

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

Im vorangegangenen Kapitel wurden ebene Wellen betrachtet, die sich in Rohren ausbreiten. Alle Vorgänge wurden als eindimensional angenommen und es gab nur eine Bewegung der Fluidelemente in Richtung der Rohrachse. Damit wurde die Randbedingung an den festen Rohrwänden automatisch erfüllt. An der Wand muß die Schnellekomponente senkrecht zur Oberfläche verschwinden. Es sind jedoch auch Lösungen denkbar, die im Inneren des Rohres eine Bewegung quer zur Rohrachse besitzen. Solche Lösungen sollen im folgenden für einen zweidimensionalen Kanal mit festen Wänden hergeleitet werden. Der Kanal soll die Breite H besitzen, und er soll in x_1 -Richtung

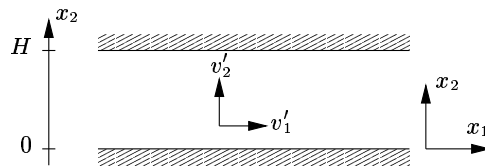


Abbildung 4.1.: Koordinaten im zweidimensionalen Kanal

unendlich ausgedehnt sein. Die Anordnung der Koordinaten ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Man kann sich den Kanal auch in drei Dimensionen als zwei unendlich ausgedehnte ebene Platten mit dem Abstand H vorstellen. Die x_2 -Achse geht senkrecht durch die Platten. Es werden nur Lösungen betrachtet, die unabhängig von x_3 sind, und deren Schnellekomponente v_3' überall gleich Null ist.

Die Wellengleichung für den Druck in der Ebene lautet (mit Summationskonvention)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{mit } j = 1, 2 \quad (4.1.1)$$

Eine Lösung muß neben dieser Gleichung auch die Randbedingungen an den Wänden erfüllen. Bei festen undurchlässigen Wänden gilt für die Schnelle die Bedingung

$$v_2'(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.2)$$

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

Um daraus eine Beziehung für den Druck abzuleiten, wird später noch die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial v_j'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_j} \quad \text{mit } j = 1, 2 \quad (4.1.3)$$

benötigt.

Zur Lösung der Wellengleichung (4.1.1) bei der gegebenen Randbedingung (4.1.2) wird der Ansatz

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1) \cdot g(x_2) \cdot e^{i\omega t} \quad (4.1.4)$$

verwendet. Dabei sind $f(x_1)$ und $g(x_2)$ komplexwertige Funktionen. Die Lösung ist harmonisch in der Zeit und die räumlichen Abhängigkeiten sind separiert. Eigentlich müßte auf der rechten Seite von Gleichung (4.1.4) der Realteil des komplexen Ausdrucks stehen, denn p' auf der linken Seite ist eine reelle Größe. Für eine größere Übersichtlichkeit der Gleichungen wird im weiteren, wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht, die Bildung des Realteils mit $\Re\{ \}$ nicht explizit hingeschrieben. Bei allen Gleichungen, in denen eine reell definierte Größe mit einem komplexen Ausdruck gleichgesetzt wird, ist dann die Bildung des Realteils auf der komplexen Seite implizit enthalten.

Einsetzen von (4.1.4) in (4.1.1) liefert

$$\left[-\frac{f g \omega^2}{c^2} - \frac{d^2 f}{dx_1^2} g - \frac{d^2 g}{dx_2^2} f \right] e^{i\omega t} = 0 \quad (4.1.5)$$

Damit dies für alle Zeiten t gilt, muß der Inhalt der eckigen Klammer verschwinden. Es folgt

$$-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx_1^2} = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx_2^2} \quad (4.1.6)$$

Die linke Seite von (4.1.6) ist ausschließlich eine Funktion von x_1 . Die rechte Seite hängt nur von x_2 ab. Die Bedingung gilt aber für alle möglichen Kombinationen von x_1 und x_2 . Dies ist nur möglich, wenn beide Seiten unabhängig von x_1 und x_2 – also räumlich konstant – sind. Die Konstante wird zu $-\beta^2$ gesetzt. Wenn auch komplexe β zugelassen sind, ist durch diese Wahl keine Einschränkung gegeben. Es gilt also

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx_2^2} = -\beta^2 \quad (4.1.7)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $g(x_2)$. Die allgemeine Lösung von (4.1.7) kann in der Form

$$g(x_2) = A_2 \cos(\beta x_2) + B_2 \sin(\beta x_2) \quad (4.1.8)$$

dargestellt werden. Die Konstanten A_2 , B_2 und β müssen so gewählt werden, daß die Randbedingungen (4.1.2) erfüllt werden. Da nur zwei Bedingungen gegeben sind, lassen sich die Konstanten nicht alle bestimmen. Es ist leicht einzusehen, daß die Lösung der Wellengleichung bei den gegebenen Randbedingungen nur bis auf einen konstanten Faktor angegeben werden kann. Findet man eine Lösung und multipliziert

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

sie mit einer Konstanten, so ergibt sich eine weitere Lösung. Erst durch zusätzliche Randbedingungen in x_1 -Richtung würde die Lösung eindeutig werden.

An den Kanalwänden ist $v'_2 = 0$. Daraus folgt für die zeitliche Ableitung

$$\frac{\partial v'_2}{\partial t} = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.9)$$

Durch die Gleichung (4.1.3) läßt sich dies in eine Bedingung für den Druck umwandeln. Es ergibt sich

$$\frac{\partial p'}{\partial x_2} = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.10)$$

Daß bedeutet, die Normalableitung des Schalldrucks an der festen Kanalwand verschwindet. Dies ist eine direkte Folge der Nichtdurchflußbedingung (4.1.2). Umgekehrt folgt aus der Druckbedingung (4.1.10), daß sich v'_2 an der Wand nicht zeitlich ändert. Ist zu einer Zeit an der Wand $v'_2 = 0$, so bleibt immer $v'_2 = 0$, und die Randbedingung (4.1.2) ist erfüllt.

Um die Bedingung (4.1.10) zu erreichen, wird der Ansatz (4.1.4) nach x_2 differenziert. Es ergibt sich

$$\frac{\partial p'}{\partial x_2}(\vec{x}, t) = f(x_1) \frac{dg}{dx_2}(x_2) e^{i\omega t} \quad (4.1.11)$$

Man sieht, daß (4.1.10) erfüllt wird, falls

$$\frac{dg}{dx_2} = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.12)$$

gilt. Aus der Randbedingung an den Kanalwänden folgt damit letztlich eine Bedingung an die Ableitung der Funktion $g(x_2)$. Bildet man die Ableitung ergibt sich

$$\frac{dg}{dx_2}(x_2) = -\beta A_2 \sin(\beta x_2) + \beta B_2 \cos(\beta x_2) \quad (4.1.13)$$

Es wird $B_2 = 0$ gesetzt, wodurch die Randbedingung bei $x_2 = 0$ immer erfüllt ist. Damit auch bei $x_2 = H$ die Ableitung von g verschwindet, muß $A_2 = 0$ oder

$$\sin(\beta H) = 0 \quad (4.1.14)$$

sein. Der Fall $A_2 = 0$ führt auf die triviale Lösung $g = 0$ und damit $p' = 0$ im gesamten Feld. Die zweite Weg ist, die Größe β so zu wählen, daß (4.1.14) erfüllt wird. Dafür gibt es eine ganze Reihe von Möglichkeiten:

$$\beta = \frac{m\pi}{H} \equiv \beta_m \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.15)$$

Somit ergeben sich für $g(x_2)$ auch eine ganze Reihe von Lösungen

$$g(x_2) = A_2 \cos\left(\frac{m\pi x_2}{H}\right) = A_2 \cos(\beta_m x_2) \quad (4.1.16)$$

In Abbildung 4.2 sind die entsprechenden Verläufe $g(x_2)$ für $m = 0, 1, 2$ dargestellt.

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

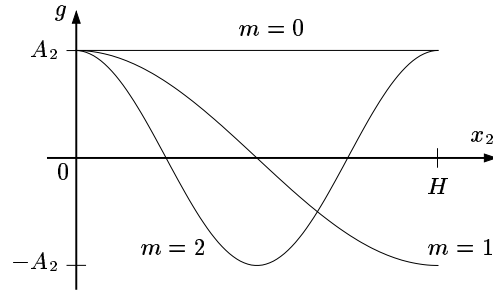


Abbildung 4.2.: Verlauf der Lösung in x_2 -Richtung für verschiedene Werte m

Um das Druckfeld $p'(\vec{x}, t)$ vollständig zu bestimmen, muß noch die Funktion $f(x_1)$ ermittelt werden. Die Gleichungen (4.1.6) und (4.1.7) ergeben zusammen

$$-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx_1^2} = -\beta^2 = -\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \quad (4.1.17)$$

Dies kann zu

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right] f = 0 \quad (4.1.18)$$

umgeformt werden. Beziehung (4.1.18) ist eine Differentialgleichung für $f(x_1)$. Die allgemeine Lösung von (4.1.18) hat die Gestalt

$$f(x_1) = A_1 e^{-i\alpha x_1} + B_1 e^{i\alpha x_1} \quad (4.1.19)$$

Dieser Ansatz ist äquivalent zu dem Ansatz (4.1.8). Jedoch ist für $f(x_1)$ – wie sich später zeigen wird – die Exponentialdarstellung zweckmäßiger, da in x_1 -Richtung besonders laufende Wellen von Interesse sind. Die freien Parameter sind A_1 , B_1 und α . Aus (4.1.19) folgt

$$\frac{df}{dx_1}(x_1) = -\alpha^2 f(x_1) \quad (4.1.20)$$

Damit der Ansatz (4.1.19) die Differentialgleichung (4.1.18) erfüllt, muß für α die Beziehung

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} = \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \equiv \alpha_m \quad (4.1.21)$$

gelten. Daß bedeutet, für jedes m gibt es ein bestimmtes α und β . Die Funktionen f und g können damit nicht voneinander unabhängig gewählt werden. Zu einem bestimmten $g(x_2)$ gehört ein bestimmtes $f(x_1)$.

