

11 Dreidimensionale Kanalmoden

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

Im folgendem wird die Schallausbreitung in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt untersucht. Es wird angenommen der Kanal sei unendlich lang. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Kanalwände schallhart sind, und daß keine Strömung im Kanal vorliegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird das Koordinatensystem so gewählt,

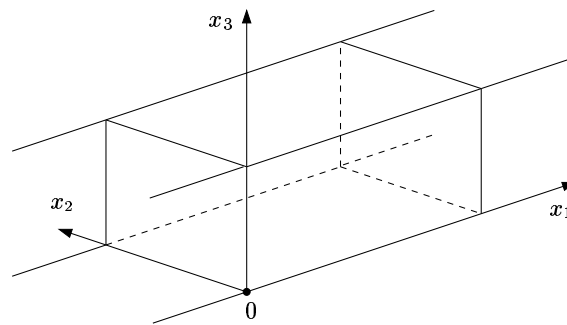


Abbildung 11.1: Ausrichtung des Koordinatensystems im Kanal mit rechteckigem Querschnitt.

daß die Kanalachse in x_1 -Richtung verläuft. Die Ausrichtung der Achsen ist in Abbildung 11.1 dargestellt. Akustische Wellen in dem Kanal müssen die Wellengleichung für den Schalldruck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (11.1.1)$$

erfüllen. Um die Wellenausbreitung im Kanal zu verstehen, werden Lösungen für feste Frequenzen ω untersucht. Dies ist analytisch viel einfacher, als beliebige Störungen zu betrachten. Im Allgemeinen kann jede Störung in ihre spektralen Anteile zerlegt werden. Ist das Verhalten der einzelnen Anteile bekannt, kann die zeitliche Entwicklung der Störung vorhergesagt werden.

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

Zu Berechnung der harmonischen Lösung wird der Ansatz

$$p(\vec{x}, t) = f(x_1)g(x_2)h(x_3)e^{i\omega t} \quad (11.1.2)$$

gewählt. Dies stellt einen Separationsansatz dar, in dem die Abhängigkeiten von den verschiedenen Koordinaten mit den Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ getrennt enthalten sind. Setzt man den Ansatz (11.1.2) in die Wellengleichung (11.1.1) ein, ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x_1) g(x_2) h(x_3) \\ & + \frac{d^2 f}{dx_1^2}(x_1) g(x_2) h(x_3) + f(x_1) \frac{d^2 g}{dx_2^2}(x_2) h(x_3) + f(x_1) g(x_2) \frac{d^2 h}{dx_3^2}(x_3) = 0 \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

Die Zeit t ist nach dem Kürzen durch den Faktor $e^{i\omega t}$ herausgefallen.

Um die Lösung zu bestimmen, müssen die Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ ermittelt werden. Dazu wird (11.1.3) so umgeformt, daß alle Terme mit $g(x_2)$ auf einer Seite isoliert sind. Man erhält

$$\frac{1}{g(x_2)} \frac{d^2 g}{dx_2^2}(x_2) = -\frac{1}{f(x_1)} \frac{d^2 f}{dx_1^2}(x_1) - \frac{1}{h(x_3)} \frac{d^2 h}{dx_3^2}(x_3) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (11.1.4)$$

Es stellt sich heraus, daß x_2 auf der rechten Seite von (11.1.4) überhaupt nicht mehr auftritt. Die linke Seite hängt ausschließlich von x_2 ab, und die rechte Seite nur von x_1 und x_3 . Die Gleichheit muß jedoch für alle \vec{x} erfüllt sein. Dies ist nur möglich wenn beide Seiten konstant – also unabhängig von \vec{x} – sind. Zweckmäßigerweise wird für die Konstante $-\beta^2$ gewählt. Dies scheint zunächst eine Einschränkung der Allgemeinheit zu sein, da die Konstante immer negativ ist. Jedoch sind mit komplexen Werten für β alle beliebigen Konstanten möglich. Es ergibt sich als Folge von (11.1.4) die Gleichung

$$\frac{1}{g(x_2)} \frac{d^2 g}{dx_2^2}(x_2) = -\beta^2 \quad (11.1.5)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung in der Form

$$g(x_2) = A_2 \cos(\beta x_2) + B_2 \sin(\beta x_2) \quad (11.1.6)$$

geschrieben werden kann. Durch Einsetzen läßt sich leicht zeigen, daß (11.1.6) wirklich die Gleichung (11.1.5) erfüllt. Damit ist die Funktion $g(x_2)$ bis auf die drei Faktoren A_2 , B_2 und β bestimmt. Das bedeutet, daß der Separationsansatz (11.1.2) zum Erfolg führt. Die Funktion $g(x_2)$ kann unabhängig von $f(x_1)$ und $h(x_3)$ bis auf einige Konstanten bestimmt werden.

Entsprechend zur Gleichung (11.1.4) können alle alle Terme, die von x_3 abhängen, auf eine Seite gebracht werden. Dann ergibt sich wieder ein Ausdruck, der überall konstant sein muß. Die Konstante wird diesmal als $-\sigma^2$ gewählt. Man erhält analog zu (11.1.5) eine Differentialgleichung für $h(x_3)$. Es muß gelten

$$\frac{1}{h(x_3)} \frac{d^2 h}{dx_3^2}(x_3) = -\sigma^2 \quad (11.1.7)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Die allgemeine Lösung wird mit

$$h(x_3) = A_3 \cos(\sigma x_3) + B_3 \sin(\sigma x_3) \quad (11.1.8)$$

dargestellt. Dieser Ausdruck ist äquivalent zur Lösung für $g(x_2)$ in (11.1.6). Der gleichen Umformungen können letztlich auch für die Variable x_1 und damit für die Funktion $f(x_1)$ durchgeführt werden. Als Konstante wird $-\alpha^2$ gewählt. Es ergibt sich eine zu (11.1.5) und (11.1.7) analoge Differentialgleichung mit

$$\frac{1}{f(x_1)} \frac{d^2 f}{dx_1^2}(x_1) = -\alpha^2 \quad (11.1.9)$$

Im folgenden wird sich zeigen, daß die für $g(x_2)$ und $h(x_3)$ gewählte Form der Lösung besonders gut zur Erfüllung der Randbedingungen an den festen Wänden geeignet ist. Die Funktion $f(x_1)$ beschreibt die Form der Welle in Kanalrichtung. Dort sind keine Randbedingungen gegeben. In Kanalrichtung ergeben sich vielmehr laufende Wellen. Die Formen (11.1.6) und (11.1.8) mit cos- und sin-Ausdruck sind eher für stehende Wellen geeignet. Für die Funktion $f(x_1)$ ist es zweckmäßiger, die allgemeine Lösung in der Form

$$f(x_1) = A_1 e^{-i\alpha x_1} + B_1 e^{i\alpha x_1} \quad (11.1.10)$$

darzustellen. Natürlich kann auch mit dem cos- und sin-Ausdruck eine laufende Welle und umgekehrt mit dem Ansatz (11.1.10) eine stehende Welle beschrieben werden. Dann werden jedoch die entstehenden Ausdrücke umfangreicher. Mit den gewählten Ansätzen wird eine besonders einfache Darstellung erreicht.

Bisher wurde die Form der Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ ermittelt. Die konkrete Lösung wird durch die Konstanten A_i , B_i und die Wellenzahlen α , β und σ bestimmt. Durch die Wellenzahlen wird die Wellenlänge in der jeweiligen Richtung festgelegt. Die Wellenzahlen müssen so gewählt werden, daß die Randbedingungen an den festen Wänden erfüllt werden. Die Randbedingungen reichen jedoch nur aus, um β und σ zu bestimmen. Die Wellenzahl α ist dann indirekt durch die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 \quad (11.1.11)$$

bestimmt, die sich aus Gleichung (11.1.4) durch Einsetzen von (11.1.5), (11.1.7) und (11.1.9) ableitet.

Die Abbildung 11.2 zeigt einen Schnitt durch den Kanal. Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß jeweils eine Kanalwand bei $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ liegt. Die Ausdehnung des Kanals in x_2 - und x_3 -Richtung wird mit H_2 und H_3 bezeichnet. Die Randbedingung an festen Wänden besagt, daß kein Medium durch die Wand strömt. Entsprechend muß die Schnellekomponente senkrecht zur Wand gleich Null sein. Es gilt daher

$$v_2'(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0, x_2 = H_2 \quad (11.1.12)$$

und

$$v_3'(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei} \quad x_3 = 0, x_3 = H_3 \quad (11.1.13)$$

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

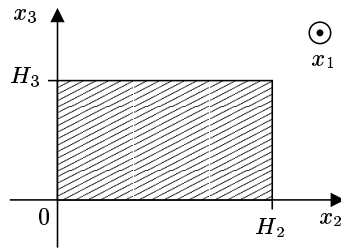


Abbildung 11.2: Schnitt durch den Kanal.

