# 2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

## 2.1. Herleitung der Wellengleichung

Ausgangspunkt für die Herleitung der Wellengleichung sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Sie werden hier als gegeben vorausgesetzt. Die folgenden drei Gleichungen werden benötigt:

a) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.1.1}$$

b) Euler-Gleichung

$$\rho \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\operatorname{grad} p \tag{2.1.2}$$

c) Druck-Dichte-Beziehung

$$p = p(\rho) \tag{2.1.3}$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Massenerhaltung im Fluid. Sie gilt in der Form (2.1.1) falls keine Massenquellen oder Senken im Feld vorhanden sind. Die Euler-Gleichung (2.1.2) beschreibt die Impulserhaltung. Sie gilt so für ein reibungsfreies Fluid ohne Volumenkräfte. Daß bedeutet, daß hier die Reibungs- und Volumenkräfte vernachlässigt werden. Beide Erhaltungsgleichungen (2.1.1) und (2.1.2) können durch eine Bilanzierung der Masse und des Impulses an einem Kontrollvolumen hergeleitet werden. Es ergeben sich dann zunächst integrale Beziehungen, aus denen die angegebenen Differentialgleichung abgeleitet werden können.

Die konkrete Form der Druck-Dichte-Beziehung (2.1.3) ist zunächst nicht von Bedeutung. Sie hängt davon ab, ob es sich bei dem Fluid um ein Gas oder eine Flüssigkeit handelt. Zunächst ist lediglich die Existenz der Beziehung mit der angegebenen Abhängigkeit bei der Herleitung der Wellengleichung vorauszusetzen. Der Druck darf nicht von weiteren Größen, wie zum Beispiel der Geschwindigkeit oder Geschwindigkeitsgradienten, abhängen. Er ist lediglich eine Funktion der momentanen Dichte. Damit sind auch Fälle, in denen mit Relaxation behaftete Prozesse – wie zum Beispiel Kondensation – das Verhältnis von Druck und Dichte beeinflussen, ausgeschlossen.

Zur Herleitung der linearen Wellengleichung werden die Gleichungen (2.1.1) bis (2.1.3) zunächst linearisiert. Dazu werden die Zerlegungen in Gleich- und Schwankungsanteile

$$p = p_0 + p' \tag{2.1.4}$$
$$\rho = \rho_0 + \rho' \tag{2.1.5}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' \equiv \vec{v}\,' \tag{2.1.6}$$

eingesetzt. Anschließend werden alle Terme höherer Ordnung in den gestrichenen Größen vernachlässigt.

Bei der Zerlegung (2.1.6) wird vorausgesetzt, daß sich das Fluid im Ruhezustand $\vec{v}_0 = 0$ befindet und alle Bewegungen nur durch die Schwankungen verursacht werden. Im Prinzip könnte auf den Strich an dem Symbol $\vec{v}$ verzichtet werden, da hier nur eine Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}\,'$ vorkommt und keine Verwechslungsgefahr besteht. Es wird dennoch $\vec{v}\,'$ geschrieben, um zu verdeutlichen, daß es sich um eine Schwankungsgröße handelt.

Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich nach dem Einsetzen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \operatorname{div}\big[(\rho_0 + \rho')\vec{v}\,'\big] = 0 \tag{2.1.7}$$

Die Größe $\rho_0$ ist eine Konstante. Ihre Zeitableitung verschwindet. Dies vereinfacht den ersten Term. In den eckigen Klammern steht die Summe $\rho_0\vec{v}\,' + \rho'\vec{v}\,'$. Wenn $|\rho'| \ll \rho_0$ gilt, dann ist der zweite Summand viel kleiner als der Erste. Entsprechend wird der zweite Summand einfach nicht mehr berücksichtigt. Es folgt die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\vec{v}\,' = 0} \tag{2.1.8}$$

Dabei wurde die Konstante $\rho_0$ vor den div-Operator gezogen.

