

A. Mathematische Hilfsmittel

A.1. Fourier-Analyse

Teile der folgenden Darstellung wurde frei nach den Abschnitten 1.3.1 und 1.4.1 des Buches "Schwingungslehre" von E. Meyer und D. Guicking verfaßt.

Fourier-Reihe

Nach dem Satz von Fourier läßt sich eine periodische Zeitfunktion $s(t)$ mit der Periodendauer $\tau = 2\pi/\omega_0$ als Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ darstellen:

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [S_n \sin(n\omega_0 t) + C_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (\text{A.1.1})$$

Voraussetzung ist, daß $s(t)$ höchstens endlich viele Sprungstellen endlicher Höhe und endlich viele Maxima und Minima besitzt. Die Koeffizienten sind durch die folgenden Integrale bestimmt:

$$A_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) dt \quad (\text{A.1.2})$$

$$S_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (\text{A.1.3})$$

$$C_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (\text{A.1.4})$$

Die Größe A_0 ist der arithmetische Mittelwert von $s(t)$ während einer Periode. Die Darstellung der Zeitfunktion $s(t)$ durch eine trigonometrische Reihe nach Gleichung (A.1.1) bezeichnet man als Fourier-Reihe oder Fourier-Entwicklung. Die Größen S_n und C_n werden Fourier-Koeffizienten genannt. Die einzelnen Summanden heißen Fourier-Komponenten.

Komplexe Darstellung

Zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion gilt der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.\end{aligned}\tag{A.1.5}$$

Daraus folgt für die einzelnen Komponenten der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}S_n \sin(n\omega_0 t) &= \frac{S_n}{2i} [e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}], \\ C_n \cos(n\omega_0 t) &= \frac{C_n}{2} [e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}].\end{aligned}\tag{A.1.6}$$

Faßt man den Sinus- und den Cosinus-Term zusammen ergibt sich

$$S_n \sin(n\omega_0 t) + C_n \cos(n\omega_0 t) = A_n e^{in\omega_0 t} + A_{-n} e^{-in\omega_0 t}\tag{A.1.7}$$

mit den komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{2} [C_n - iS_n] \\ A_{-n} &= \frac{1}{2} [C_n + iS_n] = A_n^*\end{aligned}\tag{A.1.8}$$

Das bedeutet, daß jede reelle Fourier-Komponente durch ein Paar zueinander konjugiert komplexer Schwingungsfunktionen dargestellt werden kann. Damit kann die komplexe Form der Fourier-Reihe angegeben werden:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\omega_0 t}\tag{A.1.9}$$

Der Koeffizient A_0 ist wie in (A.1.2) definiert. Die übrigen Koeffizienten sind nach (A.1.8) gegeben und können analog zu (A.1.3) und (A.1.4) durch das Integral

$$A_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) e^{-in\omega_0 t}, \quad n > 0\tag{A.1.10}$$

bestimmt werden. Die A_{-n} sind durch die konjugiert komplexen Werte der A_n gegeben.

Fourier-Integral

Eine periodische Zeitfunktion $s(t)$ läßt sich nach (A.1.1) als Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit diskreten Frequenzen $\omega_0, 2\omega_0, \dots$ darstellen. Anschaulich bedeutet dies, daß ihr Spektrum aus diskreten Linien besteht. Dagegen besitzt eine unperiodische Zeitfunktion ein kontinuierliches Spektrum.

Sei nun $s(t)$ eine unperiodische Zeitfunktion, so kann man sich daraus eine periodische Funktion $g(t)$ erzeugen, indem man einen Zeitabschnitt $-\tau/2 \leq t \leq +\tau/2$ von $s(t)$ herauschneidet und außerhalb dieses Intervalls periodisch fortsetzt. Innerhalb des Intervalls gilt:

$$g(t) = s(t), \quad -\tau/2 \leq t \leq +\tau/2 \quad (\text{A.1.11})$$

Die konstruierte Funktion läßt sich als Fourier-Reihe darstellen mit:

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [S_n \sin(n\omega_0 t) + C_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (\text{A.1.12})$$

Die Periodendauer von $g(t)$ ist die Intervallbreite $\tau = 2\pi/\omega_0$. Um eine Fourier-Darstellung von der unperiodischen Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten, läßt man $\tau \rightarrow \infty$ gehen. Dann wird $g(t)$ zu $s(t)$ für alle t , und man erhält aus (A.1.12) die gesuchte Darstellung.

