

10 Schallfelder umströmter Körper

10.1 Formale Darstellung von bewegten Flächen

Das Vorhandensein von Körpern erfordert bei der Lösung der Wellengleichung die Erfüllung von Randbedingungen an deren Oberfläche. Bei festen undurchlässigen Körpern ist dies eine sogenannte Nichtdurchflußbedingung. Eine solche Bedingung wurde auch bei der Behandlung der atmenden Kugel angewendet. Die formale Beschreibung der Randbedingung bei der atmenden oder vibrierenden Kugel war auf Grund der Symmetrie relativ einfach. Ebenso konnten die Lösungen der Wellengleichung für diese Fälle durch Probieren gefunden werden. Bei einem beliebig geformten Körper, der sich irgendwie verformt, kann allein die formale Beschreibung der Oberflächenbewegung schon eine größere Schwierigkeit darstellen. Entsprechend ist die Lösung der Wellengleichung viel aufwendiger. In jedem Fall ist jedoch eine formale Darstellung notwendig.

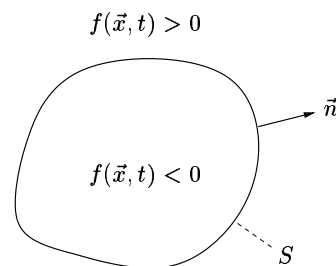


Abbildung 10.1: Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ bei Volumen V mit Oberfläche S .

Im folgenden soll eine spezielle Methode vorgestellt werden, um eine beliebig bewegte Fläche im Raum zu beschreiben. Ein naheliegender Ansatz ist es, die Fläche zu parametrisieren. Dann kann die Position der Punkte auf der Oberfläche in Abhängigkeit der Parameter und der Zeit mit Funktionen dargestellt werden. Für allgemeine Herleitungen ist jedoch ein ganz anderer Ansatz viel besser geeignet. Dazu wird eine Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ auf spezielle Weise definiert. Gegeben sei ein zeitlich veränderliches Volumen mit der Oberfläche S . Zur formalen Beschreibung der Oberfläche wird

10.1 Formale Darstellung von bewegten Flächen

die Hilfsfunktion so konstruiert, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) < 0 & \text{ falls } \vec{x} \text{ innerhalb von } V \\ f(\vec{x}, t) > 0 & \text{ falls } \vec{x} \text{ außerhalb von } V \\ f(\vec{x}, t) = 0 & \text{ auf der Oberfläche } S \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

Die Verhältnisse sind in Abbildung 10.1 veranschaulicht. Die Hilfsfunktion soll stetig und fast überall differenzierbar sein. Zusätzlich soll die Bedingung

$$\text{grad}f(\vec{x}, t) \neq 0 \quad \text{auf der Oberfläche } S \quad (10.1.2)$$

gelten. Dabei ist zu bemerken, daß der Gradient von $f(\vec{x}, t)$ nicht immer überall definiert sein kann. Der Gradient von $f(\vec{x}, t)$ zeigt auf S in Richtung des Normalenvektors \vec{n} . An Stellen, an denen die Oberfläche eine Kante besitzt, ist die Normalenrichtung nicht eindeutig festgelegt. Entsprechend ist dort $f(\vec{x}, t)$ nicht differenzierbar und der Gradient ist nicht definiert. Die Bedingung (10.1.2) kann an diesen Stellen nicht gelten. Um die Betrachtungen nicht unnötig kompliziert zu gestalten, soll im weiteren von diesen Schwierigkeiten abgesehen werden. Es wird angenommen, die Oberfläche sei "gutmütig" in dem Sinn, daß sie keine Kanten besitzt und eine differenzierbare Hilfsfunktion erlaubt.