In Gleichung (2.1.2) tritt die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit auf. Allgemein gilt

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}\,'}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t} + \vec{v}\,' \operatorname{grad}\vec{v}\,' \tag{2.1.9}$$

Damit folgt aus der Euler-Gleichung (2.1.2) nach dem Einsetzen der Zerlegungen (2.1.4) bis (2.1.6) die Beziehung

$$(\rho_0 + \rho')\left[\frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t} + \vec{v}\,' \operatorname{grad}\vec{v}\,'\right] = -\operatorname{grad}(p_0 + p') \tag{2.1.10}$$

Wie zuvor werden nur noch lineare Terme in den Schwankungsgrößen berücksichtigt. Alle Produkte von zwei gestrichen Größen einschließlich deren Ableitungen – also auch die Produkte einer gestrichen Größe mit der Ableitung einer gestrichen Größe – werden einfach fortgelassen. Zusätzlich verschwindet auf der rechten Seite der Gradient der

Konstanten $p_0$. Als linearisierte Euler-Gleichung ergibt sich

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, p'} \qquad (2.1.11)$$

Da die Druck-Dichte-Beziehung (2.1.3) nicht konkret gegeben ist, kann sie nicht auf die gleiche Weise linearisiert werden. Stattdessen wird sie mit

$$p(\rho) = p(\rho_0) + (\rho - \rho_0)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0) + \ldots \qquad (2.1.12)$$

in eine Taylor-Reihe entwickelt. Wird $p_0 = p(\rho_0)$ auf die linke Seite gebracht, liefert Einsetzen und Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung die Beziehung

$$p' = \rho'\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0) \qquad (2.1.13)$$

Die auftretende Ableitung wird mit

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0) = c^2 \qquad (2.1.14)$$

abgekürzt. Später wird sich zeigen, daß die so definierte Größe $c$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen – also die Schallgeschwindigkeit – darstellt. Die linearisierte Druck-Dichte-Beziehung lautet schließlich

$$\boxed{p' = \rho'\,c^2} \qquad (2.1.15)$$

Anschaulich ist dies eine Geradengleichung für die Tangente an die Kurve $p(\rho)$ an der Stelle $\rho_0$. Die Steigung der Geraden ist durch den Faktor $c^2$ gegeben.

Die linearisierten Gleichungen (2.1.8), (2.1.11) und (2.1.15) stellen nur unter bestimmten Voraussetzungen gute Approximationen der nichtlinearen Beziehungen dar. In jedem Fall muß gelten, daß die Amplituden der Störungen klein gegen den Gleichanteil sind:

$$|p'| \ll p_0\ ; \quad |\rho'| \ll \rho_0 \qquad (2.1.16)$$

Dies ist jedoch nicht ausreichend, da auch Ableitungen der Schwankungsgrößen in den weggelassenen Termen höherer Ordnung vorkommen. Zum Beispiel tritt in dem Ausdruck in der eckigen Klammer in Gleichung (2.1.10) als Term erster Ordnung die Zeitableitung $\partial \vec{v}\,'/\partial t$ auf, und das Produkt $\vec{v}\,' \cdot \mathrm{grad}\, \vec{v}\,'$ ist ein quadratischer Term. Theoretisch ist es möglich, daß $\vec{v}\,'$ räumlich stark schwankt, während die zeitlichen Änderungen relativ klein sind. Der Gradient von $\vec{v}\,'$ könnte stellenweise so groß werden, das der quadratische Term gegenüber der Zeitableitung nicht zu vernachlässigen ist. Tatsächlich sind die zeitlichen und räumlichen Ableitungen nicht unabhängig voneinander, und eine solche Situation tritt normalerweise in Schallfeldern nicht auf. Um dies zu Begründen ist allerdings ein Wissen über die Lösungen der betrachteten Gleichungen nötig. Das kann an dieser Stelle noch nicht vorausgesetzt werden. Stattdessen werden hier weitere Bedingungen an die Schallfelder gestellt, die für eine gute Approximation notwendig sind.

Die charakteristische Länge der Störungen wird mit $l$ und deren charakteristische Zeit mit $\tau$ bezeichnet. Die Länge $l$ entspricht zum Beispiel dem typischen Abstand benachbarter Maxima. Entsprechend ist $\tau$ die typische Zeitspanne zwischen zwei maximalen Auslenkungen. Damit können die Größenordnung der Ableitungen der Schwankungsgrößen angegeben werden. Sei $\psi'$ eine beliebige Schwankungsgröße (z.B. $p$, $\rho'$ oder Komponente von $\vec{v}\,'$) so ist die räumliche Ableitung $\partial\psi'/\partial x_i$ von der Größenordnung $\psi'/l$. Die Zeitableitung $\partial\psi'/\partial t$ ist von der Größenordnung $\psi'/\tau$. Je dichter die Maxima beisammen liegen, desto größer sind die Ableitungen bei gleicher Amplitude.