Diese beiden Gleichungen stellen Bedingungen an die Schnelle. Sie sind daher nicht direkt als Randbedingungen an die Wellengleichung für den Schalldruck geeignet. Es muß zunächst aus den Bedingungen eine Beziehung für den Schalldruck abgeleitet werden. Dazu bietet sich die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial v'_j}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_j} \quad (11.1.14)$$

an. An den Wänden ist die Normalkomponenten der Schnelle gleich Null. Damit verschwindet auch ihre zeitliche Ableitung, die auf der linken Seite von (11.1.14) steht. So ergeben sich Bedingungen an die räumliche Ableitung des Schalldrucks. Es muß

$$\frac{\partial p'}{\partial x_2} = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0, x_2 = H_2 \quad (11.1.15)$$

und

$$\frac{\partial p'}{\partial x_3} = 0 \quad \text{bei} \quad x_3 = 0, x_3 = H_3 \quad (11.1.16)$$

gelten. Der Verlauf von $\partial p'/\partial x_2$ wird durch die Funktion $g(x_2)$ bestimmt. Damit die Bedingung (11.1.15) gilt, muß die Funktion

$$\frac{dg}{dx_2}(0) = \frac{dg}{dx_2}(H_2) = 0 \quad (11.1.17)$$

erfüllen. Analog folgt aus (11.1.16) eine Beziehung für $h(x_3)$ an den Wandkoordinaten:

$$\frac{dh}{dx_3}(0) = \frac{dh}{dx_3}(H_3) = 0 \quad (11.1.18)$$

Aus den Bedingungen bei $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ folgt sofort, daß

$$B_2 = B_3 = 0 \quad (11.1.19)$$

sein muß. Sonst würde die Ableitung der Funktion $g(x_2)$ beziehungsweise $h(x_3)$ an der Stelle $x_2 = 0$ beziehungsweise $x_3 = 0$ durch den Sinus-Term nicht verschwinden. Der

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Cosinus-Anteil besitzt bei Null ein Maximum und erfüllt die Bedingung. Damit auch an der zweiten Wand die Ableitung gleich Null wird, muß

$$\beta = \frac{m\pi}{H_2} \equiv \beta_m \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.20)$$

beziehungsweise

$$\sigma = \frac{n\pi}{H_3} \equiv \sigma_n \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.21)$$

gelten. Anschaulich bedeutet dies, daß eine ganze Zahl von halben Wellenlängen zwischen den Kanalwänden Platz haben muß. Dadurch werden jedoch die Wellenzahlen β und σ nicht eindeutig festgelegt. Vielmehr gibt es eine ganze Serie von zulässigen Werten, die der Größe nach geordnet mit β_m und σ_n bezeichnet werden. Die Ordnungszahlen sind dabei m und n . Sie legen letztlich die Form der Lösung fest. Denn über β und σ ist auch die Wellenzahl in Kanalrichtung α festgelegt. Aus (11.1.11) folgt

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2 - \sigma^2} \quad (11.1.22)$$

Das bedeutet es gibt eine ganze Schar von möglichen α -Werten, die durch

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H_2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{H_3}\right)^2} \equiv \alpha_{mn} \quad (11.1.23)$$

gegeben sind. Für jedes mn -Paar gibt es eine eigene Wellenzahl in Kanalrichtung, die mit α_{mn} bezeichnet wird.

Setzt man die ermittelten Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ in den Ansatz (11.1.2) ein, dann erhält man die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 A_3 \cos(\beta_m x_2) \cos(\sigma_n x_3) [A_1 e^{-i\alpha_{mn} x_1} + B_1 e^{+i\alpha_{mn} x_1}] e^{i\omega t} \quad (11.1.24)$$

Die Ordnungszahlen m und n legen die Wellenzahlen β_m , σ_n und α_{mn} fest. Sie bestimmen somit die Form der Lösung bei einer vorgegebenen Frequenz ω . Die entsprechende Lösung wird auch als mn -Mode bezeichnet. Mit den Faktoren A_1 , B_1 , A_2 und A_3 wird die Amplitude der Lösung festgelegt. Für $B_1 = 0$ ergibt sich eine "reine" Welle in positiver x_1 -Richtung. Entsprechend stellt die Lösung für $A_1 = 0$ eine Welle in negativer x_1 -Richtung dar. Im allgemeinen Fall erhält man eine Überlagerung von beiden Wellen. Eine reguläre Wellenausbreitung liegt jedoch nur vor, wenn die Wellenzahl α_{mn} reell ist. Dazu muß die Frequenz ω die Bedingung

$$\omega > c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H_3}\right)^2} \equiv \omega_{mn}^c \quad (11.1.25)$$

erfüllen. Die Größe ω_{mn}^c wird als "Cut-Off"-Frequenz der mn -Mode bezeichnet.

Für niedrigere Frequenzen, die die "Cut-Off"-Bedingung (11.1.25) nicht erfüllen, ist α_{mn} rein imaginär. Dann beschreibt die Lösung (11.1.24) eine Überlagerung aus einem Teil, der in x_1 -Richtung exponentiell abklingt, und einem exponentiell anwachsenden

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

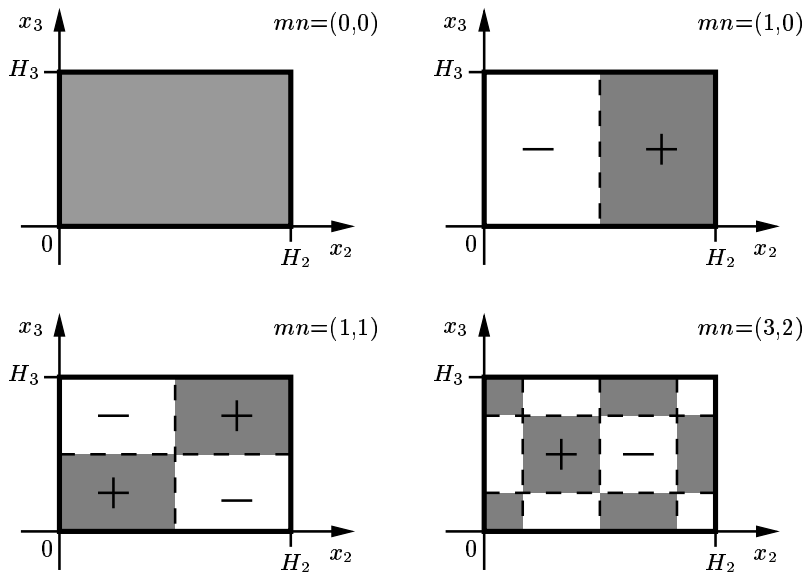


Abbildung 11.3: Momentane Druckverteilung in einem Querschnitt für verschiedene Moden.

Teil. Ob die gesamte Lösung in x_1 -Richtung steigt, liegt an der Wahl von A_1 und B_1 . Für die Modenzahlen $mn = (0, 0)$ ergibt sich übrigens eine ebene Wellen in oder entgegen der x_1 -Richtung, je nach Wahl von A_1 und B_1 . Diese Lösung wird Grundmode genannt. Sie ist immer ausbreitungsfähig, da $\omega_{00}^c = 0$ gilt.

Zur Veranschaulichung der verschiedenen Moden sind in der Abbildung 11.3 mehrere Lösungen skizziert. Es sind jeweils in einem Querschnitt des Kanals für eine fest Zeit Bereiche positiven und negativen Schalldrucks markiert. In den grau schattierten Feldern ist der Schalldruck positiv und in den Hellen negativ. Die Bilder sind sozusagen Momentaufnahmen. Zu einem anderen Zeitpunkt können die Bereiche mit positiven und negativen Werten vertauscht sein. Die Grenzlinien zwischen den Bereichen – die sogenannten Knotenlinien – bleiben allerdings konstant. Sie verlaufen entlang der Positionen x_2 und x_3 , an denen einer der beiden \cos -Terme in (11.1.24) verschwindet. Dort hat die Lösung beziehungsweise Mode immer einen Schalldruck gleich Null.

Um die Druckverteilung noch weiter zu verdeutlichen, ist in der Abbildungen 11.4 der Druckverlauf entlang der Linie $x_3 = H_3/2$ (also durch die Mitte des Kanals in Bezug auf x_3) für zwei Fälle aufgetragen. In x_2 - und x_3 -Richtung beschreibt die Lösung stehende Wellen zwischen den Kanalwänden. Es befindet sich immer ein Extremum des Schalldrucks an der Wand. Die Lösungen haben dort einen sogenannten “Druckbauch”, der durch die Randbedingung der schallharten Wand erzwungen ist.