Anschaulich ist klar, daß für alle möglichen Bewegungen der Oberfläche S eine solche Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ gefunden werden kann. Die Hilfsfunktion ist natürlich nicht eindeutig. Umgekehrt wird jedoch durch die Hilfsfunktion die Bewegung von S eindeutig festgelegt. Als Beispiel soll $f(\vec{x}, t)$ für eine einfache Geometrie angegeben werden. Betrachtet wird die Oberfläche einer atmenden Kugel, deren momentaner Radius mit $a(t)$ vorgegeben ist. Der Kugelmittelpunkt befindet sich an der Stelle \vec{x}_0 . Eine mögliche Wahl der Hilfsfunktion lautet

$$f(\vec{x}, t) = |\vec{x} - \vec{x}_0|^2 - a^2(t) \quad (10.1.3)$$

Die Quadrate dienen dazu, die Funktion auch an der Stelle \vec{x}_0 differenzierbar zu machen.

Das Konzept der Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ soll bei einigen Herleitungen verwendet werden. Dabei ist nicht die konkrete Form der Hilfsfunktion im Einzelfall wichtig, sondern die Existenz und einige allgemeine Relationen, die im Folgenden betrachtet werden. Da der Normalenvektor \vec{n} parallel zum Gradienten von $f(\vec{x}, t)$ ist gilt auf S bei $f(\vec{x}, t) = 0$ die Beziehung

$$\vec{n}(\vec{x}, t) = \frac{\text{grad}f(\vec{x}, t)}{|\text{grad}f(\vec{x}, t)|} \quad (10.1.4)$$

Damit kann \vec{n} direkt aus $f(\vec{x}, t)$ berechnet werden.

Bei Bewegung der Oberfläche muß

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0 \quad \text{bei} \quad f(\vec{x}, t) = 0 \quad (10.1.5)$$

gelten. Ist die Hilfsfunktion bei S zeitlich konstant, dann liegt keine Bewegung vor. Neben diesen grundsätzlichen Aussagen, kann auch eine quantitative Beziehung zwischen der Oberflächenbewegung und der Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ gefunden werden. Dazu

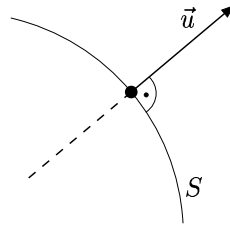


Abbildung 10.2: Zur Definition der Normalengeschwindigkeit \vec{u} .

wird die Normalengeschwindigkeit \vec{u} eingeführt. Dies ist die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt auf S in Richtung von \vec{n} bewegen. Wie in der Abbildung 10.2 dargestellt ist, steht \vec{u} definitionsgemäß immer senkrecht auf S .

Um eine formale Beziehung zu erhalten, wird das totale Differential

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i \quad (10.1.6)$$

betrachtet. Wählt man sich einen Punkt auf der Oberfläche S aus, so wird dieser bei Bewegung der Oberfläche ebenfalls verschoben. In einem infinitesimalen Zeitabschnitt dt ergibt sich die Verschiebung $dx_i^{(S)}$. Das hochgestellt S soll kennzeichnen, daß es sich um einen Punkt auf S handelt. Da auf S die Hilfsfunktion immer gleich Null ist, ergibt sich $df = 0$ für diesen Punkt. Es gilt damit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i^{(S)} = 0 \quad (10.1.7)$$

Allerdings ist die Verschiebung des Punktes auf der Oberfläche nicht eindeutig, da die Punkte auf der Oberfläche bei der gegebenen Methode im Gegensatz zu einer Parametrisierung nicht gekennzeichnet sind.

In Abbildung 10.3 sind drei mögliche Verschiebungen dargestellt. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die Oberfläche S zu zwei Zeitpunkten, zwischen denen die infinitesimale Zeit dt vergangen ist. Die hell gefüllten Punkte stellen mögliche neue Positionen des schwarz gefüllten Punktes dar. Für alle Verschiebungen gilt (10.1.7).

Betrachtet man ausgewählt nur die Verschiebung in Richtung von \vec{n} , so gilt

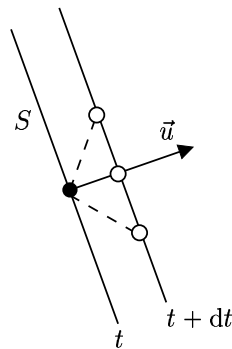
$$\frac{dx_i^{(S)}}{dt} = u_i \quad (10.1.8)$$

Aus (10.1.7) folgt daher

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (10.1.9)$$

oder in vektoriellen Schreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad} f = 0 \quad (10.1.10)$$

Abbildung 10.3: Verschiebung der Punkte auf S bei Bewegung.