Mit den charakteristischen Größen lassen sich nun Zusatzbedingungen formulieren, die erfüllt sein müssen, damit die linearisierten Gleichungen eine brauchbare Approximation darstellen. Die Bedingungen lauten:

$$|\vec{v}\,'| \ll \frac{l}{\tau} \tag{2.1.17}$$

$$|p'| \ll \rho_0 \left(\frac{l}{\tau}\right)^2 \tag{2.1.18}$$

$$\frac{|\rho'|}{\rho_0} \ll \frac{2c^2}{\rho_0 \left|\frac{d^2p}{d\rho^2}(\rho_0)\right|} \tag{2.1.19}$$

Im Allgemeinen stellen die Bedingungen (2.1.17) bis (2.1.19) keine echte Einschränkung des Gültigkeitsbereichs der Linearisierung dar. Falls eine der Bedingungen verletzt ist, werden auch fast immer die Grundbedingungen (2.1.16) nicht erfüllt. Dies ist zum Beispiel in Fokuspunkten oder in der Nähe von lokalisierten Schallquellen der Fall.

Um die Wellengleichung für den Schalldruck zu erhalten wird die linearisierte Kontinuitätsgleichung (2.1.8) nach der Zeit abgeleitet. Es ergibt sich nach Vertauschen der Zeitableitung mit der Divergenz

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{v}\,'}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.1.20}$$

Die Divergenz wird von der linearisierten Euler-Gleichung (2.1.11) gebildet. Man erhält

$$\rho_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{v}\,'}{\partial t}\right) + \operatorname{div}\operatorname{grad} p' = 0 \tag{2.1.21}$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, fallen die Terme mit $\vec{v}\,'$ heraus. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - \Delta\, p' = 0 \tag{2.1.22}$$

Dabei ist der Laplace-Operator $\Delta$ als Abkürzung für die Kombination "div grad" eingeführt worden. Hier sei angemerkt, daß in der angelsächsischen Literatur die Schreibweise $\nabla^2$ für den Laplace-Operator üblich ist.

Schließlich kann $\rho'$ mit Hilfe der linearisierten Druck-Dichte-Beziehung (2.1.15) durch $p'$ ersetzt werden. Man erhält die Wellengleichung für den Schalldruck

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta\, p' = 0} \tag{2.1.23}$$

Diese beschreibt die Ausbreitung kleiner Störungen (im Sinne von (2.1.16)), wenn sich das Medium in Ruhe befindet.

## 2.2. Einfache Lösungen

Eine der einfachsten Lösungen der Wellengleichung stellt die eindimensionale Wellenausbreitung dar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß sich die Wellen in $x_1$-Richtung ausbreiten. Alle Bewegungen, die durch die Welle verursachst werden sind in dieser Richtung: $v_2 = 0$, $v_3 = 0$. Die Lösung hat die allgemeine Form

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct) \tag{2.2.1}$$

$f$ und $g$ sind beliebige Funktionen, die jedoch mathematisch "gutartig" sein müssen. Dies sind zum Beispiel alle Funktionen die zweimal differenzierbar sind. Allerdings wird in einem späteren Abschnitt noch gezeigt, daß es durchaus sinnvoll ist, auch Funktionen mit Sprungstellen als Lösungen der Wellengleichung zuzulassen. Der Begriff "gutartig" wird dann in diesem Zusammenhang noch weiter erläutert.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Druckverteilung 2.2.1 auch tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung ist. Dazu werden die beiden Hilfsgrößen

$$\xi = \xi(x_1, t) = x_1 - ct \tag{2.2.2}$$

und

$$\eta = \eta(x_1, t) = x_1 + ct \tag{2.2.3}$$

eingeführt. Sie entsprechen den Argumenten der Funktionen $f$ und $g$ in dem Ausdruck 2.2.1. Es kann damit $f(x_1 - ct) = f(\xi)$ und $g(x_1 + ct) = g(\eta)$ geschrieben werden. Zur Überprüfung muß die Lösung zweimal nach der Zeit $t$ und der Ortskoordinate $x_1$ differenziert werden. Die Ableitungen nach $x_2$ und $x_3$ sind gleich Null.