Schließlich kann die vollständige Lösung für das Druckfeld angegeben werden. Sie lautet

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 \cos(\beta_m x_2) [A_1 e^{-i\alpha_m x_1} + B_1 e^{i\alpha_m x_1}] e^{i\omega t} \quad (4.1.22)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Die Größen A_1 , B_1 und A_2 sind Faktoren, die frei gewählt werden können. Zieht man den $e^{i\omega t}$ -Term mit in die eckige Klammer hinein, ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 \cos(\beta_m x_2) \left[A_1 e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_m x_1)} \right] \quad (4.1.23)$$

Die beiden Summanden in der eckigen Klammer besitzen jeweils die Form eines Wellenausdrucks in komplexer Darstellung. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Lösungen tritt statt der Wellenzahl k die Größe α_m im Exponenten auf. Es ist zu beachten, daß α_m nach (4.1.21) auch komplex werden kann. Wenn α_m reell ist, besteht die Lösung aus einer Überlagerung von zwei Teilwellen, die in positive und negative x_1 -Richtung laufen. Die Amplituden der Teilwellen werden durch A_1 und B_1 festgelegt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist jedoch nicht unbedingt die Schallgeschwindigkeit. Sie hängt wie die Form der gesamten Lösung von der gewählten Zahl m ab.

Die verschiedenen Formen der Lösung werden Moden genannt. Die Zahl m heißt Ordnung der Mode. Die Lösung für $m = 0$ wird als Grundmode bezeichnet. Nach (4.1.15) ist

$$\beta_0 = 0 \quad (4.1.24)$$

und mit (4.1.21) folgt daraus

$$\alpha_0 = \frac{\omega}{c} = k \quad (4.1.25)$$

Für die Grundmode ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 \left[A_1 e^{i(\omega t - kx_1)} + B_1 e^{i(\omega t + kx_1)} \right] \quad (4.1.26)$$

Sie entspricht damit den eindimensionalen ebenen Wellen aus dem vorangegangenen Abschnitten.

“Cut-Off”-Bedingung

Die Form (4.1.22) beziehungsweise (4.1.23) beschreibt nur eine reguläre Wellenausbreitung, falls α_m reell ist. Dies ist jedoch nur unter bestimmten Bedingungen gegeben. Wird bei einer festen Frequenz ω die Ordnungszahl m immer weiter erhöht, so wird irgendwann der Ausdruck unter der Wurzel in (4.1.21) negativ. Dadurch ergibt sich ein imaginäres α_m , und die Lösung stellt keine reguläre Wellenausbreitung mehr dar. Die Lösung klingt dann mit dem Faktor $e^{\pm|\alpha_m|x_1}$ in x_1 -Richtung ab oder wächst entsprechend an.

Für eine feste Frequenz gibt es also ein maximale Ordnung m , mit der sich die Moden noch ausbreiten können. Umgekehrt gibt es für jede Ordnung m – also jede Mode – eine untere Grenzfrequenz $\omega_{c,m}$, ab der sich die Mode ausbreitet. Damit α_m reell ist, muß

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 > 0 \quad (4.1.27)$$

gelten. Dazu muß die Kreisfrequenz

$$\omega > m \frac{c\pi}{H} \equiv \omega_{c,m} \quad (4.1.28)$$

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

erfüllen. Die Frequenz $\omega_{c,m}$ wird als "Cut-Off"-Frequenz der m -ten Mode bezeichnet. Wird keine Ordnung angegeben, dann ist mit dem Ausdruck "Cut-Off"-Frequenz meistens der Wert für die erste höhere Mode $m = 1$ gemeint. Für

$$\omega < \omega_{c,1} = \frac{c\pi}{H} \quad (4.1.29)$$

breitet sich nur die Grundmode aus, die immer bei allen Frequenzen ausbreitungsfähig ist ($\omega_{c,0} = 0!$). Die Ungleichung (4.1.29) kann zu

$$\frac{\pi}{H} > \frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.1.30)$$

umgeformt werden. Die Größe $\lambda = 2\pi c/\omega$ ist die Wellenlänge, die in einer ebenen Welle mit der Frequenz ω beobachtet wird. Sie entspricht nicht unbedingt den Wellenlängen, die in dem Kanal auftreten. Um eine Verwechslung zu vermeiden, wird λ im folgenden als Freifeldwellenlänge bezeichnet. Aus (4.1.30) folgt

$$\lambda > 2H \quad (4.1.31)$$

Daß heißt, nur wenn die Freifeldwellenlänge kleiner als die doppelte Kanalbreite ist, breitet sich die erste Mode regulär aus.

Die Phasengeschwindigkeit im Kanal

Beschränkt man sich auf die Wellenausbreitung in positiver x_1 -Richtung und setzt $B_1 = 0$, ergibt sich für den Druck

$$p' = A_1 A_2 \cos(\beta_m x_2) e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} \quad (4.1.32)$$

Die Ausbreitung in x_1 -Richtung wird durch den Exponentialterm beschrieben. Die Abhängigkeit in x_2 -Richtung kann in einer Funktion $G(x_2) = A_1 A_2 \cos(\beta_m x_2)$ zusammengefaßt werden. Es gilt

$$p' = G(x_2) e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} = G(x_2) e^{i\omega(t - x_1/c_m^{\text{ph}})} \quad (4.1.33)$$

Dabei wurde die Größe

$$c_m^{\text{ph}} = \frac{\omega}{\alpha_m} \quad (4.1.34)$$

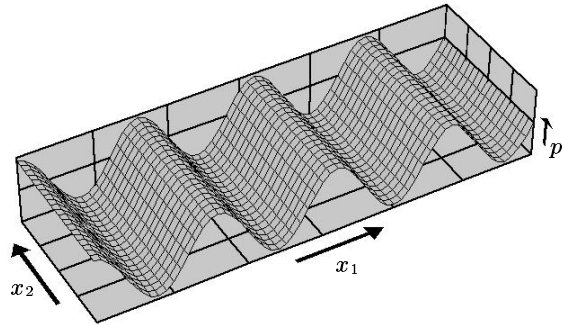
eingeführt. Sie wird als Phasengeschwindigkeit der m -ten Mode bezeichnet. Die Phasengeschwindigkeit gibt an, mit welcher Geschwindigkeit sich die Wellenberge in x_1 -Richtung bewegen. Dies ist nicht unbedingt die Schallgeschwindigkeit c . Nur die Grundmode $m = 0$ bewegt sich mit der Schallgeschwindigkeit, denn es gilt

$$c_0^{\text{ph}} = \frac{\omega}{\alpha_0} = \frac{\omega}{k} = c \quad (4.1.35)$$

Für höhere Moden $m > 0$ ergibt sich eine Phasengeschwindigkeit $c_m^{\text{ph}} > c$. Die gesamte Überlegung gilt jedoch nur, solange α_m reell ist.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

$$\begin{aligned} m &= 0 \\ \beta_0 &= 0 \\ \alpha_0 &= 7.85/H \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m &= 1 \\ \beta_1 &= \pi/H \\ \alpha_1 &= 7.19/H \end{aligned}$$

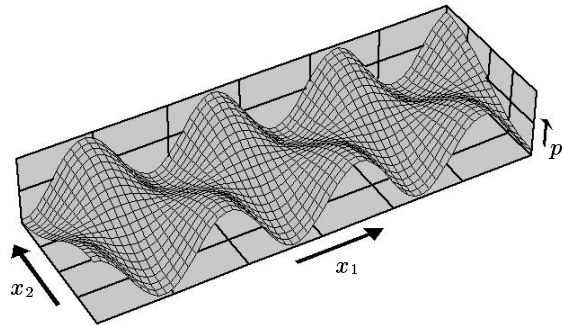


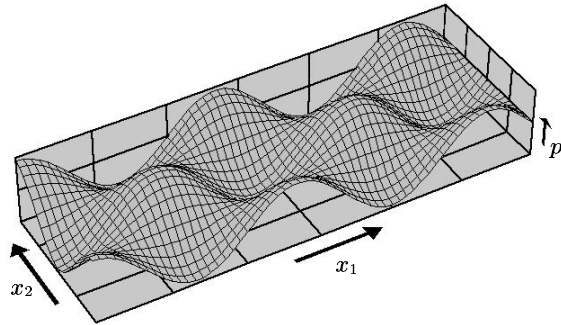
Abbildung 4.3.: Verschiedene Formen der Lösung in einem Kanal mit festen Wänden;
 $\omega = 2\pi c/(0.8 H)$.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 sind die Moden für $m = 0, 1, 2, 3$ veranschaulicht. In den Beispielen wurde $B_1 = 0$ gesetzt und die dargestellte Lösung enthält nur die Teilwelle in positiver x_1 -Richtung nach (4.1.32). Der Bereich in x_2 -Richtung entspricht der gesamten Kanalbreite von $x_2 = 0$ bis H . Die gewählte Frequenz beträgt $\omega = 2\pi c/(0.8 H)$. Das entspricht einer Freifeldwellenlänge von $\lambda = 0.8 H$. Damit ergeben sich für $m = 0, 1, 2$ reelle α_m . Der Wert α_3 ist komplex, und die entsprechende Lösung klingt in x_1 -Richtung ab.