Diese Beziehung zwischen den Ableitungen der Hilfsfunktion f und der Normalengeschwindigkeit wird im folgenden Abschnitt benötigt.

10.2 Die Lighthill-Gleichung mit Berandung

Die Lighthill-Gleichung stellt eine inhomogene Wellengleichung für die Dichteschwankung dar. Ohne Berandung kann die Lösung direkt angegeben werden. Die Quellstärkeverteilung wird mit einer einfachen Greenschen Funktion multipliziert und über den gesamten Quellbereich integriert. Dies ist nicht mehr so einfach möglich, wenn sich feste Körper im Raum befinden. Innerhalb der Körper gilt die Wellengleichung nicht. An den Oberflächen der Körper müssen Randbedingungen erfüllt werden. Dadurch wird die Bestimmung des Schallfeldes deutlich erschwert. Es existiert ein Weg eine Wellengleichung so umzuformen und zu erweitern, daß eine Lösung auch mit der einfachen Greenschen Funktion berechnet werden kann. Dies soll hier für die Lighthill-Gleichung durchgeführt werden. Die Lösung der erweiterten Lighthill-Gleichung führt dann auf die sogenannte Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkins. Hier soll die erweiterte Lighthill-Gleichung zunächst abgeleitet werden. Die Überlegungen gehen von einem Volumen V mit einer Oberfläche S aus. Die Oberfläche wird durch eine Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$, wie sie im letzten Abschnitt eingeführt wurde, beschrieben.

Die Herleitung entspricht in weiten Teilen der Herleitung der Lighthill-Gleichung. Es wird jedoch noch eine kleine Vorbereitung benötigt. Für die Heaviside-Funktion $H(x)$ gilt allgemein

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (10.2.1)$$

Wird die Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ als Argument der Heaviside-Funktion eingesetzt, ergibt sich ein Ausdruck, der innerhalb des Volumens V verschwindet und außerhalb gleich

10 Schallfelder umströmter Körper

Eins ist. Das bedeutet, es ist

$$H(f(\vec{x}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{x} \notin V; f(\vec{x}, t) > 0 \\ 0 & \text{für } \vec{x} \in V; f(\vec{x}, t) < 0 \end{cases} \quad (10.2.2)$$

Für den weiteren Überlegungen spielt der Ausdruck $H(f)$ eine zentrale Rolle.

Wie bei der Herleitung der Lighthill-Gleichung wird auch hier mit den nichtlinearen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls begonnen. Die beiden Gleichungen werden zunächst auf spezielle Weise umgeformt. Zuerst wird die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (10.2.3)$$

mit dem Ausdruck $H(f)$ multipliziert. Es ergibt sich

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) \right\} H(f) = 0 \quad (10.2.4)$$

Dabei ist mit ρ_0 eine frei wählbare Konstante eingeführt worden, deren zeitliche Ableitung gleich Null sein muß. Der Ausdruck $H(f)$ kann in die Ableitungen hineingezogen werden. Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho - \rho_0) H(f) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\rho v_i) H(f) \right\} \\ &= (\rho - \rho_0) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ H(f) \right\} + (\rho v_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ H(f) \right\} \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Es ist zu bemerken, daß die Ableitung der Heaviside-Funktion nur als verallgemeinerte Funktion – die δ -Funktion – definiert ist. Für die weiteren Umformungen werden daher auch die verallgemeinerten Funktionen zugelassen. Für die Zeitableitung auf der rechten Seite folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ H(f(\vec{x}, t)) \right\} = \frac{dH}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = \delta(f) \frac{\partial f}{\partial t} \quad (10.2.6)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nur bei $f(\vec{x}, t) = 0$ – also auf der Oberfläche S – von Null verschieden. Dort gilt die Gleichung (10.1.9). Sie stellt eine Beziehung zwischen der Normalengeschwindigkeit \vec{u} und den Ableitungen von $f(\vec{x}, t)$ dar. Mit ihr kann die Zeitableitung $\partial f / \partial t$ dort, wo $f(\vec{x}, t) = 0$ gilt, ersetzt werden. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ H(f(\vec{x}, t)) \right\} = -u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad (10.2.7)$$