Zunächst wird nur der Ausdruck $f(x_1 - ct)$ betrachtet und die Zeitableitung gebildet. Zu bedenken ist, daß die Funktion $f$ nur von einer Variablen abhängt. Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f(x_1 - ct)\} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(x_1 - ct) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

Die partielle Ableitung $\partial\xi/\partial t$ ist gleich $-c$. So kann

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f(x_1 - ct)\} = -c\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(x_1 - ct) \tag{2.2.5}$$

geschrieben werden. Nochmaliges Anwenden der Kettenregel ergibt für die zweite Zeitableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f(x_1 - ct)\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{-c\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(x_1 - ct)\right\} = c^2\,\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2}(x_1 - ct) \tag{2.2.6}$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{g(x_1 + ct)\} = c^2\,\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\eta^2}(x_1 + ct) \tag{2.2.7}$$

Es folgt schließlich für die zweite Zeitableitung der Lösung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}(x_1 - ct) + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\eta^2}(x_1 + ct) \tag{2.2.8}$$

Die räumlichen Ableitungen besitzen eine etwas einfachere Gestalt, da $\partial\xi/\partial x_1$ und $\partial\eta/\partial x_1$ beide gleich Eins sind. Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\{f(x_1 - ct)\} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2}(x_1 - ct) \tag{2.2.9}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\{g(x_1 - ct)\} = \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\eta^2}(x_1 + ct) \tag{2.2.10}$$

Damit erhält man

$$\Delta p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}(x_1 - ct) + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\eta^2}(x_1 + ct) \tag{2.2.11}$$

Setzt man die Zeitableitung (2.2.8) und die räumliche Ableitung (2.2.11) in die Wellengleichung (2.1.23) ein, zeigt sich sofort die Richtigkeit der Lösung unabhängig von der konkreten Form der Funktionen $f$ und $g$.

Eine Lösung der Form (2.2.1) wird ebene Welle genannt. Der Ausdruck "eben" besagt, daß die Wellenfronten ebene Flächen sind, und hat nichts mit einer Lösung im 2D-Fall zu tun. Anschaulich ist die Lösung eine Überlagerung aus einfachen Bewegungen in und entgegen der $x_1$-Richtung mit der Geschwindigkeit $c$. Die Abbildung 2.1 illustriert ein Beispiel für den Fall $g = 0$. Die Funktion $f$ beschreibt einen Hügel, der sich zur Zeit $t = t_0$ an einer bestimmten Stelle befindet. Zum späteren Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ hat sich der Hügel um die Strecke $\Delta x = c\,\Delta t$ in $x_1$-Richtung verschoben ohne sich zu verformen. Formal kann die Verschiebung der Druckverteilung mit der Zeit durch

$$p'(x_1, t_0 + \Delta t) = p'(x_1 - \Delta x, t_0) \tag{2.2.12}$$

ausgedrückt werden. Hier ist vereinfachend – entsprechend der obigen Annahme – der Druck mit $p'(x_1, t)$ nur von einer Ortskoordinate abhängig dargestellt. Im betrachteten Fall für $g = 0$ ist (2.2.12) gleichbedeutend mit

$$f\big(x_1 - c(t_0 + \Delta t)\big) = f\big((x_1 - \Delta x) - ct_0\big) \tag{2.2.13}$$

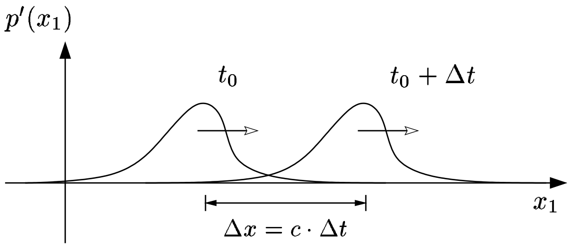


Abbildung 2.1.: Ausbreitung eines Pulses

Hinreichende Bedingung für diese Gleichung ist

$$x_1 - c(t_0 + \Delta t) = (x_1 - \Delta x) - ct_0 \tag{2.2.14}$$

Und dies ist für $\Delta x = c\Delta t$ erfüllt.