11 Dreidimensionale Kanalmoden

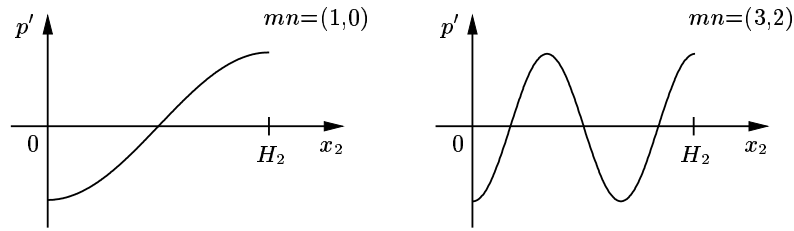


Abbildung 11.4: Momentaner Druckverlauf in x_2 -Richtung entlang einer Linie bei $x_3 = H_3/2$.

Resonanter Quader

Bisher wurden nur laufende Wellen in x_1 -Richtung betrachtet. Es wurde angenommen, daß der Kanal in x_1 -Richtung zu beiden Seiten unendlich ausgedehnt ist. Wird der Kanal mit schallharten Wänden auch in x_1 -Richtung abgeschlossen, ergibt sich ein quaderförmiger Raum. Im folgenden sollen die Lösungen der Wellengleichung in einem solchen Raum betrachtet werden. Eine Wand wird bei $x_1 = 0$ und die zweite bei $x_1 = H_1$ angenommen. Der Quader besitzt damit die Abmessungen $H_1 \times H_2 \times H_3$. Die Lösung wird wieder für eine vorgegebene Frequenz ω gesucht. Der Separationsansatz bleibt unverändert. Die Funktion $f(x_1)$ kann nun auf gleichem Wege wie die Funktionen $g(x_2)$ und $h(x_3)$ ermittelt werden. Dazu wird der Lösungsansatz

$$f(x_1) = A_1 \cos(\alpha x_1) + B_1 \sin(\alpha x_1) \quad (11.1.26)$$

angenommen. Es muß gelten

$$\frac{\partial p'}{\partial x_1} = 0 \quad \text{für } x_1 = 0, x_1 = H_1 \quad (11.1.27)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{dx_1}(0) = \frac{df}{dx_1}(H_1) = 0 \quad (11.1.28)$$

Die Bedingung bei $x_1 = 0$ erfüllt man, indem

$$B_1 = 0 \quad (11.1.29)$$

gesetzt wird. Um die Bedingung bei $x_1 = H_1$ zu erreichen, muß die Wellenzahl

$$\alpha = \frac{l\pi}{H_1} \equiv \alpha_l \quad \text{mit } l = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.30)$$

gewählt werden. Analog zu β und σ wird durch die Randbedingung α nicht eindeutig festgelegt. Es gibt eine ganze Reihe von möglichen Lösungen, die mit α_l bezeichnet werden. Dabei ist l eine weitere Ordnungszahl.

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

Im Fall des in x_1 -Richtung unendlich ausgedehnten Kanals wurden β und σ durch die Randbedingungen bestimmt, und α ergab sich indirekt aus der Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 \quad (11.1.31)$$

Diese Gleichung folgte unmittelbar aus dem Lösungsansatz für $p'(\vec{x}, t)$ nach Einsetzen in die Wellengleichung. Im Fall des Quaders ist die Wellenzahl α direkt durch die Randbedingungen an den zusätzlichen Wänden festgelegt. Jedoch muß Gleichung (11.1.31) immer noch gelten, damit die Wellengleichung wirklich erfüllt wird. Dadurch ist das System jedoch überbestimmt. Es gibt mehr Bedingungen als Unbekannte. Tatsächlich läßt sich nicht mehr für jede vorgegebene Frequenz ω eine Lösung finden. Die Frequenz muß die Bedingung

$$\omega = c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2} \quad (11.1.32)$$

für eine mögliche Kombination der Wellenzahlen α , β und σ erfüllen. Dies wird für die Werte

$$\omega_{lmn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{l}{H_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{H_3}\right)^2} \quad (11.1.33)$$

erreicht. Nur für diese Werte ergibt sich eine harmonische Lösung. Für vorgegebene Ordnungszahlen l , m und n hat das Druckfeld die Form

$$\begin{aligned} p'(\vec{x}, t) &= A_1 A_2 A_3 \cos(\alpha_l x_1) \cos(\beta_m x_2) \cos(\sigma_n x_3) e^{i\omega_{lmn} t} \\ &\equiv A_1 A_2 A_3 p'_{lmn}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (11.1.34)$$

Anschaulich beschreibt die Lösung stehende Wellen, die in den Quader "hineinpassen". Dies ist nur bei den ausgezeichneten Frequenzen nach (11.1.33) – den Resonanzfrequenzen – möglich. Für andere Frequenzen erhält man keine Lösung mit dem harmonischen Ansatz.

Theoretisch halten sich die stehenden Wellen bei den Resonanzfrequenzen unendlich lange, wenn sie einmal angeregt wurden. In der Praxis wird jedoch jede Schwingung durch nichtlineare Effekte, Wärmeleitung und Reibung gedämpft. Regt man in dem Quader mit einem Lautsprecher harmonische Schwingungen an, so ergibt sich ein Stehwellenfeld, das zusätzlich die periodischen Randbedingungen am Lautsprecher erfüllt. Stimmt die Anregungsfrequenz mit einer Resonanzfrequenz überein, so kann eine sogenannte Resonanzkatastrophe eintreten.

In der Realität läßt sich eine einzelne Mode – zum Beispiel mit einem Lautsprecher in der Seitenwand – nur sehr schwer gezielt anregen. Im allgemeinen wird eine Überlagerung aus viele Moden angeregt, so daß die reale Lösung als Summe

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_l \sum_m \sum_n B_{lmn} p'_{lmn}(\vec{x}, t) \quad (11.1.35)$$

dargestellt werden muß.

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

Bevor die Schallausbreitung in einem runden Kanal behandelt wird, soll auf die Lösung der Wellengleichung im zylindersymmetrischen Fall eingegangen werden. Die sich ergebenden Erkenntnisse werden später bei der Behandlung des runden Kanals nützlich sein. Es wird die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (11.2.1)$$

betrachtet. Die physikalische Bedeutung der Größe ϕ spielt an dieser Stelle keine Rolle, da es zunächst um eine rein mathematische Betrachtung geht. ϕ kann der Schalldruck, das akustische Potential oder irgendeine andere physikalische Größe sein, für die die Wellengleichung gilt. Es werden nur harmonische Lösungen zugelassen, die dem Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (11.2.2)$$

entsprechen. Einsetzen in (11.2.1) führt auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (11.2.3)$$

für die komplexe Amplitude φ .

Es sollen nur zylindersymmetrische Lösungen betrachtet werden. Dazu werden die Zylinderkoordinaten (r, θ, z) eingeführt. Sie sind mit den kartesischen Koordinaten durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \\ x_3 &= z \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

verknüpft. In der Abbildung 11.5 sind die Koordinaten veranschaulicht. Die Koordinate r gibt den Abstand von der x_3 -Achse an. θ stellt ein Winkel in der x_1, x_2 -Ebene dar, und z stimmt einfach mit x_3 überein. In dem neuen Koordinatensystem hat der Laplace-Operator die Form

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \quad (11.2.5)$$

Bei Zylindersymmetrie ist das Feld φ ausschließlich von r abhängig. Die Ableitungen von φ nach θ und z verschwinden. Weiterhin kann die partielle Ableitung nach r durch eine Gewöhnliche ersetzt werden. Es gilt

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (11.2.6)$$

Durch Einsetzen von (11.2.6) in die Helmholtz-Gleichung erhält man schließlich für den zylindersymmetrischen Fall

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2 \varphi = 0 \quad (11.2.7)$$

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

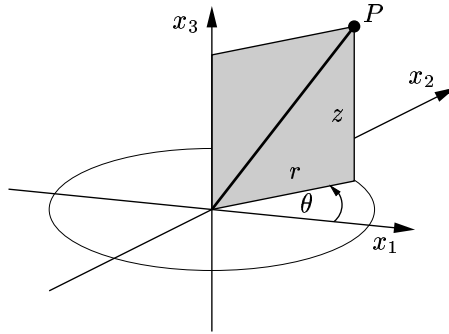


Abbildung 11.5: Zur Darstellung eines Punktes P in Zylinderkoordinaten.

