Wirkleistung überwiegt der Blindleistung. Für die akustische Kraft folgt

$$F_1(t) = \hat{F}_1 e^{i\omega t} \approx \frac{4}{3} \pi a^2 \rho_0 c \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.66)$$

Dies kann mit der Kraft auf einen harmonisch oszillierenden Kolben im Rohr verglichen werden. Bewegt dieser sich mit der Geschwindigkeit $u'_K(t)$, so ist der Druck auf der Kolbenoberfläche mit

$$p'_K(t) = \rho_0 c u'_K(t) \quad (5.5.67)$$

gegeben. Die Kraft $F_K(t)$ auf den Kolben erhält man durch Multiplikation mit der Querschnittsfläche Q . Bei harmonischer Bewegung nach (5.5.52) folgt

$$F_K(t) = Q p'_K(t) = Q \rho_0 c \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.68)$$

Dieses Ergebnis kann mit der Kraft $F_1(t)$ nach (5.5.66) verglichen werden. Im Grenzfall der relativ großen Kugel entspricht $F_1(t)$ näherungsweise der Kraft, die auf ein bewegten Kolben im Rohr mit der Querschnittsfläche

$$Q = \frac{4}{3} \pi a^2 \quad (5.5.69)$$

wirkt. Entsprechend wird auch die akustische Leistung abgestrahlt, die ein Kolben im Rohr mit der angegebenen Oberfläche bei der gleichen Auslenkung abgibt.