Setzt man $f = 0$ statt $g = 0$, so ergibt sich aus (2.2.1) eine Bewegung entgegen der $x_1$-Richtung. Beschreibt die Funktion $g$ wieder einen Hügel, wie in Abbildung 2.1 dargestellt ist, dann verschiebt sich der Hügel mit der Zeit nach links statt nach rechts. Die Summe in (2.2.1) stellt somit eine Überlagerung von links- und rechtslaufenden Wellen dar. Alle möglichen Lösungen der Wellengleichung, die die genannte Bedingung der Eindimensionalität in $x_1$-Richtung erfüllen ($v_2 = 0$, $v_3 = 0$), lassen sich in der Form (2.2.1) darstellen.

## Dichte- und Schnelleverteilung

Aus einer gegebenen Druckverteilung $p'(\vec{x}, t)$ läßt sich die Dichteverteilung berechnen, indem durch $c^2$ dividiert wird:

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{p'(\vec{x}, t)}{c^2} \tag{2.2.15}$$

Für die betrachtete ebenen Welle der Form (2.2.1) ergibt sich

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2}\Big[f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct)\Big] \tag{2.2.16}$$

Komplizierter ist die Berechnung der Schnelle $\vec{v}\,'$. In der ebenen Welle nach (2.2.1) ist nur die $v_1$-Komponente von Null verschieden. Sie ist durch die linearisierte Kontinuitätsgleichung mit der Dichteverteilung verknüpft. Aus (2.1.8) folgt

$$\operatorname{div} \vec{v}\,' = \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t} \tag{2.2.17}$$

Für die zeitliche Ableitung der Dichteverteilung (2.2.16) gilt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(x_1 - ct) \cdot (-c) + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta}(x_1 + ct) \cdot c\right] \tag{2.2.18}$$

Daraus ergibt sich für die räumliche Ableitung der Schnelle

$$\frac{\partial v_1'}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho_0 c}\Big[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(x_1 - ct) - \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta}(x_1 + ct)\Big] \tag{2.2.19}$$

Die Integration dieser Gleichung über $x_1$ liefert schließlich die gesuchte Verteilung

$$v_1'(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho_0 c}\Big[f(x_1 - ct) - g(x_1 + ct)\Big] \tag{2.2.20}$$

Dabei ist eine mögliche Integrationskonstante gleich Null gesetzt worden, da ohne Schall bei $f = g = 0$ auch $\vec{v}\,' = 0$ sein muß.

## Der Wellenwiderstand

Im Spezialfall, in dem sich nur eine Welle in $x_1$-Richtung ausbreitet und $g = 0$ ist, erhält man aus (2.2.20) die Beziehung

$$v_1' = \frac{1}{\rho_0 c}\, p' \tag{2.2.21}$$

Analog ergibt sich für reine Wellenausbreitung entgegen der $x_1$-Richtung $(f = 0)$

$$v_1' = -\frac{1}{\rho_0 c}\, p' \tag{2.2.22}$$

Daß bedeutet, wenn nur Wellen in einer Richtung laufen, kann die Schnelleverteilung direkt aus einer gegebenen Druckverteilung nach Gleichung (2.2.21) oder (2.2.22) berechnet werden. Laufen jedoch Wellen in beide Richtungen, muß die Druckverteilung zuerst in die Anteile zerlegt werden, die in verschiedene Richtungen laufen. Daß heißt, die Druckverteilung muß in der Form der Gleichung (2.2.1) vorliegen. Erst dann kann daraus nach (2.2.20) die Schnelle berechnet werden.

Der Faktor $\rho_0 c$ zwischen Druck und Schnelle wird akustische Impedanz oder auch Wellenwiderstand genannt. Der Wert ist kein reeller Widerstand, der mit Dissipation verbunden ist. Der Wellenwiderstand repräsentiert vielmehr den Widerstand den die Fluidelemente der oszillatorischen Bewegung in einer Welle entgegen bringen. Bei einem höherem Wellenwiderstand ist eine entsprechend höhere Druckamplitude notwendig, um in einer Welle die gleiche Schnelle und Teilchenauslenkung zu erreichen.