Hier sei angemerkt, daß bei der Ableitung der Gleichung (4.1.21) die negativen Lösungen für α_m nicht berücksichtigt wurden. Im Prinzip muß α_m die Beziehung $k^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2$ erfüllen. Demnach ist auch die negative Wurzel aus Gleichung (4.1.21) eine mögliche Lösung für α_m . Allerdings ergeben sich daraus nicht wirkliche weitere Lösungen für p' , denn ein Wechsel des Vorzeichens von α_m kann in der Lösung (4.1.23) durch das Vertauschen der freien Faktoren A_1 und B_1 ausgeglichen werden.

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

$$\begin{aligned} m &= 2 \\ \beta_2 &= 2\pi/H \\ \alpha_2 &= 4.71/H \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m &= 3 \\ \beta_3 &= 3\pi/H \\ \alpha_3 &= i 5.2/H \end{aligned}$$

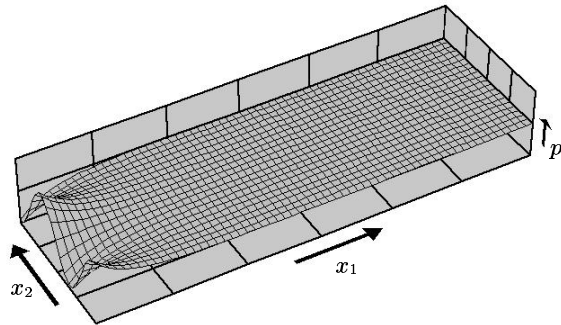


Abbildung 4.4.: Fortsetzung von 4.3

Geometrische Interpretation

Die Phasengeschwindigkeit c^{ph} wird durch die Wellenzahl α_m in x_1 -Richtung festgelegt. Der Wert für α_m ergibt sich zunächst ganz formal aus der Gleichung (4.1.21). Die Größen α_m und β_m können aber auch auf eine anschaulichere Art geometrisch interpretiert werden. Dies soll im folgenden gezeigt werden. Dazu wird die Lösung (4.1.32) betrachtet, die nur die Teilwelle in positive x_1 -Richtung enthält. Der \cos -Term in (4.1.32) wird mit

$$\cos(\beta_m x_2) = \frac{1}{2} (e^{i\beta_m x_2} + e^{-i\beta_m x_2}) \quad (4.1.36)$$

ersetzt. Dann kann die Lösung als eine Summe

$$p' = \frac{A_1 A_2}{2} (p'_+ + p'_-) \quad (4.1.37)$$

dargestellt werden. Die beiden Anteile sind dabei mit

$$p'_+ = e^{i(\omega t - \alpha_m x_1 + \beta_m x_2)} \quad (4.1.38)$$

und

$$p'_- = e^{i(\omega t - \alpha_m x_1 - \beta_m x_2)} \quad (4.1.39)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

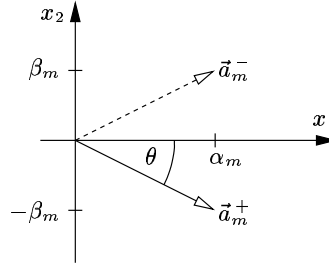


Abbildung 4.5.: Veranschaulichung der Wellenzahlvektoren nach (4.1.40) und (4.1.41) in der x_1, x_2 -Ebene.

gegeben. Anders als in der bisherigen Lösung tritt hier nicht nur die Koordinate x_1 im Exponenten auf, sondern auch x_2 . Die Ausdrücke in (4.1.38) und (4.1.39) beschreiben ebenfalls eine Wellenausbreitung, jedoch nicht in x_1 -Richtung. Die Ausbreitungsrichtung der Wellen wird durch α_m und β_m in der (x_1, x_2) -Ebene festgelegt.

Zweckmäßigerweise werden die Vektoren

$$\vec{a}_m^+ = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ -\beta_m \end{pmatrix} \quad (4.1.40)$$

und

$$\vec{a}_m^- = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ +\beta_m \end{pmatrix} \quad (4.1.41)$$

eingeführt. Sie sind in der Abbildung 4.5 dargestellt. Damit können (4.1.38) und (4.1.39) in der Form

$$p'_+ = e^{i(\omega t - \vec{a}_m^+ \vec{x})} \quad (4.1.42)$$

und

$$p'_- = e^{i(\omega t - \vec{a}_m^- \vec{x})} \quad (4.1.43)$$

geschrieben werden. Durch einen Ausdruck der Form

$$p' \sim e^{i(\omega t - \vec{a} \vec{x})} \quad (4.1.44)$$

wird eine Wellenausbreitung in der Richtung des Vektors \vec{a} beschrieben. Dies wird anschaulich klar, wenn man das Koordinatensystem so wählt, daß die x_1 -Achse in Richtung von \vec{a} zeigt. Dann gilt $\vec{a} \vec{x} = |\vec{a}| x_1$. Entsprechend ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle nach (4.1.44) durch $\omega/|\vec{a}|$ gegeben. Der Vektor \vec{a} wird üblicherweise als Wellenzahlvektor bezeichnet.

Es stellt sich die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich die Anteile p'_+ und p'_- ausbreiten. Es gilt

$$\alpha_m = \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \quad (4.1.45)$$

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

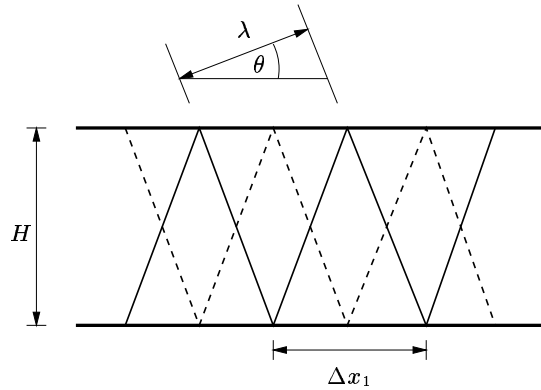


Abbildung 4.6.: Lage der Wellenfronten in den überlagerten ebenen Wellen für die Mode $m = 1$; Maxima: durchgezogene Linien; Minima: gestrichelte Linien

beziehungsweise

$$k^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2 \quad (4.1.46)$$

Daraus folgt für die Beträge

$$|\vec{a}_m^+| = |\vec{a}_m^-| = k = \frac{\omega}{c} \quad (4.1.47)$$

Das bedeutet, die Anteile p'_+ und p'_- sind ebene Wellen, die sich mit der "normalen" Schallgeschwindigkeit c ausbreiten. Sie sind damit einfache Lösungen der Wellengleichung, die im freien Raum gelten. Die Lösung (4.1.32) läßt sich also durch eine Überlagerung von zwei ebenen Wellen erzeugen. Die Wellen müssen sich nur in bestimmte Richtungen ausbreiten und gleichstark sein.

Für $m > 0$ ist auch $\beta_m > 0$. Die Vektoren \vec{a}_m^+ und \vec{a}_m^- stehen dann, wie in Abbildung 4.5 dargestellt, unter einem Winkel θ schräg zur x_1 -Achse. Für den Winkel θ gilt die Beziehung

$$\tan \theta = \frac{\beta_m}{\alpha_m} \quad (4.1.48)$$

Die ebenen Wellen p'_+ und p'_- erfüllen dann natürlich nicht die Randbedingung an den Kanalwänden. Sie besitzen eine Schnelle, die parallel zu \vec{a}_m^+ beziehungsweise \vec{a}_m^- liegt und durch die Wand hindurchgeht. Die Wellen überlagern sich so, daß sich die x_2 -Komponenten der Schnelle an den Kanalwänden gerade gegeneinander aufheben. Dazu müssen die Wellen an den Kanalwänden immer die gleiche Phase besitzen.

Die geometrische Situation ist in der Abbildung 4.6 für den Fall $m = 1$ dargestellt. Die Druckmaxima der Wellen sind mit durchgezogenen und die Minima mit gestrichelten Linien markiert. An den Wänden überlagern sich die Minima und Maxima konstruktiv. Dadurch sind dort die x_2 -Komponenten der Schnelle in den einzelnen

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Wellen immer gleichstark und heben sich gegenseitig auf. In der Kanalmitte fallen immer Minima und Maxima zusammen und die Druckschwankungen löschen sich gegenseitig aus. Der Abstand der Wellenmaxima an der Wand sei mit Δx_1 bezeichnet. Es gilt

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda}{\cos \theta} \quad (4.1.49)$$

Daß heißt, die an der Kanalwand beobachtete Wellenlänge in x_1 -Richtung ist immer größer als die Freifeldwellenlänge λ . Während einer Periode wandern die Maxima in den ebenen Wellen um die Strecke λ in Ausbreitungsrichtung, und damit bewegen sich die Maxima an der Wand gerade um diese Strecke Δx_1 in Kanalrichtung. Entsprechend ist die Phasengeschwindigkeit in x_1 -Richtung um den Faktor $(1/\cos \theta)$ größer als c .

Der Abstand der Maxima an der Wand ist mit der Wellenzahl α_m verknüpft. Es gilt

$$\Delta x_1 = \frac{2\pi}{\alpha_m} \quad (4.1.50)$$

Ist eine Frequenz beziehungsweise Wellenlänge vorgegeben, kann man geometrisch die möglichen Winkel θ ermitteln, bei denen eine Überlagerung der Extrema an der Wand gegeben ist. Aus den Winkeln lassen sich dann die Abstände Δx_1 und damit die Wellenzahlen α_m berechnen. Die ist umgekehrt zu dem oben beschriebenen rein formalen Weg, bei dem erst α_m mit (4.1.45) und daraus θ mit (4.1.48) berechnet wird.