Mathematisch betrachtet ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $\varphi(r)$. Die Lösung dieser Differentialgleichung findet man in Formelsammlungen. Allerdings ist dort meist eine etwas andere Form angegeben. Um sie zu erhalten wird eine neue Funktion mit

$$a(kr) = \varphi(r) \quad (11.2.8)$$

definiert. Passend dazu wird die Variable

$$s = kr \quad (11.2.9)$$

eingeführt. Zwischen den Ableitungen der beiden Funktionen $a(s)$ und $\varphi(r)$ gelten die Zusammenhänge

$$\frac{d\varphi}{dr} = k \frac{da}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi}{dr^2} = k^2 \frac{d^2a}{ds^2} \quad (11.2.10)$$

Durch Einsetzen erhält man aus (11.2.7) eine Differentialgleichung für $a(s)$. Sie lautet

$$\frac{d^2a}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{da}{ds} + a = 0 \quad (11.2.11)$$

Dies ist der Spezialfall $\nu = 0$ der klassischen Besselschen Differentialgleichung

$$s^2 \frac{d^2a}{ds^2} + s \frac{da}{ds} + (s^2 - \nu^2) a = 0 \quad (11.2.12)$$

Die Größe $\nu = 0$ wird üblicherweise als die Ordnung der Gleichung bezeichnet. Es zeigt sich, daß man in wenigen Schritten von der Wellengleichung – mit den Annahmen der harmonischen Lösung und Zylindersymmetrie – auf die Besselsche Differentialgleichung nullter Ordnung gelangt.

Vergleich mit dem eindimensionalen und kugelsymmetrischen Fall

Die sogenannten Bessel-Funktionen sind Lösungen der Besselsche Differentialgleichung. Bevor auf die Lösungen näher eingegangen wird, soll hier der Zusammenhang der Differentialgleichung (11.2.7) und der Helmholtz-Gleichung noch weiter verdeutlicht werden. Dies geschieht anhand einer Gegenüberstellung verschiedener Fälle. Es soll dabei die Lösung φ nur von einer Koordinate abhängen. Damit die abgeleiteten Formeln besser verglichen werden können, wird die Koordinate immer mit r bezeichnet, obwohl sie jedesmal eine andere Bedeutung besitzt.

Im ersten Fall wird eine eindimensionale Lösung betrachtet. Das Feld φ soll nur von x_1 abhängen. Entsprechend wird

$$r = x_1 \quad (11.2.13)$$

gesetzt. In dem eindimensionalen Fall gilt einfach

$$\Delta\varphi = \frac{d^2}{dr^2} \varphi \quad (11.2.14)$$

Man kann r dabei auch als Abstand ansehen. Nur ist jetzt nicht der Abstand von einem Punkt oder einer Achse sondern von der Ebene $x_1 = 0$ gemeint. Im zweiten Fall wird Zylindersymmetrie angenommen. Die Situation ist zweidimensional. In x_3 -Richtung ist die Lösung konstant. In Zylinderkoordinaten ist r dann der Abstand von der x_3 -Achse. Es gilt

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (11.2.15)$$

Wie bereits in Gleichung (11.2.6) dargestellt, ergibt sich in diesem Fall

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \varphi \quad (11.2.16)$$

für den Laplace-Ausdruck. Im dritten Fall wird Kugelsymmetrie angenommen. Es wird ein dreidimensionales Feld $\varphi(r)$ betrachtet. Die Koordinate r ist der Abstand vom Ursprung mit

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (11.2.17)$$

In Kugelkoordinaten gilt

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \varphi \quad (11.2.18)$$

Zu bemerken ist, daß sich die Laplace-Ausdrücke auf den rechten Seiten von (11.2.14), (11.2.16) und (11.2.18) formal nur durch den Exponenten von r unterscheiden. Denn Gleichung (11.2.14) könnte auch als

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^0} \frac{d}{dr} \left(r^0 \frac{d}{dr} \right) \varphi \quad (11.2.19)$$

geschrieben werden. Durch die unterschiedlichen Ausdrücke für $\Delta\varphi$ in den verschiedenen Koordinatensystemen, leiten sich aus der Helmholtz-Gleichung (11.2.3) auch verschiedene Bestimmungsgleichungen für $\varphi(r)$ ab.

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

Durch Einsetzen von (11.2.14) ergibt sich im eindimensionalen Fall

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + k^2\varphi = 0 \quad (11.2.20)$$

Im zweidimensionalen Fall bei Zylindersymmetrie erhält man

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0 \quad (11.2.21)$$

und bei Kugelsymmetrie folgt

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0 \quad (11.2.22)$$

Die drei Differentialgleichungen unterscheiden sich lediglich durch den Faktor vor den Term mit der ersten Ableitung. In Gleichung (11.2.20) könnte theoretisch als zweiter Term noch

$$\frac{0}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (11.2.23)$$

eingefügt werden.

Die allgemeine Lösungen der Differentialgleichung (11.2.20) lautet

$$\varphi(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr) \quad (11.2.24)$$

Dabei sind A und B Faktoren, die durch Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt werden. Die allgemeine Lösungen der Differentialgleichung (11.2.22) kann als

$$\varphi(r) = A \frac{\sin(kr)}{r} + B \frac{\cos(kr)}{r} \quad (11.2.25)$$

dargestellt werden. Sowohl für den eindimensionalen als auch für den kugelsymmetrischen Fall lassen sich die Lösungen mit Hilfe der Sinus- und Cosinus-Funktionen ausdrücken. Wie die Lösung im zweidimensionalen, zylindersymmetrischen Fall aussieht, soll im folgenden vorgestellt werden sollen.

Bessel- und Neumann-Funktionen

Um die Lösung der Besselschen Differentialgleichung zu finden wird ein sogenannter Potentialreihenansatz aufgestellt:

$$a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{l+m} \quad (11.2.26)$$

Dabei sind c_m Koeffizienten, und l ist ein freier Index. Für weitere mathematische Details und den genauen Lösungsweg sei hier auf die einschlägige Literatur verwiesen.

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Durch Bestimmen der Koeffizienten erhält man letztlich als Lösung der Besselschen Differentialgleichung (11.2.12) den Ausdruck

$$a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}s\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)} \equiv J_{\nu}(s) \quad (11.2.27)$$

Die Lösung wird im allgemeinen mit den Symbol J_{ν} dargestellt. Sie wird Bessel-Funktion ν -ter Ordnung genannt. Da Gleichung (11.2.7) der Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung entspricht, ist hier zunächst nur die Besselfunktionen J_0 von Interesse.

In Gleichung (11.2.27) kommt die sogenannte Gammafunktion vor. Sie ist durch

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\nu} d\xi \quad (11.2.28)$$

definiert. Es gilt

$$\Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma(\nu) \quad (11.2.29)$$

Die Gammafunktion stellt eine Verallgemeinerung der Fakultät auf reelle Argumente dar. Ist ν eine ganze Zahl, kann die Gammafunktion durch einen Ausdruck mit Fakultät ersetzt werden, denn es gilt

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (11.2.30)$$

Die Besselsche Differentialgleichung ist eine Gleichung zweiter Ordnung. Es muß daher noch eine zweite linear unabhängige Lösung geben. Für eine Darstellung, wie diese zweite Lösung gefunden werden kann, wird wieder auf einschlägige Literatur verwiesen. Die zweite Lösung wird üblicherweise mit Y_{ν} bezeichnet und Neumann-Funktion genannt. Für nichtganzzahlige ν besteht der Zusammenhang

$$Y_{\nu}(s) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [J_{\nu}(s) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(s)] \quad \text{für } \nu \neq 0, 1, 2, \dots \quad (11.2.31)$$

zwischen Neumann- und Bessel-Funktionen. Die Neumann-Funktion kann für alle ν als eine unendliche Reihe dargestellt werden. Die Formel ist allerdings sehr umfangreich, und daher wird sie hier nicht angegeben. Stattdessen sind die Bessel- und Neumann-Funktionen für ganzzahlige ν , die für die akustischen Anwendungen besonders von Interesse sind, in den Abbildungen 11.6 veranschaulicht. Die Bessel-Funktionen $J_1(s)$, $J_2(s)$, usw. verschwinden bei $s = 0$. Dagegen ist $J_0(0) = 1$. Die Neumann-Funktionen werden bei $s = 0$ alle singulär. Alle Funktionen besitzen unendlich viele Nullstellen.

Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ν -ter Ordnung wird aus einer Linearkombination der beiden Lösungen gebildet. Es ergibt sich

$$a(s) = A J_{\nu}(s) + B Y_{\nu}(s) \quad (11.2.32)$$

Damit kann auch die allgemeine Lösung der Helmholtz-Gleichung im zylindersymmetrischen Fall angegeben werden. Nach (11.2.8) gilt $\varphi(r) = a(kr)$. Die Ordnung der Besselschen Differentialgleichung ist $\nu = 0$. Die Lösung lautet damit

$$\varphi(r) = A J_0(kr) + B Y_0(kr) \quad (11.2.33)$$

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

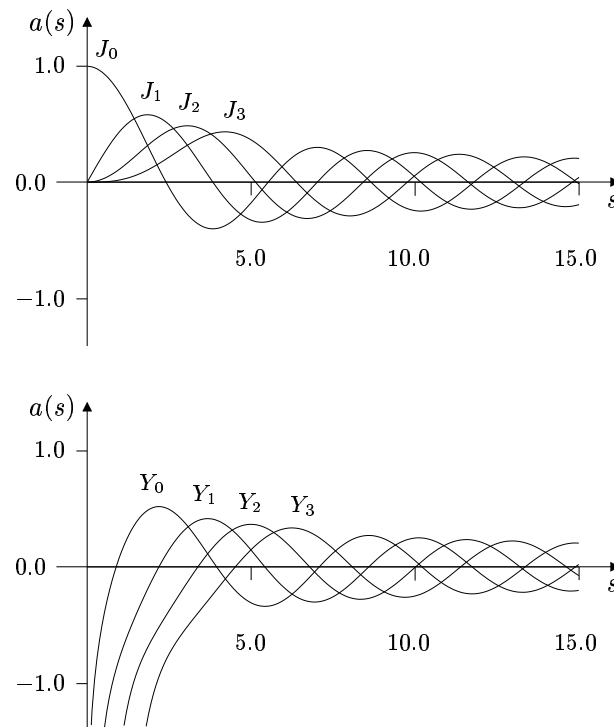


Abbildung 11.6: Bessel- und Neumann-Funktionen.

Stehende und laufende Wellen

Ausgangspunkt für die gesamte Überlegung war die Wellengleichung (11.2.1) für die Größe ϕ . Bei Zylindersymmetrie hängt ϕ nur vom Abstand r und von der Zeit t ab. Es gilt

$$\phi = \phi(r, t) = \varphi(r) e^{i\omega t} \quad (11.2.34)$$

Setzt auf der rechten Seite (11.2.33) ein erhält man

$$\phi(r, t) = [A J_0(kr) + B Y_0(kr)] e^{i\omega t} \quad (11.2.35)$$

Durch die Wahl der Faktoren A und B lassen sich verschiedene Lösungsformen erzeugen. Wenn jeweils einer der Faktoren gleich Null gesetzt wird, erhält man zum Beispiel

$$\phi_1(r, t) = A J_0(kr) e^{i\omega t} \quad (11.2.36)$$

$$\phi_2(r, t) = B Y_0(kr) e^{i\omega t}$$

Beide Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 stellen stehende Wellen dar. Im Abstand r , bei dem $J_0(kr) = 0$ wird, ergibt sich für alle Zeiten $\phi_1 = 0$. An den Positionen, an denen $J_0(kr)$ ein lokales

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Maximum oder Minimum besitzt, ergibt sich ein sogenannter Bauch. Dort schwankt die Lösung ϕ_1 mit besonders großer Amplitude.

An dieser Stelle wird noch einmal mit der Lösung (11.2.24) für den eindimensionalen Fall verglichen. Zu beachten ist, daß dabei wieder

$$r = x_1 \quad (11.2.37)$$

gesetzt wird. Setzt man (11.2.24) auf der rechten Seite (11.2.33) ein ergibt sich

$$\phi(r, t) = [A \sin(kr) + B \cos(kr)] e^{i\omega t} \quad (11.2.38)$$

Beispiele für einfache eindimensionale Lösungen sind dann mit

$$\phi_1(r, t) = A \sin(kr) e^{i\omega t} \quad (11.2.39)$$

$$\phi_2(r, t) = B \cos(kr) e^{i\omega t}$$

gegeben. Genau wie oben beschreiben auch diese beiden Lösungen stehende Wellen. Eine laufende ebene Welle wird zum Beispiel durch die Form

$$\phi_3(r, t) = C e^{\pm ikr} \cdot e^{i\omega t} = C e^{i(\omega t \pm kr)} \quad (11.2.40)$$

ausgedrückt. Die Lösung ϕ_3 kann durch Linearkombination der Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 erzeugt werden, denn es gilt

$$e^{\pm ikr} = \cos(kr) \mp i \sin(kr) \quad (11.2.41)$$

Jetzt wird wieder der zylindersymmetrischen Fall betrachtet. Auch hier kann durch Überlagerung der Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 aus (11.2.36) eine laufende Welle erzeugt werden. Um die Darstellung zu vereinfachen, werden die sogenannten Hankel-Funktionen mit

$$H_\nu^{(1)}(s) = J_\nu(s) + iY_\nu(s) \quad (11.2.42)$$

$$H_\nu^{(2)}(s) = J_\nu(s) - iY_\nu(s)$$

definiert. Sie enthalten die notwendigen Linearkombinationen, um laufende Wellen zu bilden. Die Hankel-Funktionen übernehmen sozusagen im zylindersymmetrischen Fall die Aufgabe, die im eindimensionalen Fall der Ausdruck $e^{\pm ikr}$ hat.

Mit den Hankel-Funktionen kann eine zu (11.2.35) alternative Form der Lösung angegeben werden. Sie lautet

$$\phi(r, t) = \underbrace{A H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{i\omega t}}_{\text{Welle nach außen}} + \underbrace{B H_0^{(1)}(kr) \cdot e^{i\omega t}}_{\text{Welle nach innen}} \quad (11.2.43)$$

Im Prinzip sind die beiden Varianten der Lösung gleichwertig. Die Form (11.2.35) ist bei der Beschreibung von stehenden Wellen zu bevorzugen. Dagegen ist mit (11.2.43) die Darstellung von laufenden Wellen einfacher. In der Tabelle 11.1 ist eine Übersicht der Lösungen φ der Helmholtz-Gleichung in den verschiedenen Koordinatensystemen gegeben.

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

	Bestimmungsgleichung für φ bei Symmetrie $\varphi = \varphi(r)$	Allgemeine Lösung (reelle und komplexe Variante)
1D: Kartesische Koordinaten $r = x_1$	$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + k^2\varphi = 0$	$\varphi(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$ oder $\varphi(r) = A e^{-ikr} + B e^{+ikr}$
2D: Zylinder- koordinaten $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$	$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0$	$\varphi(r) = A J_0(kr) + B Y_0(kr)$ oder $\varphi(r) = A H_0^{(2)}(kr) + B H_0^{(1)}(kr)$
3D: Kugelkoordinaten $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$	$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0$	$\varphi(r) = A \frac{\sin(kr)}{r} + B \frac{\cos(kr)}{r}$ oder $\varphi(r) = A \frac{e^{-ikr}}{r} + B \frac{e^{+ikr}}{r}$

Tabelle 11.1: Zur Lösung der Helmholtz-Gleichung in verschiedenen Koordinatensystemen.

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt eine zylindersymmetrische Lösung der Wellengleichung betrachtet wurde, wird im folgenden die Wellenausbreitung in einem Rohr untersucht. Zweckmäßigerweise werden auch dabei die Zylinderkoordinaten verwendet. Der Radius des Rohres wird mit R bezeichnet. Der Abstand von der Rohrachse ist r . Die Koordinate in Richtung der Rohrachse ist z . Die Größe θ gibt den Winkel relativ zu einer festgelegten Richtung an. Das Rohr ist in Achsrichtung unendlich ausgedehnt.

Das Druckfeld im Kanal soll die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (11.3.1)$$

erfüllen. In Zylinderkoordinaten lautet die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p'}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0 \quad (11.3.2)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

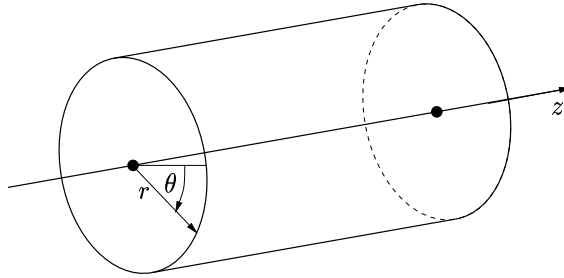


Abbildung 11.7: Lage der Koordinaten im Rohr.