Die akustische Impedanz ist analog zum Spannungs-Strom-Verhältnis in der Elektrotechnik zu sehen. Dort wird der Wellenwiderstand von Leitungen in der Einheit Ohm angegeben.

## Harmonische Welle

In einer harmonischen Welle besitzen die Größen eine sinusförmige Verteilung in Raum und Zeit. Eine harmonischen Welle, die sich in $x_1$-Richtung ausbreitet, ist zum Beispiel durch

$$p'(\vec{x}, t) = A \cos\big[\omega\big(t - \frac{x_1}{c}\big)\big] \tag{2.2.23}$$

gegeben. Wenn man das Argument der Funktion $f$ aus Gleichung (2.2.1) wieder mit

$$\xi = x_1 - ct \tag{2.2.24}$$

abkürzt, ist in dem gegebenen Beispiel die Funktion $f$ als

$$f(\xi) = A \cos\left(-\frac{\omega}{c}\xi\right) \tag{2.2.25}$$

vorgegeben. Damit stellt (2.2.23) ein Spezialfall der Druckverteilung (2.2.1) mit $g = 0$ und $f$ nach (2.2.25) dar. Im Allgemeinen wird, um eine kompaktere Darstellung zu erhalten die Wellenzahl

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.2.26}$$

eingeführt. Sie entspricht dem Verhältnis aus Kreisfrequenz $\omega$ und Schallgeschwindigkeit $c$, welches gerade umgekehrt proportional zur Wellenlänge $\lambda$ ist. Die Wellenlänge ist der räumliche Abstand der Maxima in der Welle. Damit läßt sich die Druckverteilung (2.2.23) in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = A \cos\left(\omega t - k x_1\right) \tag{2.2.27}$$

schreiben. Äquivalent dazu ist die komplexe Darstellung der Welle mit

$$p'(\vec{x}, t) = \Re\left\{A\, e^{i(\omega t - k x_1)}\right\} \tag{2.2.28}$$

Diese Form hat bei vielen Umformungen deutliche Vorteile gegenüber der reellen Schreibweise.

## 2.3. Die Schallgeschwindigkeit

### Schallgeschwindigkeit in Luft

Für ein ideales Gas kann eine theoretische Druck-Dichte-Beziehung $p(\rho)$ zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit abgeleitet werden. Dies wurde bereits im 17. Jahrhundert von Newton versucht. Er betrachtete die Zustandsänderungen in den Schallwellen fälschlicherweise isotherm und nahm eine Druck-Dichte-Beziehung der Form

$$\frac{p}{\rho} = F(T) \quad \Leftrightarrow \quad p = \rho\, F(T) \tag{2.3.1}$$

an. Dabei ist $F(T)$ eine Funktion der Temperatur $T$. Dies ergibt für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right|_{T_0} = \frac{p_0}{\rho_0} = F(T_0) \tag{2.3.2}$$

Für Luft unter Normalbedingungen bei $T_0 = 293°$ K (Grad Kelvin) erhält man damit $c \approx 290\,\mathrm{m/s}$. Dieses Ergebnis weicht deutlich von dem gemessenen Wert ab. Eine verbesserte Berechnung der Schallgeschwindigkeit wurde 1816 von Laplace gegeben. Er erkannte, daß die Schwankungen in den Schallwellen relativ schnell ablaufen und durch eine isentrope (adiabatische) Zustandänderung besser beschrieben werden. Daß bedeutet, der Temperaturausgleich durch die Wärmeleitung in der Luft ist vernachlässigbar. Es gilt die Beziehung

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa} \quad \leftrightarrow \quad p = \frac{p_0}{\rho_0^{\varkappa}}\,\rho^{\varkappa} \tag{2.3.3}$$

wobei die Größe $\varkappa$ ("Kappa") den Adiabatenexponent bezeichnet. Dieser Exponent ist durch das Verhältnis der spezifischen Wärmen $c_p$ und $c_v$ gegeben: $\varkappa = c_p/c_v$. Der Wert für Luft beträgt $\varkappa = 1.4$. Um die Schallgeschwindigkeit zu berechnen, wird die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \varkappa\,\frac{p_0}{\rho_0^{\varkappa}}\,\rho^{\varkappa-1} = \varkappa\,\frac{p}{\rho} \tag{2.3.4}$$

benötigt. Damit folgt

$$c^2 = \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right|_{T_0} = \varkappa\,\frac{p_0}{\rho_0} \tag{2.3.5}$$