4.2. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Für die höheren Kanalmoden ergab sich im letzten Abschnitt eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, die oberhalb der Schallgeschwindigkeit liegt. Es stellt sich die Frage, mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Information aus, wenn sie von höheren Moden getragen wird. Eine einzelne Mode mit konstanter Amplitude transportiert keine Information. Um Information zu übertragen muß zum Beispiel die Stärke der Mode variiert werden, wodurch sich ein amplitudenmoduliertes Signal ergibt.

Als einfaches Modell für ein moduliertes Signal $s(t)$ wird eine einzelne Wellengruppe betrachtet, wie sie in der Abbildung 4.7 skizziert ist. Die Grundschiwingung besitzt die Periode T . Die Amplitude der Schwingung ist nur in einem begrenzten Zeitintervall von Null verschieden. Die Information in dieser Wellengruppe ist die Form der Hüllkurve der Grundschiwingung.

Mit einer ebenen Welle wird ein solches Signal ohne Veränderung ideal übertragen. Die räumliche Verteilung entspricht dem dargestellten Zeitverlauf und die Wellengruppe verschiebt sich mit der Geschwindigkeit c in Ausbreitungsrichtung. Im Kanal ist die Ausbreitung in Achsrichtung von Bedeutung. Nun soll als Grundschiwingung zur Signalübertragung die m -te Mode verwendet werden. Die Phasengeschwindigkeit c_m^{ph} ist Frequenzabhängig, und das betrachteten Signal besitzt nicht nur eine Frequenz. Zerlegt man das Signal spektral in seine harmonischen Anteile, so breiten sich diese mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus. Damit kann die exakte Form des Signals nicht erhalten bleiben.

4.2. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

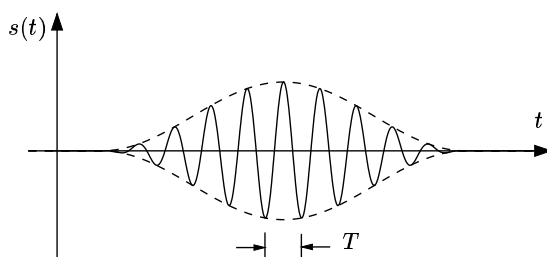


Abbildung 4.7.: Wellengruppe mit einhüllender Kurve (gestrichelt)

Da das dargestellte Zeitsignal nicht periodisch ist, besitzt es ein kontinuierliches Spektrum, das um die Frequenz $\omega = 2\pi/T$ konzentriert ist. Je breiter die Einhüllende ist, desto schmaler ist der beteiligte Frequenzbereich. Im Grenzfall der unendlich ausgedehnten Hüllkurve ergibt sich eine harmonische Schwingung und entsprechend nur eine Linie im Spektrum.

Überlagerung von zwei Wellen

Im folgenden soll plausibel gemacht werden, daß unter bestimmten Umständen die Form der Hüllkurve erhalten bleibt, obwohl sich die einzelnen harmonischen Anteile unterschiedlich verhalten. Es ist sogar möglich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Hüllkurve zu berechnen. Dazu wird die Überlagerung von nur zwei harmonischen Wellen

$$s(x, t) = A [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] \quad (4.2.1)$$

betrachtet. Die Größe $s(x, t)$ sei eine beliebige Feldgröße, wie zum Beispiel der Schalldruck oder eine elektrische Feldstärke. Die Wellenzahlen k_1 und k_2 sind mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 durch eine gegebene Funktion $\omega(k)$ verknüpft. Wie diese Funktion in konkreten Fällen aussieht, wird weiter unten besprochen. Allgemein gilt

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b) \quad (4.2.2)$$

Wählt man die Größen

$$a = \frac{1}{2} \{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x\}; \quad b = \frac{1}{2} \{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x\} \quad (4.2.3)$$

so folgt aus Gleichung (4.2.2)

$$s(x, t) = 2A \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right] \quad (4.2.4)$$

Liegen nun die Frequenzen im Sinne von

$$\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (4.2.5)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

sehr dicht beisammen (was dem sehr schmalen Spektrum der Wellengruppe entspricht), so ergibt sich das typische Bild einer Schwebung, wie in der Abbildung 4.8 dargestellt ist. Die Grundschwingung wird durch den zweiten Cosinus-Ausdruck in Gleichung

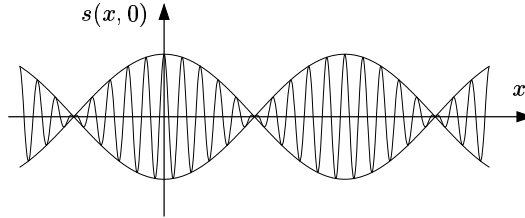


Abbildung 4.8.: Räumliche Verteilung nach (4.2.1) zur Zeit $t = 0$; Verhältnis der Wellenzahlen: $|k_1 - k_2| = 0.05(k_1 + k_2)$.

(4.2.4) beschrieben. Sie hat die Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Die Einhüllende wird durch den ersten Cosinus-Ausdruck dargestellt. Die Frequenz der Einhüllenden ist $(\omega_1 - \omega_2)/2$. Beide Cosinus-Ausdrücke stellen für sich allein eine Ausbreitung in x -Richtung dar. Die Grundschwingung breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \quad (4.2.6)$$

aus. Wenn k_1 und k_2 (beziehungsweise ω_1 und ω_2) eng beisammen sind, ist das etwa die mittlere Phasengeschwindigkeit der überlagerten harmonischen Wellen:

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega_1}{k_1} \quad \text{für } k_2 \rightarrow k_1 \quad (4.2.7)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden ist mit

$$c^{\text{gr}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad (4.2.8)$$

gegeben. Die Größe c^{gr} wird als Gruppengeschwindigkeit bezeichnet. Wie oben vorausgesetzt, soll eine Funktion $\omega = \omega(k)$ gegeben sein. Dann kann

$$c^{\text{gr}} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} \quad (4.2.9)$$

geschrieben werden. Daraus folgt für den Grenzfall, daß die Frequenzen beziehungsweise die Wellenzahlen immer weiter zusammenrücken

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}(k_1) \quad \text{für } k_2 \rightarrow k_1 \quad (4.2.10)$$

4.2. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Die in Abbildung 4.7 gezeigte Wellengruppe besitzt ein kontinuierliches Spektrum, in dem die Frequenzen beliebig dicht liegen. Es ist daher plausibel, daß sich die Einhüllende der Wellengruppe – wie die Einhüllende der Schwebung – auch mit der Gruppengeschwindigkeit nach (4.2.10) bewegt. Dabei ist die Ableitung $d\omega/dk$ bei der mittleren Wellenzahl der Wellengruppe zu nehmen.

Dispersion der Wellen

Bisher wurde die konkrete Form der Funktion $\omega(k)$ nicht benötigt. Das Feld in (4.2.1) kann als Überlagerung von zwei ebenen Schallwellen betrachtet werden. In der ebenen akustischen Welle gilt zwischen der Wellenzahl k und der Frequenz ω die Beziehung

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (4.2.11)$$

Dabei ist die Schallgeschwindigkeit c eine Konstante. So ergibt sich die lineare Funktion

$$\omega(k) = c k \quad (4.2.12)$$

Daraus folgt erwartungsgemäß

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega(k_1) + \omega(k_2)}{k_1 + k_2} = c \quad (4.2.13)$$

und

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = c \quad (4.2.14)$$

Daß heißt, in einer Überlagerung von ebenen akustischen Wellen gibt es nur eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, und das ist die Schallgeschwindigkeit c .

Die Situation ändert sich, wenn die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz abhängt. Ein Beispiel dafür sind ebene Lichtwellen in Glas. Die Überlagerung von zwei ebenen Lichtwellen mit unterschiedlicher Frequenz läßt sich auch in der Form (4.2.1) darstellen. Die Größe $s(x, t)$ ist dann zum Beispiel die elektrische Feldstärke in einer bestimmten Richtung. Die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz kann ausgenutzt werden, um mit einem Prisma das Licht spektral zu zerlegen. Zwischen der Wellenzahl und der Frequenz gilt der Zusammenhang

$$k = \frac{\omega}{c(\omega)} \quad (4.2.15)$$

wobei jetzt c die Geschwindigkeit einer ebenen Lichtwelle im Glas ist. Ist der Verlauf $c(\omega)$ aus Experimenten bekannt, kann eine Funktion $\omega(k)$ angegeben werden. Damit ist es möglich, auch die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für eine Wellengruppe zu ermitteln.

Im folgenden sollen die obigen Überlegungen auf die Ausbreitung der Kanalmoden angewendet werden. Das Druckfeld ist in der Form (4.1.23) gegeben. Die Ausdrücke in den eckigen Klammern beschreiben die Ausbreitung in positiver und negativer x_1 -Richtung. Statt der Wellenzahl k tritt nun die Größe α_m auf. Sie stellt nun die Wellenzahl in x_1 -Richtung dar. Die Phasengeschwindigkeit ist nach (4.1.34) mit ω/α_m

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

gegeben. Ersetzt man in den obigen Überlegungen k durch α_m , stimmt dies mit der Beziehung (4.2.7) überein. Zur Berechnung der Gruppengeschwindigkeit muß die Funktion $\omega(\alpha_m)$ differenziert werden.