Wird die Intervallbreite τ variiert, so ändern sich auch die im Spektrum auftretenden Frequenzen. Zweckmäßigerweise führt man

$$\omega = n\omega_0 = 2\pi n/\tau \quad (\text{A.1.13})$$

als neue Variable ein. Zusätzlich wird der Linienabstand des diskreten Spektrums mit

$$\Delta\omega = 2\pi/\tau \quad (\text{A.1.14})$$

bezeichnet. Wird τ größer sinkt $\Delta\omega$, und die Spektrallinien rücken immer mehr zusammen, bis sie im Grenzübergang $\tau \rightarrow \infty$ ein kontinuierliches Spektrum bilden. Um diesen Grenzübergang vornehmen zu können, wird angenommen, daß $s(t)$ für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen Null abfällt und das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt \quad (\text{A.1.15})$$

existiert beziehungsweise endlich ist. Dann strebt mit $\tau \rightarrow \infty$ der Koeffizient $A_0 \rightarrow 0$. Weglassen von A_0 und Einsetzen der Integralausdrücke für S_n und C_n in (A.1.12) liefert

$$g(t) = \sum_{[\omega]} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \sin(\omega t) \right] \sin(\omega t) + \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \cos(\omega t) \right] \cos(\omega t) \right\} \quad (\text{A.1.16})$$

A. Mathematische Hilfsmittel

Mit $\tau \rightarrow \infty$ gehen die in den eckigen Klammern geschriebenen Integrale unter Einbeziehung des Faktors $1/\pi$ über in die Spektralfunktionen

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt \quad (\text{A.1.17})$$

und

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt \quad (\text{A.1.18})$$

Aus der Summe über die diskreten Frequenzen in (A.1.16) wird für $\tau \rightarrow \infty$ das Integral

$$s(t) = \int_0^{\infty} \{S(\omega) \sin(\omega t) + C(\omega) \cos(\omega t)\} d\omega \quad (\text{A.1.19})$$

Wenn dieses Integral existiert ist es die gesuchte Darstellung der unperiodischen Zeitfunktion $s(t)$ durch ein sogenanntes Fourier-Integral.

Komplexe Fourier-Transformation

Die in Gleichung (A.1.17) bis (A.1.19) angegebenen Beziehungen bekommen eine besonders einfache Gestalt, wenn man die komplexe Darstellung benutzt, wie sie auch für die Fourier-Reihe eingeführt wurde. Die Zeitfunktion lautet dann

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.1.20})$$

und die darin auftretende komplexe Spektralfunktion $A(\omega)$ ist gegeben durch

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.1.21})$$

Die Funktion $A(\omega)$ wird üblicherweise als Fourier-Transformierte von $s(t)$ bezeichnet.

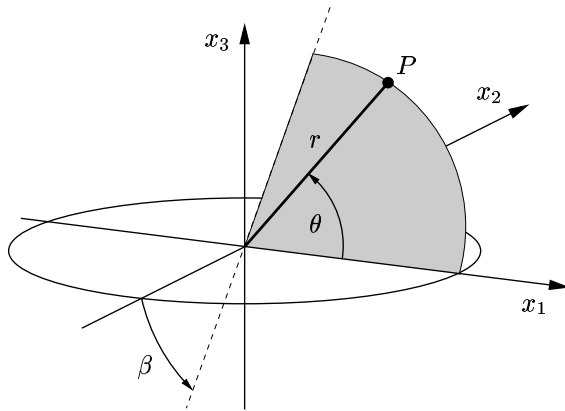
A.2. Divergenz- und Laplace-Operator

Produktregel für Divergenz-Operator

$h(\vec{x})$: Skalarfeld; $\vec{a}(\vec{x})$: Vektorfeld

$$\operatorname{div}(h \vec{a}) = h \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{grad} h \cdot \vec{a} \quad (\text{A.2.1})$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten



Koordinaten des Punktes P:

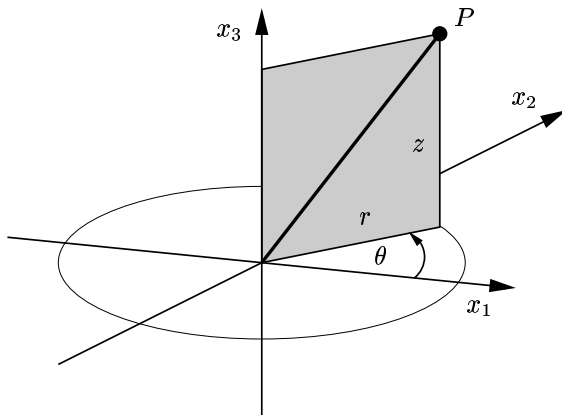
$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta \cos \beta$$

$$x_3 = r \sin \theta \sin \beta$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (\text{A.2.2})$$

Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten



Koordinaten des Punktes P:

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

$$x_3 = z$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.2.3})$$

A.3. Rechenregel mit δ -Funktion

Eine der wichtigsten Rechenregeln für die δ -Funktion wurde im Abschnitt 1.5 vorgestellt. Für eine stetige und beschränkte Funktion $B(x)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\delta(x-x_0) dx = B(x_0) \quad (\text{A.3.1})$$

Diese bedeutet, daß für jede Delta-Folge δ_n die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\delta_n(x-x_0) dx = B(x_0) \quad (\text{A.3.2})$$

gelten muß. Um die Aussage der Gleichung (A.3.1) deutlich zu machen, soll hier die Beziehung (A.3.2) überprüft werden. Die folgenden Überlegungen sind jedoch nicht als exakter Beweis sondern nur als Beweisskizze zu verstehen.

Es wird von Gleichung (1.5.27) ausgegangen. Sie besagt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x-x_0) dx = 1 \quad (\text{A.3.3})$$

Jede δ -Folge erfüllt definitionsgemäß diese Bedingung. Multipliziert man mit dem konstanten Faktor $B(x_0)$ ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x_0)\delta_n(x-x_0) dx = B(x_0) \quad (\text{A.3.4})$$

Subtrahiert man (A.3.2) und (A.3.4) voneinander folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - B(x_0)]\delta_n(x-x_0) dx = 0 \quad (\text{A.3.5})$$

Dies Aussage ist äquivalent zu Gleichung (A.3.2). Um sie zu beweisen, ist folgendes zu zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ kann ein N_0 gefunden werden, so daß für alle $n > N_0$ die Beziehung

$$d_n \equiv \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - B(x_0)]\delta_n(x-x_0) dx \right| < \varepsilon \quad (\text{A.3.6})$$

erfüllt ist.

Allgemein gilt für eine beliebige Funktionen $a(x)$ die Ungleichung

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(x)| dx \quad (\text{A.3.7})$$

A.3. Rechenregel mit δ -Funktion

Zu beachten ist, daß die Integration von $-\infty$ nach $+\infty$ durchgeführt wird, womit dx positiv ist. Es ergibt sich aus (A.3.6)

$$d_n \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \quad (\text{A.3.8})$$

Da $B(x)$ eine stetige Funktion ist, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung um x_0 , so daß innerhalb dieser Umgebung

$$|B(x) - B(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{A.3.9})$$

gilt. Diese Umgebung muß nur eng genug gewählt werden. Sie kann durch eine Konstante N_1 definiert werden, so daß für alle

$$x \in [x_0 - b, x_0 + b] \quad \text{mit} \quad b = \frac{1}{N_1} \quad (\text{A.3.10})$$

die Bedingung (A.3.9) erfüllt ist. Es muß N_1 entsprechend groß gewählt werden. Das Integral in (A.3.8) wird mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx = I_{-\infty}^{x_0-b} + I_{x_0-b}^{x_0+b} + I_{x_0+b}^{+\infty} \quad (\text{A.3.11})$$

in drei Teilintegrale zerlegt. Die Teilintegrale sind durch

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{x_0-b} &= \int_{-\infty}^{x_0-b} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \\ I_{x_0-b}^{x_0+b} &= \int_{x_0-b}^{x_0+b} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \\ I_{x_0+b}^{+\infty} &= \int_{x_0+b}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \end{aligned} \quad (\text{A.3.12})$$

definiert. Für das zweite Teilintegral kann sofort eine Abschätzung angegeben werden. Da innerhalb der Integrationsgrenzen (A.3.9) gilt, folgt

$$I_{x_0-b}^{x_0+b} < \int_{x_0-b}^{x_0+b} \frac{\varepsilon}{4} \delta_n(x - x_0) dx = \frac{\varepsilon}{4} \int_{x_0-b}^{x_0+b} \delta_n(x - x_0) dx \quad \text{für} \quad n > N_1 \quad (\text{A.3.13})$$

Nach (1.5.20) konvergiert das Integral auf der rechten Seite gegen Eins für $n \rightarrow \infty$. Es gibt daher ein N_2 , so daß gilt

$$\int_{x_0-b}^{x_0+b} \delta_n(x - x_0) dx < 2 \quad \text{für} \quad n > N_2 \quad (\text{A.3.14})$$