Für ein thermisch ideales Gas gilt

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{2.3.6}$$

mit der spezifischen Gaskonstante $R$. Damit ergibt sich schließlich

$$c^2 = \varkappa\,R\,T_0 \tag{2.3.7}$$

Für Luft unter Normalbedingungen erhält man mit dieser Formel für die Schallgeschwindigkeit den Wert $c = 343\,\mathrm{m/s}$. Dies stimmt sehr gut mit den experimentellen Beobachtungen überein. Aus Gleichung (2.3.7) ist zusätzlich ersichtlich, das die Schallgeschwindigkeit in einem Gas proportional zur Wurzel der Temperatur ist.

## Schallgeschwindigkeit in Wasser

Die theoretische Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Wasser ist im Vergleich zum idealen Gas ungleich komplizierter. In Flüssigkeiten ist man in erster Linie auf eine experimentelle Bestimmung der Schallgeschwindigkeit angewiesen. Man verwendet häufig den Ansatz

$$c^2 = \frac{K}{\rho_0} \tag{2.3.8}$$

Dabei ist $K$ das (adiabatische) Kompressionsmodul des Wassers. Allerdings ist es relativ schwierig, $K$ direkt zu messen. Wie komplex die Vorgänge im Wasser sind wird deutlich, wenn man die Parameter betrachtet, von denen die Schallgeschwindigkeit abhängt. Dies die Temperatur, der Druck, der Salzgehalt und die Menge an gelösten Gasen. Dagegen steht bei idealen Gasen mit der Temperatur nur ein Parameter.

## 2.4. Einfluß der Schwerkraft

In schweren Flüssigkeiten – wie Wasser – ist die Druckzunahme mit der Tiefe so groß, das eine Aufspaltung des Drucks in einen Gleichanteil, der räumlich und zeitlich konstant ist, und einen kleinen Schwankungsanteil nicht möglich ist. So nimmt der Druck in Wasser mit jedem Meter Tiefe um 100 mbar zu. Der Schwankungsanteil würde diese hydrostatische Druckänderung mit enthalten. Bei einem Ruhedruck von 1000 mbar wäre selbst in geringer Tiefe die Schwankung nicht mehr klein gegenüber dem Ruhedruck. Sinnvollerweise wird ein ortsabhängiger Gleichanteil $p_0(\vec{x})$ eingeführt. Die Aufspaltung des Drucks ist damit durch

$$p(\vec{x}, t) = p_0(\vec{x}) + p'(\vec{x}, t) \tag{2.4.1}$$

gegeben. Der Gleichanteil muß die hydrostatische Beziehung

$$\operatorname{grad} p_0 = \rho_0 \, \vec{g} \tag{2.4.2}$$

erfüllen. Der Vektor $\vec{g}$ bezeichnet die Schwerebeschleunigung. Die Dichte $\rho_0$ wird dabei als räumlich konstant angenommen. Dies ist erlaubt, da die Kompressibilität des Wassers relativ gering ist, und sich die Dichte mit der Tiefe nur unwesentlich ändert.

In Abschnitt 2.1 wurde bei der Herleitung der Wellengleichung die Schwerkraft vernachlässigt. Es wurde von der Euler-Gleichung ohne Volumenkräfte ausgegengen. Um die hydrostatische Druckzunahme mit der Tiefe zu erfassen muß nun von der Euler-Gleichung mit Schwerkraftterm

$$\rho \, \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\operatorname{grad} p + \rho \, \vec{g} \tag{2.4.3}$$

ausgegangen werden. Im weiteren wird analog zu Abschnitt 2.1 vorgegangen. Einsetzen der Aufspaltungen ergibt

$$(\rho_0 + \rho') \, \frac{\mathrm{D}\vec{v}\,'}{\mathrm{D}t} = -\operatorname{grad}(p_0 + p') + (\rho_0 + \rho') \, \vec{g} \tag{2.4.4}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2.4.2) folgt nach dem Weglassen der Terme höherer Ordnung die linearisierte Euler-Gleichung bei Schwerkraft

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t} = -\operatorname{grad} p' + \rho' \, \vec{g} \tag{2.4.5}$$

Im Vergleich zum Resultat aus Abschnitt 2.1 ergibt sich ein zusätzlicher Term $\rho' \, \vec{g}$ auf der rechten Seite.