Für die räumliche Ableitung ergibt sich entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ H(f(\vec{x}, t)) \right\} = \frac{dH}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad (10.2.8)$$

Setzt man die beiden Ableitungen auf der rechten Seite von Gleichung (10.2.5) ein, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho - \rho_0) H(f) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\rho v_i) H(f) \right\} = \left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad (10.2.9)$$

10.2 Die Lighthill-Gleichung mit Berandung

Diese Beziehung stellt eine Erweiterung der Kontinuitätsgleichung dar. Die rechte Seite ist nur auf der Oberfläche S von Null verschieden. Die linke Seite ist innerhalb des Volumens V gleich Null. Dies bedeutet, daß sich innerhalb von V die Gleichung (10.2.9) auf die Trivialität $0 = 0$ reduziert.

Die Kontinuitätsgleichung (10.2.3) beschreibt die Dichteänderung in dem Fluid. Sie wird nicht innerhalb eines Körpers angewendet, der sich im Strömungsfeld befindet. Falls ein Körper vorhanden ist, wird auf dessen Oberfläche eine Randbedingungen erfüllt. Dies kann zum Beispiel bei einer festen Oberfläche eine Nichtdurchflußbedingung sein. Im Gegensatz dazu kann Gleichung (10.2.9) ohne Probleme im gesamten Raum angewendet werden, auch wenn sich ein Körper im Strömungsfeld befinden. Es muß nur die Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ so gewählt werden, daß sich der Körper innerhalb des Volumens V befinden. Dabei ist auch der Spezialfall erlaubt, daß S mit den Körperoberflächen übereinstimmt. Dann entspricht das Volumen V genau dem Körpervolumen. Im Körper gilt $f(\vec{x}, t) < 0$ und Gleichung (10.2.9) wird zu $0 = 0$. Das bedeutet, Gleichung (10.2.9) gilt im gesamten Raum und geht sozusagen "durch den Körper". Es muß keine Randbedingungen erfüllt werden. Die Randbedingungen wurde gegen den zusätzlichen Term auf der rechten Seite von Gleichung (10.2.9) "eingetauscht".

Analog zur Kontinuitätsgleichung kann auch die Impulserhaltungsgleichung umgeformt werden. Dabei wird von der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(P_{ij} + \rho v_i v_j) = 0 \quad (10.2.10)$$

mit der Abkürzung

$$P_{ij} = (p - p_0)\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (10.2.11)$$

ausgegangen. Die Größe τ_{ij} bezeichnet den Spannungstensor. Es wurde auch hier wieder eine frei wählbare Konstante p_0 eingeführt, deren räumliche Ableitung verschwindet. Die Umformung der Impulserhaltungsgleichung liefert das Ergebnis

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho v_i) H(f) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (P_{ij} + \rho v_i v_j) H(f) \right\} = \left\{ \rho v_i (v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \quad (10.2.12)$$

Genau wie (10.2.9) gilt Gleichung (10.2.12) im gesamten Raum und auch in einem Körper, wenn $f(\vec{x}, t)$ geeignet gewählt wird. Aus der umgeformten Kontinuitätsgleichung und Impulserhaltungsgleichung kann eine Wellengleichung hergeleitet werden. Dazu wird (10.2.9) partiell nach der Zeit abgeleitet und die Divergenz von (10.2.12) gebildet. Die Ergebnisse werden voneinander abgezogen. Dabei heben sich wie gewöhnlich zwei Terme auf der linken Seite gegeneinander auf. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ (\rho - \rho_0) H(f) \right\} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ (P_{ij} + \rho v_i v_j) H(f) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho (v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i (v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right) \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