A. Mathematische Hilfsmittel

Daraus folgt für das Teilintegral

$$I_{x_0-b}^{x_0+b} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n > N_1, N_2 \quad (\text{A.3.15})$$

Auch die anderen beiden Teilintegrale lassen sich abschätzen. Da die Funktion $B(x)$ beschränkt ist, existiert das Maximum von $|B(x) - B(x_0)|$. Es ergibt sich

$$I_{-\infty}^{x_0-b} < |B(x) - B(x_0)|_{\max} \cdot \int_{-\infty}^{x_0-b} \delta_n(x - x_0) dx \quad (\text{A.3.16})$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert nach (1.5.21) gegen Null für $n \rightarrow \infty$. Es existiert daher ein N_3 , so daß

$$I_{-\infty}^{x_0-b} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > N_3 \quad (\text{A.3.17})$$

erfüllt ist. Analog kann ein N_4 zur Abschätzung des letzten Teilintegrals gefunden werden, so daß

$$I_{x_0+b}^{\infty} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > N_4 \quad (\text{A.3.18})$$

gilt. Definiert man nun N_0 als das Maximum von N_1 , N_2 , N_3 und N_4 , so gelten für alle $n > N_0$ alle drei Ungleichungen (A.3.15), (A.3.17) und (A.3.18). Dies ist gleichbedeutend mit

$$d_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \text{für } n > N_0 \quad (\text{A.3.19})$$

Daß bedeutet, für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ kann tatsächlich ein N_0 gefunden werden, so daß (A.3.5) für alle $n > N_0$ gilt. Dies war zu zeigen.

B. Herleitungen

Einige umfangreiche Herleitungen sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in den entsprechenden Abschnitten eingebunden. Sie werden hier im Anhang dargestellt.

B.1. Zur Wellenausbreitung in Strömungskanälen

Wellenzahl

Im Abschnitt 4.3 wird die Wellenzahl als Funktion der Frequenz im ruhendem Bezugssystem betrachtet. Im folgenden soll die Gleichung (4.3.16) hergeleitet werden. Es wird von der Beziehung (4.3.15) ausgegangen. Diese lautet

$$\alpha_m = \pm \sqrt{\frac{\omega_B^2}{c^2} - \beta_m^2} \quad (\text{B.1.1})$$

Nach (4.3.13) gilt

$$\omega_R = \omega_B + \alpha_m U \quad (\text{B.1.2})$$

Auflösen von (B.1.2) nach ω_B und einsetzen in (B.1.1) ergibt

$$\alpha_m = \pm \left(\frac{(\omega_R - \alpha_m U)^2}{c^2} - \beta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.3})$$

Dies kann nach α_m aufgelöst. Es ergeben sich die Umformungsschritte:

$$c^2 \alpha_m^2 = \omega_R^2 - 2\omega_R \alpha_m U + \alpha_m^2 U^2 - c^2 \beta_m^2 \quad (\text{B.1.4})$$

$$0 = \omega_R^2 - 2\omega_R \alpha_m U + \alpha_m^2 (U^2 - c^2) - c^2 \beta_m^2 \quad (\text{B.1.5})$$

$$\alpha_m^2 (c^2 - U^2) + 2\alpha_m \omega_R U = \omega_R^2 - c^2 \beta_m^2 \quad (\text{B.1.6})$$

$$\alpha_m^2 + 2\alpha_m \frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} = \frac{\omega_R^2 - c^2 \beta_m^2}{c^2 - U^2} \quad (\text{B.1.7})$$

$$\left(\alpha_m + \frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} \right)^2 = \frac{\omega_R^2 - c^2 \beta_m^2}{c^2 - U^2} + \frac{\omega_R^2 U^2}{(c^2 - U^2)^2} \quad (\text{B.1.8})$$

$$\alpha_m = -\frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} \pm \left[\frac{(\omega_R^2 - c^2 \beta_m^2)(c^2 - U^2) + \omega_R^2 U^2}{(c^2 - U^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.9})$$

B. Herleitungen

$$\alpha_m = -\frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} \pm \left[\frac{\omega_R^2 c^2 - c^2 \beta_m^2 (c^2 - U^2)}{(c^2 - U^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.10})$$

$$\alpha_m = \frac{\pm [\omega_R^2 c^2 - c^2 \beta_m^2 (c^2 - U^2)]^{\frac{1}{2}} - \omega_R U}{c^2 - U^2} \quad (\text{B.1.11})$$

$$\alpha_m = \frac{\pm c \omega_R \left[1 - \frac{\beta_m^2}{\omega_R^2} (c^2 - U^2) \right]^{\frac{1}{2}} - c \omega_R M}{c^2 (1 - M^2)} \quad (\text{B.1.12})$$