Die linearisierte Kontinuitätsgleichung gilt weiterhin in der bisherigen Form auch bei Schwerkraft. Würde man aus Gleichung (2.4.5) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung eine Wellengleichung ableiten, so würde man in dieser neuen Wellengleichung ebenfalls zusätzliche Terme erhalten. Die Wellengleichung wäre komplexer, und die bisher betrachteten Lösungen wären nicht mehr gültig.

Durch eine Abschätzung kann gezeigt werden, daß der $\rho' \, \vec{g}$-Term, obwohl er von erster Ordnung ist, unter bestimmten Bedingungen gegenüber den anderen Termen in (2.4.5) vernachlässigt werden kann. Dies wird an einer ebenen Welle untersucht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, die Wellen breitet sich in $x_1$-Richtung aus. Der Druck ist durch

$$p'(\vec{x}, t) = A \cos\big(\omega t - k x_1\big) \tag{2.4.6}$$

gegeben. Für den in Gleichung (2.4.5) auftretenden Druckgradienten gilt in diesem Fall

$$\operatorname{grad} p' = \begin{pmatrix} \partial p'/\partial x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.7}$$

Um den Gradienten abzuschätzen, wird die Ableitung von (2.4.6) nach $x_1$ gebildet:

$$\frac{\partial p'}{\partial x_1} = -A\, k \sin\big(\omega t - k x_1\big) \tag{2.4.8}$$

Damit folgt für den maximalen Wert in der Welle

$$\big|\operatorname{grad} p'\big|_{\max} = A\, k = A\,\frac{\omega}{c} = A\frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.4.9}$$

Eine entsprechende Berechnung wird für den Schwerkraftterm durchgeführt. Hier ergibt sich in der vorgegebenen Welle

$$\big|\rho'\, \vec{g}\big|_{\max} = \big|\frac{p'}{c^2}\,\vec{g}\big|_{\max} = \frac{A}{c^2}\, g \tag{2.4.10}$$

mit $g = |\vec{g}|$. Das Verhältnis der Maxima ist erwartungsgemäß unabhängig von der Amplitude $A$. Es wird durch die Wellenlänge, die Schallgeschwindigkeit und die Erdbeschleunigung bestimmt. Es gilt

$$\frac{\big|\rho'\,\vec{g}\big|_{\max}}{\big|\operatorname{grad} p'\big|_{\max}} = \frac{\lambda g}{2\pi c^2} \tag{2.4.11}$$

Für Wasser mit $c = 1450\,\mathrm{m/s}$ ergibt sich bei $1\,\mathrm{m}$ Wellenlänge ein Verhältnis von

$$\frac{\lambda g}{2\pi c^2} \approx 10^{-6} \tag{2.4.12}$$

Damit wird klar, daß der Schwerkraftterm in diesem Fall, ohne einen großen Fehler zu erhalten, vernachlässigt werden kann. Sowohl für Wasser als auch für Luft mit $c = 340\,\mathrm{m/s}$ ist der Schwerkraftterm erst für sehr große Wellenlängen – weit außerhalb des hörbaren Bereichs – von Bedeutung. In diesem Fall ändert sich die Wellenausbreitung und es ergeben sich Gravitationswellen. Das Ergebnis für die ebene Welle läßt sich auch auf andere Lösungen der Wellengleichung übertragen. Für alle Berechnungen von Schall in Luft oder Wasser in technischen Anwendungen kann die Wellengleichung unter Vernachlässigung der Schwerkraft angenommen werden. Im Wasser muß lediglich bedacht werden, daß der Gleichanteil des Drucks $p_0$ ortsabhängig ist. Dies bedeutet jedoch für die meisten praktischen Berechnungen keinen Unterschied zum bisherigen Fall. Die in Abschnitt 2.2 angegebenen Lösungen gelten weiterhin.