Die Wellenzahl in Kanalrichtung ist durch

$$\alpha_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_m^2} \quad (4.2.16)$$

gegeben. Daraus folgt

$$\omega(\alpha_m) = c \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} \quad (4.2.17)$$

Es ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega}{\alpha_m} = c \frac{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}}{\alpha_m} \quad (4.2.18)$$

Dies formal abgeleitete Ergebnis entspricht der geometrischen Überlegung aus dem letzten Abschnitt. In Abbildung 4.5 wurde der Winkel θ definiert. Der Quotient auf der rechten Seite von (4.2.18) ist gerade der Kehrwert von $\cos \theta$. Es folgt

$$c^{\text{ph}} = \frac{c}{\cos \theta} \quad (4.2.19)$$

Für die Gruppengeschwindigkeit ergibt sich

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega}{d\alpha_m} = c \frac{\alpha_m}{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}} \quad (4.2.20)$$

Die läßt sich einfacher als

$$c^{\text{gr}} = c \cos \theta \quad (4.2.21)$$

schreiben. Damit wird klar, daß mit den höheren Moden die Ausbreitung von Information in Kanalrichtung langsamer als mit Schallgeschwindigkeit abläuft.

Die Funktion $\omega(k)$ wird üblicherweise als Dispersionsbeziehung bezeichnet. Im Fall der ebenen akustischen Welle ist die Phasengeschwindigkeit nicht von der Frequenz abhängig. Es gilt der einfache Zusammenhang $\omega = c k$. Ist die Phasengeschwindigkeit – wie bei Lichtwellen in Glas – von der Frequenz abhängig spricht man von Dispersion.

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde davon ausgegangen, daß keine Grundströmung im Kanal vorhanden ist. Jedoch ist gerade die Schallausbreitung in durchströmten Kanälen von großem praktischen Interesse. Beispiele sind der Schalldämpfer in Auspuffanlagen von Fahrzeugen oder Gebläse aller Art. Es stellt sich die Frage, wie eine Strömung die Schallausbreitung beeinflusst, und ob sich die bisherigen Ergebnisse auf den Fall mit Strömung übertragen lassen. Für die folgende Betrachtung wird

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

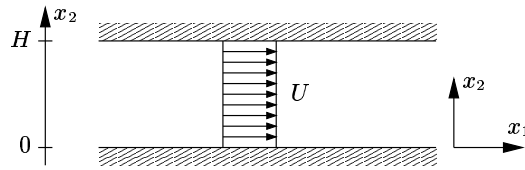


Abbildung 4.9.: Kanal mit homogenem Strömungsfeld

eine homogene Strömung mit der Geschwindigkeit U in Kanalrichtung angenommen. Daß heißt, das Geschwindigkeitsprofil im Kanal ist eben, und Reibungseffekte werden vernachlässigt. Die Situation ist in Abbildung 4.9 skizziert. Es gilt

$$\vec{v}_0(\vec{x}) = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

Diese Grundströmung ist formal eine Lösung der Euler-Gleichung. Sie erscheint jedoch auf den ersten Blick relativ unrealistisch, da in Wirklichkeit die Strömung in Kanälen meistens durch Reibungseffekte dominiert wird. Das einfache Geschwindigkeitsprofil entspricht am ehesten dem mittleren Profil in einer turbulenten Kanalströmung oder einer Kanalströmung kurz nach dem Einlauf. Hier soll mit einer so einfachen Grundströmung begonnen werden, um die grundsätzlichen Auswirkung der Strömung auf die Schallausbreitung zu verdeutlichen.

Bereits im Abschnitt 3.1 wurde kurz auf die Ausbreitung von eindimensionalen Wellen bei Strömung eingegangen. Für ein Strömungsfeld nach (4.3.1) kann die Vorgehensweise aus dieser Betrachtung übernommen werden. Bei der Herleitung der Wellengleichung in Abschnitt 2.1 wurde angenommen, daß keine Grundströmung vorliegt und $\vec{v}_0 = 0$ gilt. Die Wellengleichung beschreibt daher den Fall mit Strömung im Kanal nicht mehr. Es bieten sich zwei prinzipielle Möglichkeiten an, das Problem zu lösen.

- a) Die Wellengleichung wird erweitert, um den Fall mit Grundströmung zu erfassen. Anschließend werden die Lösungen der erweiterten Wellengleichung ermittelt.
- b) Das Problem wird in einem Bezugssystem betrachtet, das sich mit der Strömung mitbewegt. In diesem Bezugssystem ist keine Grundströmung vorhanden, und die bisherige Wellengleichung mit ihren Lösungen gilt. Die bekannten Lösungen werden in das kanalfeste Bezugssystem transformiert.

Der Weg b) hat den Vorteil, daß man die Lösungen schon kennt. Der Nachteil ist die Transformation des Bezugssystems, deren Schwierigkeiten oft unterschätzt werden. Dennoch soll hier – wie auch in Abschnitt 3.1 – der Weg b) bestritten werden. Dazu werden zunächst einige grundlegende Überlegungen zu einer eindimensionalen harmonischen Welle, die aus einem ruhendem und einem bewegten Bezugssystem betrachtet werden, vorgestellt.

Im bewegten Bezugssystem ist der Druckverlauf in der Welle durch

$$p'_B(x_B, t) = A e^{i(\omega_B t - k x_B)} \quad (4.3.2)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

gegeben. x_B ist die Koordinate im bewegten System und ω_B die Kreisfrequenz. Entsprechend sieht der Beobachter im ruhenden System die Welle als

$$p'_R(x_R, t) = A e^{i(\omega_R t - k x_R)} \quad (4.3.3)$$

Er hat die Koordinate x_R und beobachtet die Kreisfrequenz ω_R . Die Wellenzahl k ist nur mit der Wellenlänge λ verknüpft und damit vom Bezugssystem unabhängig. In dem mitbewegten Bezugssystem soll die Wellengleichung gelten. Die Welle läuft in diesem System mit der Schallgeschwindigkeit in positive x -Richtung. Damit ist k festgelegt. Es muß gelten

$$k = \frac{\omega_B}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.3.4)$$

Der Ursprung des mitbewegten Bezugssystem bewegt sich mit der Geschwindigkeit U im ruhendem System. Zur Zeit $t = 0$ sollen die Ursprünge der Koordinatensystem aufeinanderfallen. Eine Umrechnung der Koordinaten ist dann durch die Beziehung

$$x_R = x_B + Ut \quad (4.3.5)$$

gegeben. Der Druck hängt nicht vom Bezugssystem ab. Daher müssen sich die beobachteten Druckverläufe (4.3.2) und (4.3.3) am selben Ort (aber mit unterschiedlichen Koordinaten) entsprechen. Es muß gelten

$$p'_R(x_B + Ut, t) = p'_B(x_B, t) \quad (4.3.6)$$

Daraus ergibt sich wegen (4.3.2) und (4.3.3), daß

$$\omega_R t - k(x_B + Ut) = \omega_B t - k x_B \quad (4.3.7)$$

gelten muß. So erhält man eine Beziehung zwischen den beobachteten Frequenz in den beiden Bezugssystemen. Es gilt

$$\omega_R = \omega_B + kU \quad (4.3.8)$$

oder

$$\omega_R = \omega_B + \frac{\omega_B}{c} U = \omega_B (1 + M) \quad (4.3.9)$$

wobei die Machzahl

$$M = \frac{U}{c} \quad (4.3.10)$$

eingeführt wurde. Die Frequenz im ruhendem System ist um den sogenannten Dopplereffektor $(1 + M)$ gegenüber der im mitbewegten System "verschoben".

Zweidimensionale Kanalmoden

Die bisherigen Überlegungen zur eindimensionalen Ausbreitung der ebenen Welle lassen sich auf die zweidimensionalen Kanalmoden übertragen. x wird durch die x_1 -Koordinate in Kanalrichtung ersetzt. Statt der Wellenzahl k wird die Wellenzahl α_m

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

in Kanalrichtung eingesetzt. Das Druckfeld der Mode m im Kanal ohne Strömung für eine reine Ausbreitung in positive x_1 -Richtung ist durch (4.1.32) gegeben. Diese Lösung gilt in dem mitbewegten System. Sie kann als

$$p'_B(\vec{x}_B, t) = G(x_2) e^{i(\omega_B t - \alpha_m x_{1,B})} \quad (4.3.11)$$

geschrieben werden. Dabei stellt die Funktion $G(x_2) \equiv A_1 A_2 \cos(\beta_m x_2)$ wieder die von x_2 abhängige Amplitude dar. Zu beachten ist, daß die x_2 -Koordinate in beiden Bezugssystemen gleich ist. Die Systeme verschieben sich nur in x_1 -Richtung nach der Beziehung

$$x_{1,R} = x_{1,B} + Ut \quad (4.3.12)$$

zueinander. Analog zur Gleichung (4.3.8) ergibt sich für die beobachteten Frequenzen der Kanalmoden die Relation

$$\omega_R = \omega_B - \alpha_m U \quad (4.3.13)$$

In Abschnitt 3.1 wurde die Wellenzahl α_m immer positiv definiert. Die Druckverteilung (4.3.11) beschreibt dann eine in positive x_1 -Richtung laufende Welle. Um die Wellenausbreitung in negative x_1 -Richtung zu betrachten, muß ein Ansatz mit $(\omega_B t + \alpha_m x_{1,B})$ im Exponenten gewählt werden. Mit der Gleichung (4.3.11) können auch beide Lösungen gleichzeitig erfaßt werden, falls auch negative Wellenzahlen α_m zugelassen werden. Als Erweiterung der Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 setzt man

$$\alpha_m = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_B}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} = \pm \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \quad (4.3.14)$$

Bisher wurde nur die positive Wurzel genommen. Jetzt legt das Vorzeichen von α_m die Ausbreitungsrichtung fest. Ohne Strömung bringt dieses Vorgehen kein Gewinn, da sich die Wellenausbreitung in den beiden Richtungen nicht unterscheidet und alles an der Welle in einer Richtung untersucht werden kann. Bei Strömung ist die Ausbreitung jedoch unsymmetrisch: Mit oder gegen die Strömungsrichtung. Mit dem erweiterten α_m können dann beide Lösungen gleichzeitig untersucht werden.