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{\pm \left[1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R} \right)^2 (1 - M^2) \right]^{\frac{1}{2}} - M}{(1 - M^2)} \quad (\text{B.1.13})$$

Schließlich folgt

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{(S - M)}{(1 - M^2)} \quad (\text{B.1.14})$$

mit

$$S = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R} \right)^2 (1 - M^2)} \quad (\text{B.1.15})$$

und

$$M = \frac{U}{c} \quad (\text{B.1.16})$$

Die Beziehung (B.1.14) entspricht Gleichung (4.3.16).

Gruppengeschwindigkeit

Die Gruppengeschwindigkeit der Kanalmoden bei Strömung wird ebenfalls in Abschnitt 4.3 behandelt. Im folgenden wird dort angegebene Beziehung (4.3.33) hergeleitet. Dazu wird die Ableitung (4.3.32) berechnet:

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega_R}{d\alpha_m} \quad (\text{B.1.17})$$

Weiter oben wurde bereits gezeigt, daß

$$\alpha_m = \pm \left(\frac{(\omega_R - \alpha_m U)^2}{c^2} - \beta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.18})$$

beziehungsweise

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{(S - M)}{(1 - M^2)} \quad (\text{B.1.19})$$

gilt. Zunächst wird (B.1.18) nach ω_R aufgelöst:

$$\alpha_m^2 c^2 = (\omega_R - \alpha_m U)^2 - \beta_m^2 c^2 \quad (\text{B.1.20})$$

B.1. Zur Wellenausbreitung in Strömungskanälen

$$\pm c\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} = \omega_R - \alpha_m U \quad (\text{B.1.21})$$

$$\omega_R = \pm c\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} + \alpha_m U \quad (\text{B.1.22})$$

Dann wird die Ableitung gebildet. Es ergeben sich die Umformungen:

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega_R}{d\alpha_m} = \pm c \frac{\alpha_m}{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}} + U \quad (\text{B.1.23})$$

$$c^{\text{gr}} = c^2 \frac{\alpha_m}{\omega_R - \alpha_m U} + U \quad (\text{B.1.24})$$

$$c^{\text{gr}} = c^2 \frac{\left(\frac{\alpha_m}{\omega_R}\right)}{1 - \left(\frac{\alpha_m}{\omega_R}\right) U} + U \quad (\text{B.1.25})$$

$$c^{\text{gr}} = c \frac{\left(\frac{\alpha_m c}{\omega_R}\right)}{1 - \left(\frac{\alpha_m c}{\omega_R}\right) M} + U \quad (\text{B.1.26})$$

Mit (B.1.19) kann der Ausdruck in der Klammer ersetzt werden. Es folgt:

$$c^{\text{gr}} = c \frac{\left(\frac{S - M}{1 - M^2}\right)}{1 - \left(\frac{S - M}{1 - M^2}\right) M} + U \quad (\text{B.1.27})$$

$$c^{\text{gr}} = c \frac{S - M}{1 - M^2 - MS + M^2} + U \quad (\text{B.1.28})$$

$$c^{\text{gr}} = c \left[\frac{S - M}{1 - MS} + \frac{M \cdot (1 - MS)}{1 - MS} \right] \quad (\text{B.1.29})$$

$$c^{\text{gr}} = c \frac{S - M + M - M^2 S}{1 - MS} \quad (\text{B.1.30})$$

Schließlich ergibt sich

$$c^{\text{gr}} = c \frac{(1 - M^2) \cdot S}{1 - MS} \quad (\text{B.1.31})$$

Diese Beziehung stimmt mit Gleichung (4.3.33) überein.