10 Schallfelder umströmter Körper

Das Resultat besitzt allerdings noch nicht die Form einer Wellengleichung. Um dies zu erreichen wird – analog zur Herleitung der Lighthill-Gleichung – auf beiden Seiten der Ausdruck

$$c^2 \Delta \{(\rho - \rho_0)H(f)\} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} \{(\rho - \rho_0)\delta_{ij}H(f)\} \quad (10.2.14)$$

subtrahiert. Dabei ist c zunächst eine frei wählbare Konstante, die für sinnvolle Anwendungen später gleich der Schallgeschwindigkeit gesetzt wird. Zusätzlich wird der zweite Term auf der linken Seite von (10.2.13) durch Addition auf die rechte Seite gebracht. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \{(\rho - \rho_0)H(f)\} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} \{T_{ij}H(f)\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i(v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right) \end{aligned} \quad (10.2.15)$$

mit dem Lighthillschen Spannungstensor

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + P_{ij} - c^2(\rho - \rho_0)\delta_{ij} \quad (10.2.16)$$

Gleichung (10.2.15) stelle eine inhomogene Wellengleichung für den Ausdruck

$$(\rho - \rho_0) \cdot H(f) = \rho' \cdot H(f) \quad (10.2.17)$$

mit Quelltermen auf der rechten Seite dar. Sie folgt ohne Näherungen aus den nicht-linearen Erhaltungsgleichungen. Vereinfacht kann Gleichung (10.2.15) als

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \{\rho' H(f)\} = q(\vec{x}, t) \quad (10.2.18)$$

geschrieben werden. Der Ausdruck auf der linken Seite ist linear. Alle Nichtlinearitäten sind in dem Quellterm $q(\vec{x}, t)$ enthalten.

Für den Fall, daß überall $f(\vec{x}, t) > 0$ und damit $H(f) = 1$ gilt, reduziert sich (10.2.15) erwartungsgemäß auf die Lighthill-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \rho' = \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} T_{ij} \quad (10.2.19)$$

Die Lighthill-Gleichung gilt nur innerhalb des Fluids. Befinden sich ein Körper im Strömungsfeld müssen entsprechend Randbedingungen erfüllt werden. Dagegen gilt die erweiterte Gleichung (10.2.15) überall. Dies hat den Vorteil, daß die ihre Lösung mit Hilfe einer einfachen Greenschen Funktion berechnet werden kann. Das bedeutet, die Lösung der erweiterten Gleichung kann in jedem Fall durch das Integral

$$\{\rho' H(f)\}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (10.2.20)$$

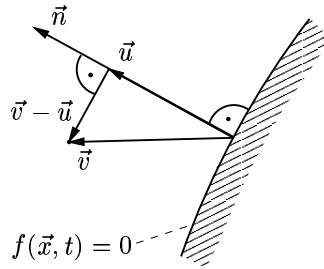


Abbildung 10.4: Zur Randbedingung an einer bewegten undurchlässigen Wand.

dargestellt werden. Diese einfache Form der Lösung ist bei der Lighthill-Gleichung nur möglich, falls sich keine Körper im Strömungsfeld befinden.

Die erweiterte Form der Lighthill-Gleichung geht auf die Überlegungen von Ffowcs-Williams und Hawkings zurück. Historisch wurde allerdings zuerst eine spezielle Lösung der Gleichung (10.2.15) angegeben, bevor die Gleichung selbst abgeleitet wurde. Die spezielle Lösung wurde aus der Lösung der Lighthill-Gleichung durch Umformungen gewonnen. So wird in der Literatur uneinheitlich manchmal die spezielle Lösung und manchmal die Differentialgleichung (10.2.15) als Ffowcs-Williams und Hawkings-Gleichung bezeichnet. Die erwähnte spezielle Lösung wird in einem der folgenden Abschnitte noch vorgestellt.