Um die Lösungen zu bestimmen, die sich bei einer vorgegebenen Anregungsfrequenz ergeben, muß die Wellenzahl α_m berechnet werden. Die Anregung soll im Bezug zum ruhenden System (z.B. mit einem Lautsprecher in der Kanalwand) geschehen, wodurch nur die Frequenz ω_R bekannt ist. Die Beziehung (4.3.14) verknüpft die Wellenzahl α_m mit der Frequenz ω_B im mitbewegten System. Für den Beobachter im ruhenden System ist diese Beziehung so nicht brauchbar, da er nach (4.3.13) nicht ω_B ermitteln kann, ohne α_m zu kennen. Es soll daher eine Beziehung zwischen ω_R und α_m abgeleitet werden.

Löst man (4.3.13) nach ω_B auf und setzt das Ergebnis in (4.3.14) ein, ergibt sich

$$\alpha_m = \pm \sqrt{\frac{(\omega_R - \alpha_m U)^2}{c^2} - \beta_m^2} \quad (4.3.15)$$

Diese Gleichung kann nach α_m aufgelöst werden. Nach einigen Umformungen, die im Anhang B.1 gegeben sind, folgt die Beziehung

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{S_m - M}{1 - M^2} \quad (4.3.16)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Dabei wurde die Abkürzung

$$S_m = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R}\right)^2 (1 - M^2)} \quad (4.3.17)$$

eingeführt. Für eine gegebene Frequenz ω_R kann mit (4.3.17) zunächst die Größe S_m und anschließend mit (4.3.16) die Wellenzahl α_m berechnet werden. Die Wellenzahl β_m in x_2 -Richtung geht in die Berechnung von S_m mit ein. β_m ist in beiden Bezugssystem gleich und entspricht dem Wert ohne Strömung.

Eine reguläre Wellenausbreitung liegt vor, falls die Wellenzahl α_m rein reell ist, also bei $\Im\{\alpha_m\} = 0$. Dies ist gegeben, falls $\Im\{S_m\} = 0$ ist. Damit muß für reguläre Wellenausbreitung der Ausdruck unter der Wurzel in (4.3.17) größer oder gleich Null sein. Dies bedeutet

$$1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R}\right)^2 (1 - M^2) \geq 0 \quad (4.3.18)$$

oder nach einigen Umformungen

$$\omega_R \geq \beta_m c \sqrt{1 - M^2} \equiv \omega_{C,m} \quad (4.3.19)$$

Dabei ist mit $\omega_{C,m}$ wieder die Cut-Off-Frequenz der Mode m bezeichnet. Die Cut-Off-Frequenz unterscheidet sich von der im Fall ohne Strömung durch den Faktor $\sqrt{1 - M^2}$. Beschränkt man sich auf Unterschallströmungen mit $M < 1$, so wird durch die Strömung die Cut-Off-Frequenz abgesenkt. Daß bedeutet, mit Strömung sind eventuell Moden ausbreitungsfähig, die ohne Strömung abklingen würden. Dies ist bei praktischen Anwendungen zu beachten, da oft eine Ausbreitung höherer Moden unerwünscht ist.

Mit der Cut-Off-Frequenz kann die Größe S_m als

$$S_m = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{C,m}}{\omega_R}\right)^2} \quad (4.3.20)$$

dargestellt werden. Diese Beziehung wird weiter unten noch benötigt.

Durch α_m wird die Form der Mode festgelegt. In den unterschiedlichen Frequenzbereichen ergeben sich verschiedene Typen von Lösungen. Im folgenden werden einige Fälle diskutiert.

Fall a) $\omega_R < \omega_{C,m}$ und $M < 1$

In diesem Fall ist die Mode m nicht ausbreitungsfähig. Ohne Strömung ist die Wellenzahl α_m für die nicht ausbreitungsfähigen Moden rein imaginär, also $\Re\{\alpha_m\} = 0$. Mit Strömung ergibt sich jetzt aber ein von Null verschiedener Realteil. Die Größe S_m wird rein imaginär, und nach (4.3.16) gilt

$$\Re\{\alpha_m\} < 0 \quad (4.3.21)$$

und

$$\Im\{\alpha_m\} \neq 0 \quad (4.3.22)$$

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

Die Lösung, die der Beobachter im ruhenden System sieht, ist mit

$$p'_R(\vec{x}_R, t) = G(x_2) e^{i(\omega_R t - \alpha_m x_{1,R})} \quad (4.3.23)$$

gegeben. Dadurch, daß sowohl Real- und Imaginärteil von α_m von Null verschieden sind, besitzt die Lösung eine etwas kompliziertere Form als im Fall ohne Strömung. Spaltet man die Wellenzahl mit

$$\alpha_m = \Re\{\alpha_m\} + i \Im\{\alpha_m\} \quad (4.3.24)$$

auf, und setzt dies in (4.3.23) ein ergibt sich

$$p'_R(\vec{x}_R, t) = G(x_2) \cdot \underbrace{e^{i(\omega_R t - \Re\{\alpha_m\} x_{1,R})}}_{\text{laufende Welle}} \cdot \underbrace{e^{\Im\{\alpha_m\} x_{1,R}}}_{\substack{\text{Abklingen od.} \\ \text{Anfachen}}} \quad (4.3.25)$$

Der Faktor $e^{\Im\{\alpha_m\} x_{1,R}}$ beschreibt ein Abklingen oder ein Anfachen, je nach Vorzeichen von $\Im\{\alpha_m\}$ beziehungsweise S_m . Der zweite Faktor $e^{i(\omega_R t - \Re\{\alpha_m\} x_{1,R})}$ beschreibt eine Wellenausbreitung, die wegen $\Re\{\alpha_m\} < 0$ in negative x_1 -Richtung läuft. Die Wellenbewegung ist dem Abklingen überlagert. Die Abbildung 4.10 zeigt am Beispiel

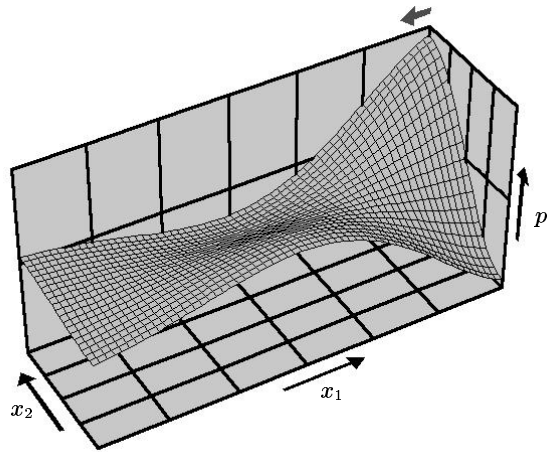


Abbildung 4.10.: Nicht ausbreitungsfähige Mode der Ordnung $m = 1$ im Kanal mit Strömung ($M = 0.5$ und $\lambda/H = 2.35$)

$m = 1$ die Form einer solchen Lösung. Sie klingt in negativer x_1 -Richtung ab. In dem Beispiel ist $\Im\{\alpha_m\} > 0$. Daß bedeutet, es ist die sogenannte “-”-Welle – die Lösung für die negative Wurzel in (4.3.17) – dargestellt. In x_2 -Richtung ist die gesamte Kanalbreite H zu sehen. In x_1 -Richtung ist eine Strecke von $3H$ herausgegriffen.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Anschaulich kann man sich die überlagerte Wellenbewegung in der Lösung mit Strömung auch plausibel machen. Wird durch ein Lautsprecher in der Kanalwand eine nicht ausbreitungsfähige Mode angeregt, so klingt die Lösung im Fall ohne Strömung nach beiden Seiten einfach ab. Bei Strömung wird jedoch die Schallenergie in dem angeregten Wellenfeld vor dem Lautsprecher ständig stromabwärts durch die Grundströmung fortbewegt. Weit entfernt von dem Lautsprecher wird die Amplitude der Mode beliebig klein. Es kann in der abklingenden Mode im Mittel daher keine Schallenergie transportiert werden. Da auch kein Austausch von Schallenergie mit anderen Moden oder ein Ansammeln von Energie an irgendeinem Punkt stattfindet, muß überall – auch im Bereich vor dem Lautsprecher – im zeitlichen Mittel der Energiefluß verschwinden. Die überlagerte Wellenbewegung transportiert Schallenergie entgegen der Strömung. Sie kompensiert so den Energietransport durch die Grundströmung.