B. Herleitungen

B.2. Zum Erhaltungssatz der akustischen Energie

Es werden die einzelnen Herleitungsschritte für Gleichung (5.4.8) gegeben. Die kinetische akustische Energie ist mit (5.4.1) gegeben. Für ihre zeitliche Ableitung gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 \right) = \rho_0 \vec{v}' \cdot \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \rho_0 \text{grad } \phi \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi) \quad (\text{B.2.1})$$

Die zeitliche Ableitung der potentiellen akustischen Energie nach (5.4.2) ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_0}{2 c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{B.2.2})$$

Für die akustische Intensität ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{div} (p' \vec{v}') &= \text{grad } p' \cdot \vec{v}' + p' \cdot \text{div}(\vec{v}') \\ &= \text{grad} \left[-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \cdot \text{grad } \phi - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \text{div}(\text{grad } \phi) \\ &= -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \Delta \phi - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi) \cdot \text{grad } \phi \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

Damit sind alle Komponenten, die in Gleichung (5.4.5) auftreten, als Funktionen des akustischen Potentials ausgedrückt worden. Setzt man nun in (5.4.5) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \right) + \text{div} (p' \vec{v}') \\ &= \rho_0 \text{grad } \phi \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi) + \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \Delta \phi - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi) \cdot \text{grad } \phi \\ &= \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right\} \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2.4})$$

Damit ist gezeigt, daß die Gleichungen (5.4.5) und (5.4.8) äquivalent sind.

B.3. Inhomogene Wellengleichung mit Ableitung im Quellterm

Allgemeine Betrachtung

Im folgenden werden einige Überlegungen zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung vorgestellt und schließlich auch die Gleichung (6.3.56) hergeleitet. Im freien Raum ohne Begrenzungen ist die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) p' = q(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.1})$$

durch das Integral

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (\text{B.3.2})$$

gegeben. Dabei ist zur Abkürzung die retardierte Zeit

$$\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (\text{B.3.3})$$

eingeführt worden. Zur Berechnung der entstehenden Schallfelder muß die entsprechende Quellverteilung für q in dem Integral eingesetzt werden.

In Abschnitt 6.3 treten in mehreren Fällen Quellverteilungen mit Ableitungen auf. Hier wird zunächst eine einfache Zeitableitung betrachtet. Die inhomogene Wellengleichung hat die Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) p' = \frac{\partial B}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.4})$$

Auf der rechten Seite steht die Zeitableitung eines Feldes $B(\vec{x}, t)$. Die folgende Überlegung ist unabhängig von der konkreten Form des Feldes. Rein formal läßt sich eine inhomogene Wellengleichung aufstellen, in der nicht die Ableitung $\partial B/\partial t$ sondern das Feld B selbst die Quellstärke angibt. Es soll

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \psi = B(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.5})$$

gelten. Dabei ist ψ eine Hilfsgröße, die nicht notwendigerweise eine physikalische Bedeutung besitzt. Ohne Berandung kann die Lösung der Gleichung mit

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (\text{B.3.6})$$

angegeben werden. Differenziert man (B.3.5) nach der Zeit t , ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.7})$$

B. Herleitungen

Die rechte Seite ist mit der von Gleichung (B.3.5) identisch. Damit muß p' mit der Zeitableitung der Größe ψ übereinstimmen. Aus (B.3.6) folgt

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.8})$$

Diese Lösung hätte sich natürlich auch aus (B.3.2) ergeben, wenn man für q die Zeitableitung von B einsetzt. Es ist jedoch nicht so einfach den entstehenden Ausdruck so umzuformen, daß die Zeitableitung vor dem Integral erscheint.

Auch für die Quellverteilung mit räumlicher Ableitung kann eine Lösung angegeben werden, bei der die Ableitung vor dem Integral steht. Gleichung (6.3.51) kann als

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \text{div } \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.9})$$

dargestellt werden. Dabei ist B_i die Komponente eines Vektorfeldes. Analog zu (B.3.5) wird mit jeder dieser Komponenten eine inhomogene Wellengleichung aufgestellt. Diese lauten

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi_i = B_i(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.10})$$

Dabei ist ψ_i wieder eine Hilfsgröße. Differenziert man beide Seiten nach x_i und vergleicht das Resultat mit (B.3.9), dann folgt für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.11})$$

Auch hier wurde erreicht, daß die Ableitung nicht im sondern vor dem Integral steht. Das direkte Einsetzen der Quellverteilung $q = \partial B_i / \partial x_i$ in (B.3.2) ergibt dagegen

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.12})$$

Setzt man die beiden Formen der Lösung gleich, erhält man die Beziehung

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.13})$$

Dies entspricht Gleichung (6.3.56).

Direkte Herleitung

Es ist auch eine direkte Herleitung von Gleichung (B.3.13) möglich, die nicht auf einer Lösung der inhomogenen Wellengleichung basiert. Gegeben ist das zeitabhängige

B.3. Inhomogene Wellengleichung mit Ableitung im Quellterm

Vektorfeld $\vec{B}(\vec{x}, t)$. Die Komponenten des Felder werden wieder mit $B_i(\vec{x}, t)$ bezeichnet. Zusätzlich werden die Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} b = b(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ \tau = \tau(\vec{x}, \vec{y}, t) &= t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \end{aligned} \quad (\text{B.3.14})$$

definiert. Beide hängen jeweils von zwei Vektoren ab. Zusätzlich ist τ noch eine Funktion eines Skalars. Die Größe b entspricht dem Kehrwert des Abstands zwischen den beiden Vektoren, und τ gibt eine retardierte Zeit an.