Analog zum Fall mit rechteckigem Querschnitt wird von einem Separationsansatz mit harmonischer Zeitabhängigkeit

$$p'(z, r, \theta, t) = f(z) g(r) h(\theta) \cdot e^{i\omega t} \quad (11.3.3)$$

ausgegangen. Einsetzen dieses Ansatzes in (11.3.2) ergibt

$$\frac{1}{g(r)} \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr}(r) \right) \right] + \frac{1}{h(\theta)} \cdot \left[\frac{1}{r^2} \frac{d^2 h}{d\theta^2}(\theta) \right] + \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}(z) + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = 0 \quad (11.3.4)$$

Der $e^{i\omega t}$ -Faktor wurde dabei bereits herausgekürzt. Es wird wie im Fall des Kanals mit rechteckigem Querschnitt aus Abschnitt 11.1 vorgegangen. Um die Funktionen $f(z)$, $g(r)$ und $h(\theta)$ zu bestimmen, muß die Gleichung so umgeformt werden, daß alle Terme mit den jeweiligen Variablen auf einer Seite isoliert werden. Wird der zweite Summand auf die rechte Seite gebracht und anschließend mit r^2 multipliziert, dann hängt die rechte Seite ausschließlich von θ ab. Auf der linken Seite tritt θ nicht mehr auf. Damit die Gleichheit für alle Kombinationen r , z und θ erfüllt ist, müssen beide Seiten unabhängig von r , z und θ – also konstant – sein. Die Konstante wird mit $-\sigma^2$ bezeichnet. Damit ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für die erste Funktion mit

$$\frac{1}{h(\theta)} \cdot \frac{d^2 h}{d\theta^2}(\theta) = -\sigma^2 \quad (11.3.5)$$

Auch die von der Variablen z abhängigen Terme lassen sich auf einer Seite isolieren. Es ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die nächste Funktion

$$\frac{1}{f(z)} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}(z) = -\alpha^2 \quad (11.3.6)$$

Problematisch wird es jedoch mit der Variablen r . Sie tritt nicht nur im ersten sondern auch im zweiten Summand in Gleichung (11.3.4) auf. Die Gleichung kann nicht so

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

umgeformt werden, daß eine Seite nur von r abhängt und die andere überhaupt nicht. Dadurch ist die direkte Herleitung einer Bestimmungsgleichung für $g(r)$ unmöglich. Eine Bestimmungsgleichung ergibt sich, wenn zum Beispiel die Konstante σ schon bekannt ist. Der zweite Summand in (11.3.4) entspricht

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{h(\theta)} \cdot \frac{d^2 h}{d\theta^2}(\theta) = -\frac{\sigma^2}{r^2} \quad (11.3.7)$$

Wird σ fest vorgegeben, so kann der zweite Summand in (11.3.4) durch die rechte Seite von (11.3.7) ersetzt werden. Die Variable θ kommt dann nicht mehr vor, und die von r abhängigen Terme können auf eine Seite gebracht werden. Die andere Seite hängt ausschließlich von z ab. Beide Seiten müssen wieder konstant sein. Die Konstante wird mit $-\beta^2$ bezeichnet. Es folgt die Bestimmungsgleichung

$$\frac{1}{g(r)} \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr}(r) \right) \right] - \frac{\sigma^2}{r^2} = -\beta^2 \quad (11.3.8)$$

Zu beachten ist, daß für diese Gleichung σ eine vorgegebene und β eine zu bestimmende Konstante ist.

Einsetzen von (11.3.8) und (11.3.6) in (11.3.4) ergibt schließlich noch einen Zusammenhang zwischen den Konstanten und der Frequenz. Es folgt

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (11.3.9)$$

Damit ist festgelegt, wie die Lösung (11.3.3) zu bestimmen ist. Zuerst muß die Lösung für $h(\theta)$ gefunden und die Konstante σ ermittelt werden. Ist diese bekannt, kann auch $g(r)$ mit Hilfe von (11.3.8) berechnet werden. Damit ergibt sich die Konstante β . Durch die Beziehung (11.3.9) kann letztlich auch α angegeben werden.

Zur Bestimmung von $h(\theta)$ wird der Ansatz

$$h(\theta) = A_3 e^{-i\sigma\theta} + B_3 e^{i\sigma\theta} \quad (11.3.10)$$

gewählt. Dieser Ausdruck stellt eine allgemeine Lösung von (11.3.5) dar. Die Faktoren A_3 und B_3 sowie die Konstante σ müssen so gewählt werden, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Die Randbedingungen an die Funktion $h(\theta)$ sind jedoch nicht so offensichtlich, wie etwa die Randbedingungen bei festen Wänden. Die Ränder sind bei $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ gegeben. Die Koordinate $\theta = 0$ ist nicht durch eine physikalische Gegebenheit festgelegt, sondern die Richtung $\theta = 0$ wird einfach definiert. Die Wahl von $\theta = 0$ sollte jedoch keinen Einfluß auf die Lösung der Wellengleichung haben. Dies wird durch die Wahl einer sogenannten "periodischen Randbedingung" garantiert. Es soll

$$h(\theta) = h(\theta + 2\pi) \quad (11.3.11)$$

gelten. Dieser Ausdruck stellt eine Bedingung dar, die unabhängig von der Wahl der Richtung $\theta = 0$ ist.

Die periodische Randbedingung wird erfüllt, wenn man die Konstante

$$\sigma = 0, 1, 2, \dots \quad (11.3.12)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

wählt. Dann liefert der Ansatz (11.3.10) eine periodische Lösung, die sich bei $\theta = 2\pi$ wiederholt. Das bedeutet, die Konstante σ ist durch die Randbedingung nicht eindeutig festgelegt. Es gibt eine ganze Serie von möglichen Werten, die mit

$$\sigma = \sigma_m = m \quad (11.3.13)$$

bezeichnet werden können. Dabei ist m wieder eine Ordnungszahl, die mit

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.3.14)$$

gegeben ist. Durch die periodische Randbedingung sind die Faktoren A_3 und B_3 nicht festgelegt. Sie können unabhängig voneinander frei gewählt werden.

In nächsten Schritt soll $g(r)$ näher bestimmt werden. Dazu wird Gleichung (11.3.8) zu

$$r^2 \frac{d^2 g}{dr^2}(r) + r \frac{dg}{dr}(r) + (\beta^2 r^2 - \sigma^2) g(r) = 0 \quad (11.3.15)$$

umgeformt. Mit den Substitutionen

$$s = \beta r ; \quad a(s) = a(\beta r) = g(r) ; \quad \nu = \sigma \quad (11.3.16)$$

ergibt sich aus (11.3.15) die Besselsche Differentialgleichung in der klassischen Form

$$s^2 \frac{d^2 a}{ds^2}(s) + s \frac{da}{ds}(s) + (s^2 - \nu^2) a(s) = 0 \quad (11.3.17)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$a(s) = A J_\nu(s) + B Y_\nu(s) \quad (11.3.18)$$

Die Ordnung ν der Besselschen Differentialgleichung stimmt hier mit der Ordnungszahl m überein: $\nu = \sigma = m$. Das heißt, die Ordnungszahl m legt nicht nur die Lösung für $h(\theta)$ sondern auch die Bestimmungsgleichung für $g(r)$ (und damit natürlich auch die Lösung) fest. Es ergibt sich die allgemeine Lösung

$$g(r) = A_2 J_m(\beta r) + B_2 Y_m(\beta r) \quad (11.3.19)$$

Diese muß ebenfalls Randbedingungen erfüllen. An der Wand des Rohres ist die radiale Schnelle u'_r gleich Null. Es gilt

$$u'_r = 0 \quad \text{bei} \quad r = R \quad (11.3.20)$$

Daraus folgt für die Ableitung des Drucks

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad \text{bei} \quad r = R \quad (11.3.21)$$

und es ergibt sich die Randbedingung

$$\frac{dg}{dr}(R) = 0 \quad (11.3.22)$$

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

Es muß noch eine zweite Randbedingung bei $r = 0$ gefordert werden. Bei $r = 0$ ist strenggenommen die Differentialgleichung in der Form (11.3.2) nicht gültig. Der allgemeine Ausdruck (11.3.19) läßt formal auch Lösungen $g(r)$ mit einer Singularität bei $r = 0$ zu. Damit würde sich nach dem Ansatz (11.3.3) dort ebenfalls eine Singularität des Schalldrucks ergeben. Die singuläre Lösung führt dann an der Stelle $r = 0$ (entlang der Rohrachse) zu einer linienförmigen Massenquelle, die periodisch schwankt. Eine Zufuhr oder Abfuhr von Masse an diesem Ort ist in der Praxis normalerweise auszuschließen. Die physikalische Randbedingung lautet daher, daß bei $r = 0$ keine Massenquelle vorliegt. Formal bedeutet dies, daß die Lösung bei $r = 0$ endlich sein muß. Es werden daher alle Lösungen für $g(\theta)$ mit einer Singularität bei $r = 0$ ausgeschlossen. Daraus folgt direkt, daß der Faktor vor der Neumann-Funktion in (11.3.19) verschwinden muß. Damit ist

$$B_2 = 0 \quad (11.3.23)$$

und (11.3.19) vereinfacht sich zu

$$g(r) = A_2 J_m(\beta r) \quad (11.3.24)$$

Die Konstante β muß nun so gewählt werden, daß

$$\frac{dJ_m}{ds}(\beta R) = 0 \quad (11.3.25)$$

gilt. Mit dem Faktor β wird der Abstand r so skaliert, daß die Funktion $J_m(\beta r)$ gerade bei $r = R$ ein Maximum oder Minimum hat. Da die Bessel-Funktionen unendlich viele lokale Extrema besitzen, ergeben sich auch unendlich viele Möglichkeiten β zu wählen.