Fall b) $\omega_R > \omega_{c,m}$ und $M < 1$

In diesem Fall ist nach (4.3.20) S_m und damit auch α_m rein reell. Daß bedeutet, die Mode m ist ausbreitungsfähig. Betrachtet man die Phasengeschwindigkeit der Moden im ruhendem Bezugssystem

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega_R}{\alpha_m} \quad (4.3.26)$$

ergibt sich mit (4.3.16)

$$c^{\text{ph}} = c \cdot \frac{(1 - M^2)}{(S_m - M)} \quad (4.3.27)$$

Aus der Bedingung, daß $\omega_R > \omega_{c,m}$ ist, folgt nach Gleichung (4.3.20)

$$0 < |S_m| < 1 \quad (4.3.28)$$

Interessant ist der Bereich in dem

$$|S_m| < M \quad (4.3.29)$$

gilt. Dort ist $c^{\text{ph}} < 0$ unabhängig von dem Vorzeichen von S_m . Daß heißt, beide Lösungen – die “+” und die “-”-Welle – breiten sich scheinbar entgegen der Strömungsrichtung aus. Ein solches Phänomen gibt es im Fall ohne Strömung nicht. Aus (4.3.17) folgt, daß

$$\frac{\beta_m c}{\omega_R} > 1 \quad (4.3.30)$$

gelten muß, damit $|S_m| < M$ erfüllt ist. Das ist gerade die Cut-Off-Bedingung ohne Strömung. Es ist also in dem Zwischenbereich

$$\beta_m c \sqrt{1 - M^2} < \omega_R < \beta_m c \quad (4.3.31)$$

die Mode m zwar ausbreitungsfähig (obwohl sie ohne Strömung nicht ausbreitungsfähig ist), jedoch ergeben sich nur Wellen entgegen der Strömungsrichtung.

Betrachtet man die Gruppengeschwindigkeit

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega_R}{d\alpha_m} \quad (4.3.32)$$

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

der Mode m , so ergibt sich

$$c^{\text{gr}} = c \frac{(1 - M^2) \cdot S_m}{1 - MS_m} \quad (4.3.33)$$

Die Herleitung dieser Beziehung ist im Anhang B.1 ausführlich dargestellt. Für $M < 1$ und wegen $0 < |S_m| < 1$ ist der Nenner auf der rechten Seite von (4.3.33) immer positiv. Ebenso ist die runde Klammer im Zähler größer Null. Daß heißt, die Gruppengeschwindigkeit hat das gleiche Vorzeichen wie S_m . Es tritt in dem Zwischenbereich nach (4.3.31) also der interessante Fall ein, daß die “+”-Welle negative Phasengeschwindigkeit und positive Gruppengeschwindigkeit besitzt. Die Wellenberge bewegen sich gegen die Strömung, aber Information breitet sich in Strömungsrichtung aus. Für $\omega_R > \beta_m c$ wird $|S_m| > M$. Die Phasengeschwindigkeit nach (4.3.27) wechselt dann auch mit S_m das Vorzeichen. Damit stimmen die Vorzeichen der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit wieder überein.

Die Abbildung 4.11 zeigt für den Fall $m = 1$ das Verhalten der Wellenzahl α_m in Abhängigkeit der Frequenz im ruhenden Bezugssystem. Im oberen Teil des Bildes ist der Realteil und im unteren Teil der Imaginärteil aufgetragen. Beide Werte sind mit der Kanalbreite H normiert. Entsprechend ist die Frequenz mit H/c normiert. Dadurch gilt die Darstellung für beliebige Kanalbreiten und Schallgeschwindigkeiten.

Die durchgezogene Linie entspricht dem Fall ohne Strömung, also $M = 0$. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für $M = 0.5$. Der Punkt 7 markiert den Verzweigungspunkt der durchgezogenen Kurven. Er liegt bei der Cut-Off-Frequenz für den Fall ohne Strömung. Dort wo die gestrichelte Kurven verzweigen liegt die Cut-Off-Frequenz für den Fall mit Strömung. In dem Zwischenbereich, zum Beispiel an den Punkten 3 und 6, ergeben sich zwei reelle aber negative α_m . Daß heißt, dort laufen beide Wellen entgegen der Strömung mit $c^{\text{ph}} < 0$. Die Punkten 8 und 9 repräsentieren Lösungen, die sich auch bei Strömung in beide Richtungen ausbreiten. Die Punkte 4 und 5 entsprechen abklingenden beziehungsweise anfachenden Lösungen mit einer überlagerten Wellenbewegung. Der Punkt 2 steht für eine abklingenden beziehungsweise anfachenden Lösungen ohne Grundströmung und damit auch ohne überlagerten Wellenbewegung. Letztlich markiert der Punkt 1 eine sich regulär ausbreitende Welle ohne Grundströmung.

Bisher wurden zwei Fälle betrachtet, in denen Unterschallströmung im Kanal vorlag. Einmal war die Frequenz unterhalb der “Cut-Off”-Frequenz und einmal oberhalb. Als drittes soll die Situation bei Überschallströmung diskutiert werden.

Fall c) $M > 1$ Überschallströmung

Bei $M > 1$ kann der Ausdruck unter der Wurzel in (4.3.17) nicht mehr negativ werden, da $(1 - M^2) < 0$ gilt. Daß bedeutet, die Größe S_m und damit auch α_m ist unabhängig von der Frequenz immer reell. Zusätzlich gilt

$$|S_m| > 1 \quad (4.3.34)$$

Bei Überschall gibt es also keine “Cut-Off”-Bedingung, wie bei Unterschall. Alle Moden sind ausbreitungsfähig.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

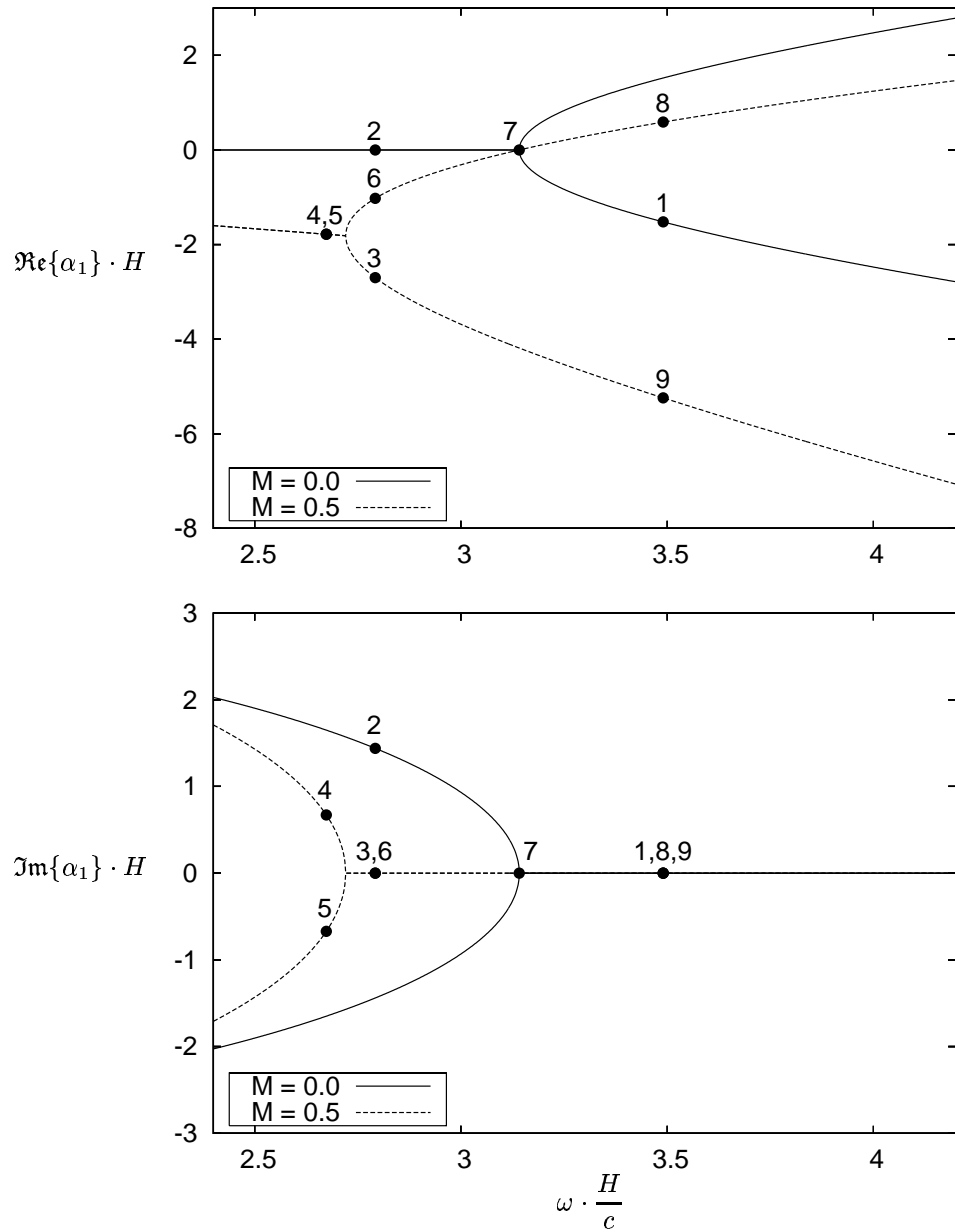


Abbildung 4.11.: Komplexe Wellenzahl α_1 in Abhängigkeit der Frequenz ω im kanalfesten Bezugssystem; Ohne Strömung: durchgezogene Linien; Mit Strömung ($M = 0.5$): gestrichelte Linie

4.4. Kanal mit schallweichen Wänden

Ein interessantes Detail zeigt sich, wenn man die Phasengeschwindigkeit

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega_{\text{R}}}{\alpha_m} = c \cdot \frac{(1 - M^2)}{(S_m - M)} \quad (4.3.35)$$

der Moden betrachtet. In dem Bereich, in dem

$$1 < |S_m| < M \quad (4.3.36)$$

gilt, ist $c^{\text{ph}} > 0$ für die “+”- und die “-”-Welle. Daß heißt, beide Wellen laufen in Strömungsrichtung, wie man es bei Überschallströmung erwartet. Für den Fall

$$|S_m| > M > 1 \quad (4.3.37)$$

ergibt sich jedoch eine Welle mit negativer Phasengeschwindigkeit $c^{\text{ph}} < 0$, die gegen die Überschallströmung läuft. Nach (4.3.17) ist Ungleichung (4.3.37) erfüllt, falls für die Frequenz

$$\omega_{\text{R}} < \beta_m c \quad (4.3.38)$$

gilt. Für die Grundmode $m = 0$ ist diese Bedingung nicht erfüllbar, da $\beta_0 = 0$ ist. Für alle $m > 0$ gibt es einen Frequenzbereich, in dem für eine Welle die Phasengeschwindigkeit $c^{\text{ph}} < 0$ ist. Es stellt sich die Frage, ob sich Information in den höheren Moden gegen die Überschallströmung ausbreiten kann. Dies kann beantwortet werden, wenn man die Gruppengeschwindigkeit betrachtet. Für $S_m > 0$ sind Nenner und Zähler in (4.3.33) negativ, und für $S_m < 0$ sind beide positiv (wegen $|S_m| > 1$). Es ergibt sich in beiden Fällen eine positive Gruppengeschwindigkeit $c^{\text{gr}} > 0$. Daß heißt, keine Information breitet sich gegen die Überschallströmung aus.