Mit der Vorbereitung folgt für die Ableitung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{y}, \tau) + \frac{\partial B_i}{\partial t}(\vec{y}, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}, \tau) \right\} b(\vec{x}, \vec{y}) + B_i(\vec{y}, \tau) \frac{\partial b}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.3.15})$$

Die Antisymmetrie von b und τ bezüglich \vec{x} und \vec{y} kann formal ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial y_i} &= -\frac{\partial b}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \tau}{\partial y_i} &= -\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{B.3.16})$$

Damit läßt sich (B.3.15) weiter umformen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \\ &= \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) - \left\{ \frac{\partial B_i}{\partial t}(\vec{y}, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) + B_i(\vec{y}, \tau) \frac{\partial b}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \\ &= \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3.17})$$

Die Integration dieses Ausdrucks über ein Volumen V_Q ergibt

$$\begin{aligned} &\int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} d^3 \vec{y} \\ &= \int_{V_Q} \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} \end{aligned} \quad (\text{B.3.18})$$

Die linke Seite kann mit Hilfe des Satzes von Gauss in ein Oberflächenintegral umge-

B. Herleitungen

wandelt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} d^3\vec{y} &= \int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \frac{B_i(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right\} d^3\vec{y} \\ &= \int_{V_Q} \operatorname{div}_{\vec{y}} \left\{ \frac{\vec{B}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right\} d^3\vec{y} = \int_S \vec{n} \cdot \left\{ \frac{\vec{B}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right\} dS_{\vec{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.3.19})$$

Dabei ist mit S ist die Oberfläche von V_Q bezeichnet. Im weiteren wird angenommen, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer $\vec{B}/|\vec{x} - \vec{y}|$ auf der Oberfläche verschwindet. Dann ist das Oberflächeintegral und damit auch die linke Seite von (B.3.18) gleich Null. Folglich müssen die Integrale auf der rechten Seite von (B.3.18) gleich sein. In diesem Fall gilt

$$\int_{V_Q} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right) d^3\vec{y} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} \frac{B_i \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (\text{B.3.20})$$

Setzt man den gesamten Raum \mathbb{R}^3 für das Volumen V_Q ein, dann stimmt diese Beziehung mit Gleichung (B.3.13) übereinstimmt. Die Oberfläche S liegt dann im Unendlichen. In diesem Fall muß der Ausdruck $\vec{B}/|\vec{x} - \vec{y}|$ für $|\vec{y}| \rightarrow \infty$ auf Null abfallen (bei festem \vec{x}), damit die Voraussetzungen erfüllt sind. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der Betrag $|\vec{B}|$ beschränkt ist.

Sachverzeichnis

- Abschlußwiderstand, 67
- Adiabatexponent, 155
- Admittanz, 117
 - radiale, 117
- Amplitude
 - komplexe, 113, 114
- Anfangsbedingung, 72, 76
- Anfangswertproblem, 71
- Anpassung
 - reflexionsfreie, 67
- Ausstrahlbedingung, 119

- Bessel-Funktion, 191
- Bezugssystem
 - mitbewegt, 95
- Blindleistung, 125, 136

- Charakteristiken, 74
- “Cut-Off”-Bedingung, 85
- “Cut-Off”-Frequenz, 85

- δ -Folge, 18
- δ -Funktion, 15, 27, 77, 144
- Dezibel, 9
- Differentialgleichungssystem
 - hyperbolisches, 74
- Dipol, 161, 163
- Dipolfeld, 163
- Dispersion, 90, 93, 94
- Dispersionsbeziehung, 94
- Distribution, 22
- Donner, 157
- Dopplerfaktor, 96
- Druckamplitude
 - komplexe, 13

- Ebene
 - komplexe, 12

- Effektivwert, 9
- Eigenschwingung, 61
- Energie, 47, 121
 - akustische, 49
 - kinetische, 47
 - potentielle, 49
- Energieerhaltung, 50, 54, 122, 153
- Energiefluß, 51
- Energieflußdichtevektor, 122
- Euler-Gleichung, 29, 194
 - linearisierte, 31, 81