Die Positionen der lokalen Extrema werden der Größe nach geordnet und mit einer zweiten Ordnungszahl $n = 0, 1, 2, \dots$ durchnummeriert. Mit s_{mn} ist das n -te lokale Extrema der Bessel-Funktion m -ter Ordnung bezeichnet. Es gilt

$$\frac{dJ_m}{ds}(s_{mn}) = 0 \quad (11.3.26)$$

Zu bemerken ist, daß das lokale Minima bei $s = 0$ für die höheren Ordnungen $m > 0$ nicht berücksichtigt wird. Bei $s = s_{m0}$ besitzt die Bessel-Funktion m -ter Ordnung ihr erstes Maximum und bei $s = s_{m1}$ ihr erstes Minimum. Es gilt

$$s_{00} = 0; \quad s_{m0} > 0 \quad \text{für } m = 1, 2, \dots \quad (11.3.27)$$

Für die Wahl der Konstante β ergeben sich nun die Möglichkeiten

$$\beta = \frac{s_{mn}}{R} \equiv \beta_{mn} \quad (11.3.28)$$

um die Randbedingung (11.3.22) zu erfüllen. Die Lösung für $g(r)$ hängt damit von zwei Ordnungszahlen m und n ab:

$$g(r) = A_2 J_m(\beta_{mn} r) \quad (11.3.29)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Dies bringt zum Ausdruck, daß in der Lösung für $g(r)$ indirekt die Lösung für $h(\theta)$ und die Konstante σ_m mit eingegangen ist.

Bisher wurden die Funktionen $h(\theta)$ und $g(r)$ bestimmt. Die allgemeine Lösung für die Funktion $f(z)$ kann durch den Ansatz

$$f(z) = A_1 e^{-i\alpha z} + B_1 e^{i\alpha z} \quad (11.3.30)$$

ausgedrückt werden. Dieser Ansatz löst die Bestimmungsgleichung für $f(z)$. An $f(z)$ werden keine Randbedingungen gestellt. Die Konstante α wird über die Beziehung (11.3.9) aus der Konstante β ermittelt. Für vorgegebene Ordnungszahlen m und n ergibt sich

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_{mn}^2} \equiv \alpha_{mn} \quad (11.3.31)$$

Die Lösung für den Schalldruck lautet schließlich

$$p'(z, r, \theta, t) = (A_3 e^{-im\theta} + B_3 e^{im\theta}) \cdot A_2 J_m(\beta_{mn}r) \cdot (A_1 e^{-i\alpha_{mn}z} + B_1 e^{i\alpha_{mn}z}) \cdot e^{i\omega t} \quad (11.3.32)$$

Dieser Ausdruck repräsentiert das Druckfeld in der Mode (m, n) . Die Ordnungszahlen bestimmen die Form der Lösung beziehungsweise der Mode. Zusätzlich haben die Konstanten A_1 , B_1 , A_3 und B_3 einen Einfluß auf das zeitliche Verhalten der Lösung.

Zunächst soll die momentane Druckverteilung in einem Querschnitt betrachtet werden. In der Abbildung 11.8 sind Isolinien des Schalldrucks in einem Querschnitt für verschiedene Moden dargestellt. Die dunklen Bereiche markieren einen negativen Schalldruck und die hellen einen positiven Wert. Auf die Darstellung der Grundmode $mn = (0, 0)$ wurde verzichtet. Für sie ist der Schalldruck im gesamten Querschnitt konstant.

Die Ordnungszahl n legt die Anzahl der Knotenringe um die Mitte fest. Die Zahl m gibt die Periode in Umfangsrichtung an. Sie definiert auch die Anzahl der Knotenlinien, die gerade durch die Mitte laufen. Der radiale Verlauf von der Mitte zum Rand ist durch die entsprechende Bessel-Funktion J_m gegeben. Die Form der Druckverteilung in einem Querschnitt ist von A_3 und B_3 unabhängig. Die Wahl von A_3 und B_3 bestimmt nur die Amplitude und die Phase. Das bedeutet, durch Variation von A_3 und B_3 können die dargestellten Druckverteilungen in der Amplitude skaliert und gedreht werden. Der Einfluß der beiden Parameter wird erst deutlich, wenn das gesamte Rohr und nicht nur ein Querschnitt betrachtet wird. In der Abbildung 11.9 ist die Druckverteilung an der Rohrwand zu einem festen Zeitpunkt für verschiedene Verhältnisse von A_3 zu B_3 dargestellt. Helle Bereiche markieren wieder einen positiven Wert und dunkle Bereiche einen Negativen. In allen drei Fällen ist $m = 1$. Die Ordnungszahl n spielt für die Verteilung des Wanddrucks keine Rolle, da sie nur den radialen Verlauf beeinflusst.

Bei $A_3 = 1$ und $B_3 = 0$ liegt eine sogenannte "Spinning Mode" vor, die ein spiralförmiges Druckfeld besitzt. Eine vergleichbare Verteilung – nur mit entgegengesetzter Drehrichtung – ergibt sich für $A_3 = 0$ und $B_3 = 1$. In dem Fall $A_3 = B_3$ ergibt sich eine ganz andere Situation. Die Knotenlinien, die die Bereiche mit negativen und positiven Wanddruck voneinander trennen, verlaufen exakt in Kanal- beziehungsweise z -Richtung oder in Umfangs- beziehungsweise θ -Richtung. Ein gemischtes Bild ergibt die Wahl von $A_3 = 2B_3$.

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

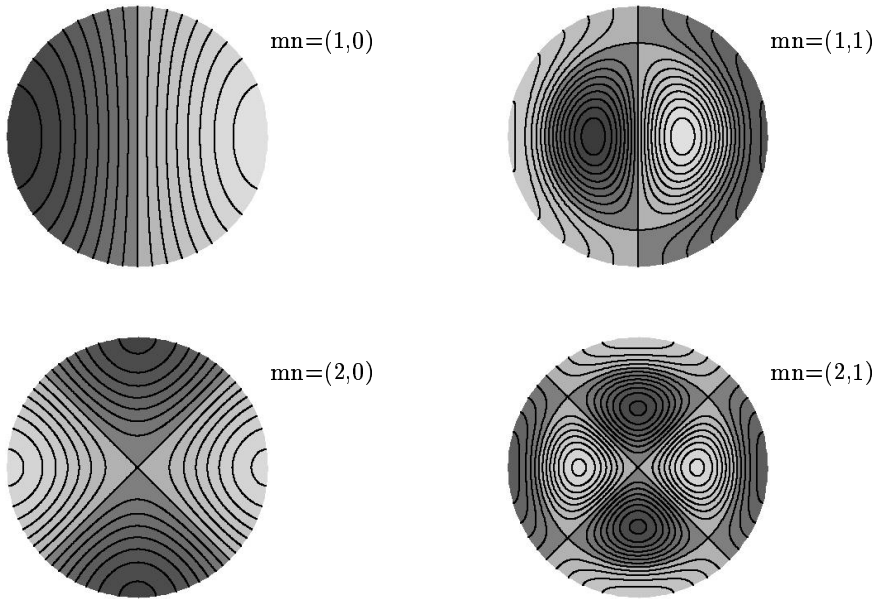


Abbildung 11.8: Momentane Druckverteilungen in einem Querschnitt für verschiedene Moden.

Anhand der Abbildungen kann man sich auch die zeitliche Entwicklung der Lösungen verdeutlichen. Betrachtet man die Lösung für einen festen Winkel θ und einen festen Radius r (wie zum Beispiel an der Wand bei $r = R$), gilt die Proportionalität

$$p' \sim (A_1 e^{-i\alpha_{mn}z} + B_1 e^{i\alpha_{mn}z}) \cdot e^{i\omega t} = A_1 e^{i(\omega t - \alpha_{mn}z)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_{mn}z)} \quad (11.3.33)$$

Der Ausdruck beschreibt eine Wellenausbreitung in z -Richtung. Die Phasengeschwindigkeit ist durch die Wellenzahl α_{mn} gegeben. Ist α_{mn} eine reelle Zahl

$$\alpha_{mn} \in \mathbb{R} \quad (11.3.34)$$

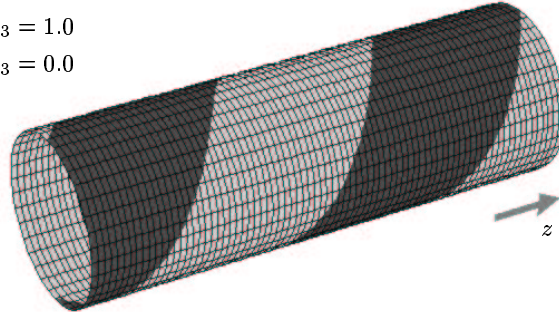
ergibt sich eine reguläre Wellenausbreitung. Für $B_1 = 0$ erhält man eine reine Ausbreitung in positiver z -Richtung, für $A_1 = 0$ in negativer z -Richtung, und die Wahl $A_1 = B_1$ führt zu einer stehenden Welle. Betrachtet man den ersten Fall $B_1 = 0$, so verschiebt sich das Druckfeld im Rohr mit der Zeit einfach in positive z -Richtung, ohne sich zu verformen.