4.4. Kanal mit schallweichen Wänden

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde von einem Kanal mit festen undurchlässigen Wänden ausgegangen. Im Abschnitt 3.1 wurden bereits nachgiebige Wände betrachtet. Die Überlegungen dort gingen von eindimensionaler Wellenausbreitung aus, jedoch lassen sich einige Resultate auf den mehrdimensionalen Fall direkt übertragen. Die bisher angenommenen festen Wände sind undurchdringlich. Die Schnellekomponente senkrecht zur Wand ist immer gleich Null. Dies entspricht einer Wandimpedanz $Z_{\text{W}} = \infty$. Die Wand ist schallhart. Bei schallweichen Wänden ist die Wandimpedanz $Z_{\text{W}} = 0$, und der Schalldruck an der Wand verschwindet. Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Schallausbreitung in einem Kanal mit schallweichen Wänden von der bisher betrachteten bei schallharten Wänden unterscheidet. Bis auf die Art der Wand ist die geometrische Situation mit der in Abschnitt 4.1 vergleichbar. Die Abbildung 4.12 zeigt das Koordinatensystem im Kanal. Die Kanalbreite ist H . Es werden Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{mit } j = 1, 2 \quad (4.4.1)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

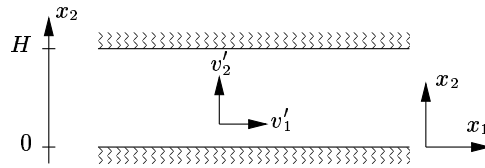


Abbildung 4.12.: Koordinaten im Kanal mit schallweichen Wänden

gesucht. Die Lösungen sollen die Randbedingungen

$$p'(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.4.2)$$

erfüllen. Im Gegensatz zum Fall mit schallharten Wänden müssen die Randbedingungen nicht erst mit der linearisierten Euler-Gleichung in Bedingungen für den Schalldruck umgewandelt werden. Denn mit (4.4.2) ist schon eine Bedingung an den Druck gegeben. Es wird der gleiche Lösungsansatz

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1) \cdot g(x_2) \cdot e^{i\omega t} \quad (4.4.3)$$

wie bisher verwendet. Es ergibt sich wieder

$$-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx_1^2} = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx_2^2} = -\beta^2 \quad (4.4.4)$$

Die Größe β ist eine zu bestimmende Konstante. Der zweite Teil von (4.4.4) stellt eine Differentialgleichung für $g(x_2)$ dar. Deren allgemeine Lösung lautet

$$g(x_2) = A_2 \cos(\beta x_2) + B_2 \sin(\beta x_2) \quad (4.4.5)$$

Bis zu diesem Punkt unterscheidet sich der Lösungsweg nicht von dem Fall mit schallharten Wänden. Jetzt müssen jedoch die Größen A_2 , B_2 und β so gewählt werden, daß die Randbedingungen (4.4.2) an den schallweichen Wänden erfüllt werden. Dazu muß erreicht werden, daß

$$g(x_2) = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.4.6)$$

gilt. Die Bedingung (4.4.6) wird erfüllt, wenn man $A_2 = 0$ setzt und

$$\beta = \beta_m = \frac{m\pi}{H} \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.7)$$

wählt. Es ergibt sich

$$g(x_2) = B_2 \sin\left(\frac{m\pi}{H} x_2\right) = B_2 \sin(\beta_m x_2) \quad (4.4.8)$$

Der formale Unterschied zum Resultat bei schallharten Wänden besteht lediglich in dem Sinus- statt dem Cosinus-Ausdruck. Die schallharten Randbedingungen fordern,

4.4. Kanal mit schallweichen Wänden

daß $B_2 = 0$ ist – statt wie hier $A_2 = 0$. Die Größe β ist in beiden Fällen gleich. Der Unterschied ist praktisch nur eine “Verschiebung” von $g(x_2)$ um $\pi/2$.

Aus (4.4.4) folgt für $f(x_1)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right] f = 0 \quad (4.4.9)$$

Diese Gleichung ist mit (4.1.18) aus Abschnitt 4.1 identisch. Für die Funktion $f(x_1)$ wird wieder der Ansatz

$$f(x_1) = A_1 e^{-i\alpha x_1} + B_1 e^{i\alpha x_1} \quad (4.4.10)$$

verwendet. Daraus ergibt sich

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2} = \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \equiv \alpha_m \quad (4.4.11)$$

Wie die Größen β_m ist daher auch die Wellenzahl α_m für alle Moden die gleiche wie im Kanal mit schallharten Wänden. Die Lösung für das Druckfeld hat die Form

$$p'(\vec{x}, t) = B_2 \sin(\beta_m x_2) \left[A_1 e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_m x_1)} \right] \quad (4.4.12)$$

Diese Lösung beschreibt eine reguläre Wellenausbreitung, falls α_m reell ist. Es ergeben sich die gleichen Cut-Off-Bedingungen für die einzelnen Moden wie im Fall mit schallharten Wänden. Die Mode m breitet sich regulär aus, falls

$$\omega > \beta_m c \equiv \omega_{c,m} \quad (4.4.13)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\omega_{c,m}$ die Cut-Off-Frequenz.

In der Abbildung 4.13 sind die Unterschiede der Lösung im schallharten und schallweichen Fall am Beispiel der Mode $m = 2$ gegenübergestellt. Die Bilder zeigen das Druckfeld in einem Ausschnitt, der sich in x_2 -Richtung über die gesamte Kanalbreite H erstreckt. Die Länge des Ausschnitts in x_1 -Richtung entspricht $3H$. Bei schallharten Wänden hat das Druckfeld gerade an der Kanalwand die maximalen Auslenkungen. Im Fall schallweicher Wand ist dagegen die Druckschwankung an der Wand Null. Die Lösung ist praktisch in x_2 -Richtung verschoben.

Der Hauptunterschied zwischen den beiden Fällen zeigt sich, wenn man die Grundmode $m = 0$ betrachtet. Bei schallharten Wänden ergab sich bei $m = 0$ gerade eine ebene Welle in x_1 -Richtung. Jetzt wird jedoch bei $m = 0$ wegen $\beta_0 = 0$ auch $g(x_2) = 0$ für alle x_2 . Daß heißt, für $m = 0$ ergibt sich die triviale Lösung $p'(\vec{x}, t) = 0$. Es existiert also gar keine Grundmode, die sich ausbreitet. Daraus folgt, daß in einem Kanal mit schallweichen Wänden sich unterhalb der Cut-Off-Frequenz der ersten Mode

$$\omega_{c,1} = \frac{c\pi}{H} \quad (4.4.14)$$

überhaupt keine Moden ausbreiten können. Findet an einer Stelle im Kanal eine Anregung statt, klingt die gesamte Störung nur exponentiell ab, falls die Frequenz entsprechend gering ist. Erst oberhalb der Frequenz $\omega_{c,1}$ ist eine Wellenausbreitung möglich.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

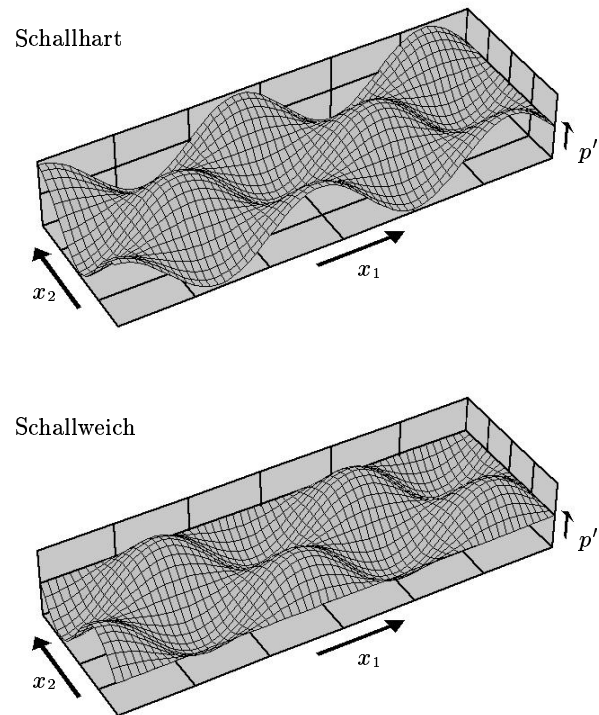


Abbildung 4.13.: Gegenüberstellung der Mode $m = 2$ bei unterschiedlichen Wand-eigenschaften; $\omega = 2\pi c/(0.8H)$