- Fernfeld, 127, 168, 179, 204
 - geometrisches, 168, 179, 204
- Fluid, 7
 - Newtonsches, 195
 - reibungsfreies, 29
- Fourier-Integral, 217
- Fourier-Reihe, 215
- Fourier-Transformation, 24
- Freifeldwellenlänge, 85
- Freistrahl
 - turbulenter, 193
- Freistrahllärm, 202

- Gas
 - ideales, 154
- Gaskonstante
 - spezifische, 154
- Gesamtintensität, 53
- Gleichanteil, 9
- Gravitationswellen, 40
- Greensche Funktion, 151, 153, 180, 181, 183
- Grundmode, 84
- Gruppengeschwindigkeit, 90, 92

- Hankel-Funktion, 191

Sachverzeichnis

- Heaviside-Funktion, 21, 76
- Helmholtz-Gleichung, 120
- Howe-Gleichung, 214

- Impedanz, 117
 - radiale, 114, 134
- Impulsleichung, 193, 195
- Impulsquelle
 - punktförmige, 163
- Intensität, 51, 121, 122
 - radiale, 122

- Kanal
 - zweidimensionaler, 80
- Kausalität, 119
- Kolben
 - im Rohr, 11, 56
- Kontinuitätsgleichung, 29, 193
 - linearisierte, 30
- Kreisfrequenz, 11
- Kugel
 - atmende, 110
 - vibrierende, 127, 163
- Kugelkoordinaten, 111, 219
- Kugelwelle, 112, 122

- Lösung
 - schwache, 79
- Laplace-Operator, 219
- Lautstärke, 10
- Lighthill-Gleichung, 193
- Lighthillscher Spannungstensor, 196
- Lindsay
 - Akustik-Übersicht von, 5

- M^8 -Gesetz, 206
- Massenquelle, 141
- Mediengrenze, 68
- Medium, 7
- Mediummasse
 - mitschwingende, 139
- Membran, 71
- Mode, 80, 84
- Monopol, 140, 144, 161
 - linienhafter, 185

- Multipolentwicklung, 173, 175

- Nahfeld, 127
- Navier-Stokes-Gleichung, 195
- Neumann-Funktion, 191

- Ordnung der Mode, 84

- Phasengeschwindigkeit, 85, 90
- Phasenverschiebung, 116, 119, 125
- Phon, 10
- Potential
 - akustisches, 109
- Potentialströmung, 141

- Quadrupol, 165
- Quelle
 - kompakte, 170, 203
- Quellverteilung, 148

- Randbedingung, 41
- Randwertproblem, 71
- Reflexion, 68
- Reflexionsfaktor, 66
- Relaxation, 29
- Resonanz, 56
- Resonanzfrequenz, 60, 67
- Reynoldsschen Spannungen, 199
- Riemann-Invarianten, 74
- RMS-Wert, 9

- Schall, 8
- Schalldruck, 9
- Schalldruckpegel, 9
- Schallgeschwindigkeit, 31
 - in Luft, 37
- Schallquelle
 - durch Energiezufuhr, 153
 - durch Impulszufuhr, 160
 - durch Massenzufuhr, 157
 - zweidimensionale, 179
- Schnelle
 - in ebener Welle, 35
- Schnellefeld, 131
- Schubspannungen, 194
- Schwankungsanteil, 9

- Schwebung, 92
- Schwingung
 - harmonisch, 10
- Schwingungsbauch, 59
- Schwingungsknoten, 59
- Spektrum, 27, 91
- Strömung, 46
 - turbulente, 199

- Transformation des Bezugssystems, 46,
95
- Transmission, 68
- Transmissionsfaktor, 71

- Unstetigkeit in der Lösung, 71

- Viskosität, 195

- Wand
 - feste, 80
 - schallharte, 64, 66, 103
 - schallweiche, 64, 67, 103
- Wandimpedanz, 63, 103
 - komplexe, 61
- Welle
 - ebene, 34, 41
 - harmonische, 36
 - reflektierte, 68
 - stehende, 56
 - transmittierte, 68
- Wellengleichung, 29
 - inhomogene, 147, 150, 151
- Wellengruppe, 92
- Wellenlänge, 37
- Wellenwiderstand, 36
- Wellenzahl, 37, 94, 97
- Wellenzahlvektor, 88
- Wirbelschall, 209
- Wirkleistung, 127, 136

- Zeigerdarstellung, 12
- Zeit
 - retardierte, 43, 149
- Zustandsänderung
 - adiabatische, 153
- Zylinderkoordinaten, 219