Je nachdem, ob es sich um eine "Spinning Mode" handelt oder nicht, folgen durch diese Verschiebung verschiedenen zeitliche Entwicklungen in einem Querschnitt. Dies wird klar, wenn man die Lösung für feste Werte z und r betrachtet. Dann gilt die Proportionalität

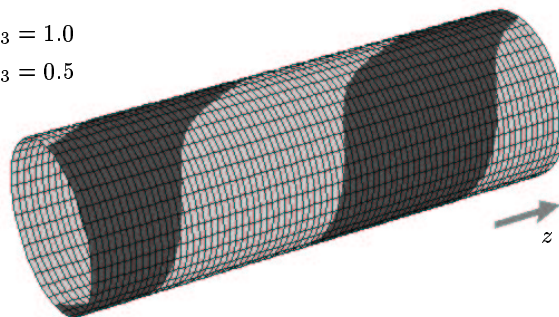
$$p' \sim (A_3 e^{-im\theta} + B_3 e^{im\theta}) \cdot e^{i\omega t} = A_3 e^{i(\omega t - m\theta)} + B_3 e^{i(\omega t + m\theta)} \quad (11.3.35)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

$$A_3 = 1.0$$
$$B_3 = 0.0$$



$$A_3 = 1.0$$
$$B_3 = 0.5$$



$$A_3 = 1.0$$
$$B_3 = 1.0$$

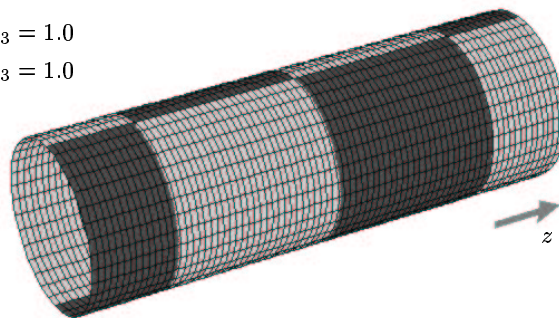


Abbildung 11.9: Druckverteilung an der Rohrwand für die Ordnungszahl $m = 1$.

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

Der Ausdruck beschreibt eine Wellenausbreitung in θ -Richtung. Für $A_3 = 1$ und $B_3 = 0$ ergibt sich eine reine Ausbreitung in positiver θ -Richtung. Anschaulich entspricht dies einer Drehung der Druckverteilung mit einer Winkelgeschwindigkeit, die durch die Ordnungszahl m festgelegt wird. Für $A_3 = 0$ und $B_3 = 1$ wäre die Drehrichtung entgegengesetzt. Die Drehung erklärt den Ausdruck "Spinning Mode", mit dem solche Lösungen bezeichnet werden. Bei $A_3 = B_3$ schwankt die Amplitude des Druckfeldes in einem Querschnitt ohne sich zu drehen. Das entspricht einer stehenden Welle in θ -Richtung. Für $A_3 = 2 B_3$ ergibt sich eine Kombination aus Drehung und Schwankung der Amplitude.

In der Literatur werden häufig auch negative Ordnungszahlen m zugelassen. Die Lösung wird in der Form

$$p'(z, r, \theta, t) = A e^{-im\theta} \cdot J_m(\beta_{mn}r) \cdot e^{-i\alpha_{mn}z} \cdot e^{i\omega t} \quad (11.3.36)$$

dargestellt. Im Prinzip wurde hier B_1 und B_3 gleich Null gesetzt, und die Konstanten A_1 , A_2 und A_3 in A zusammengefaßt. Wenn negative m zugelassen sind, können damit "Spinning Modes" mit beiden Drehrichtungen dargestellt werden. Läßt man auch negative Wellenzahlen α_{mn} zu, dann kann auch die Ausbreitung in negativer z -Richtung beschrieben werden. Die Form (11.3.36) besitzt gegenüber (11.3.32) den Vorteil, daß die Form nur von m und n und nicht mehr von zusätzlichen Faktoren – wie A_3 und B_3 – abhängt. Sie wird deshalb häufig bevorzugt. Konsequenterweise werden dann auch die Lösungen der Form (11.3.36) als Moden bezeichnet. Um eine stehende Welle in θ -Richtung oder z -Richtung zu erzeugen, müssen dann allerdings zwei Moden mit unterschiedlichem Vorzeichen von m beziehungsweise α_{mn} überlagert werden.

Zur "Cut-Off"-Bedingung

Reguläre Wellenausbreitung in Achsrichtung liegt nur vor, falls (11.3.34) erfüllt ist. Dazu muß der Ausdruck unter der Wurzel in (11.3.32) positiv sein. Das bedeutet, es muß

$$\frac{\omega}{c} > \beta_{mn} = \frac{s_{mn}}{R} \quad (11.3.37)$$

gelten. Es ergibt sich eine "Cut-Off"-Frequenz

$$\omega_{mn}^c = \frac{c s_{mn}}{R} \quad (11.3.38)$$

für jede mn -Mode.

In dem Fall des runden Querschnitts kann die "Cut-Off"-Bedingung (11.3.37) geometrisch interpretiert werden. Durch Multiplikation folgt die Ungleichung

$$\omega R > c s_{mn} \quad (11.3.39)$$

Der Ausdruck ωR auf der linken Seite entspricht einer Geschwindigkeit. Im Fall der "Spinning Mode" mit $m = 1$ ist das gerade die Geschwindigkeit, mit der in einem Querschnitt ein Knotenpunkt an der Wand umläuft. Die Situation ist in der Abbildung 11.10 veranschaulicht. In einer Periode dreht sich das Druckfeld einmal um 360

11 Dreidimensionale Kanalmoden

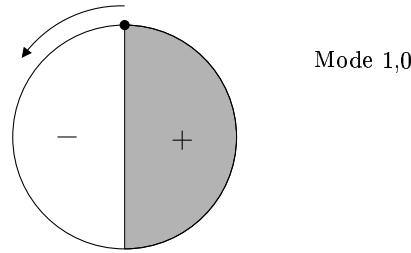


Abbildung 11.10: Zur Interpretation der “Cut-Off”-Bedingung.

Grad. Der Knotenpunkt an der Wand legt eine Strecke von $2\pi R$ zurück. Das ergibt eine Bahngeschwindigkeit von ωR . Bei Moden mit $m = 2$ dreht sich das Druckfeld nur um 180 Grad in einer Periode. Entsprechend ist die Bahngeschwindigkeit der Knotenpunkte an der Wand gleich $\omega R/2$.

Die “Cut-Off”-Bedingung (11.3.39) besagt, daß die Knotenpunkte an der Wand eine Mindestgeschwindigkeit haben müssen, damit sich die entsprechende “Spinning Mode” ausbreiten kann. Für $m = 1$ muß

$$\text{Umlaufgeschwindigkeit} = \omega R > c s_{1n} \quad (11.3.40)$$

gelten. Das erste Maximum der Bessel-Funktion J_1 liegt bei $s_{10} \approx 1.84$. Daraus ergibt sich eine minimale Umlaufgeschwindigkeit von

$$c s_{10} \approx 1.84 c \quad (11.3.41)$$

Das heißt, die Machzahl des Knotenpunktes beim Umlauf muß größer als 1.84 sein, damit sich eine “Spinning Mode” mit $m = 1$ ausbreiten kann. Für $m = 2$ ist

$$2 \times \text{Umlaufgeschwindigkeit} = \omega R > c s_{2n} \quad (11.3.42)$$

Voraussetzung für die Ausbreitung. Es ergibt sich eine minimale Umlaufgeschwindigkeit von

$$c \frac{s_{20}}{2} \approx 1.53 c \quad (11.3.43)$$

Analog erhält man für $m = 3$ eine Mindestgeschwindigkeit der Knotenpunkte von

$$c \frac{s_{30}}{3} \approx 1.40 c \quad (11.3.44)$$

In jedem Fall liegt die minimale Umlaufgeschwindigkeit über der Schallgeschwindigkeit. Zu beachten ist, daß die Bewegung der Knotenpunkte an der Wand nicht mit dem Transport von Information verbunden ist. Es handelt sich um die Phasengeschwindigkeit für die Ausbreitung in Umfangsrichtung.