10.3 Quellen auf festen Oberflächen

Zur sinnvollen Anwendung der erweiterten Lighthill-Gleichung muß die Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ und damit die Oberfläche S geeignet gewählt werden. Wenn S mit der Oberfläche eines undurchlässigen Körpers übereinstimmt, ergeben sich einige Vereinfachungen, die im folgenden vorgestellt werden sollen. Dazu wird nur der flächenhafte Anteil

$$\begin{aligned}
 q(\vec{x}, t) = & + \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i (v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right)
 \end{aligned}
 \tag{10.3.1}$$

der Quellverteilung betrachtet. Dieser ist ausschließlich auf der Oberfläche S aktiv, da sonst überall $\delta(f) = 0$ gilt.

In dem mit der Körperoberfläche mitbewegten Bezugssystem darf die Geschwindigkeit des Fluids keine Komponente senkrecht zur Oberfläche besitzen, um die Bedingung der undurchlässigen festen Wand zu erfüllen. Ist \vec{u} die Normalengeschwindigkeit der Oberfläche und \vec{v} die Geschwindigkeit des Fluids, so ist die Geschwindigkeit im

10 Schallfelder umströmter Körper

mitbewegten System durch die Differenz $\vec{v} - \vec{u}$ gegeben. Dieser Differenzvektor muß senkrecht auf dem Normalenvektor \vec{n} stehen. Es gilt

$$(v_i - u_i) n_i = 0 \quad (10.3.2)$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die Oberflächenquellterme deutlich vereinfachen, da einige Anteile herausfallen. Dazu wird der Gradient von f in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = n_i |\text{grad} f| \quad (10.3.3)$$

in (10.3.1) eingesetzt. Man erhält

$$q(\vec{x}, t) = + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 u_i n_i |\text{grad} f| \delta(f) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ P_{ij} n_j |\text{grad} f| \delta(f) \right\} \quad (10.3.4)$$

Dabei sind wegen (10.3.2) die Terme mit $(v_i - u_i)$ herausgefallen.

Üblicherweise werden die Quellverteilungen noch kompakter dargestellt, in dem die Abkürzungen

$$u_n = |\vec{u}| = u_i n_i \quad (10.3.5)$$

und

$$l_i = P_{ij} n_j = (p - p_0) n_i - \tau_{ij} n_j \quad (10.3.6)$$

eingeführt werden. Es ergibt sich dann

$$q(\vec{x}, t) = + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 u_n |\text{grad} f| \delta(f) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ l_i |\text{grad} f| \delta(f) \right\} \quad (10.3.7)$$

Der Vektor l_i entspricht einer lokalen Kraft pro Fläche, die von dem Körper auf das Fluid ausgeübt wird. Dabei sind Anteile aus dem Druck und den Schubspannungen enthalten. Durch eine Kraft wird ein Impuls auf das Medium übertragen. Für eine bewegte punktförmige Impulsquelle ergab sich in Abschnitt 9.4 eine Quellverteilung der Form

$$q(\vec{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\} \quad (10.3.8)$$

Dabei war f_i eine Kraft pro Volumen. Der l_i -Term in (10.3.7) stellt damit das flächenhafte Gegenstück zu der punktförmigen Quellverteilung dar. Er repräsentiert sozusagen eine flächenhafte Impulsquelle, die bewegt sein kann.

Analog kann auch der erste Quellterm auf der rechten Seite in (10.3.7) physikalisch gedeutet werden. Die Größe $\rho_0 u_n$ entspricht einer verdrängten Masse pro Fläche und pro Zeit. Für eine bewegte punktförmige Massenquelle ergab sich eine Quellverteilung

$$q(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\} \quad (10.3.9)$$

Dabei war $\rho_0 \dot{\beta}(t)$ eine verdrängte Masse pro Volumen und pro Zeit. Der $\rho_0 u_n$ -Term in (10.3.7) kann somit als bewegte flächenhafte Massenquelle angesehen werden.

Anscheinend kann die Randbedingung an einem festen Körper im Strömungsfeld gerade durch eine Überlagerung aus Massen- und Impulsquelle auf der Körperoberfläche ersetzt werden. Anstatt die Randbedingung zu erfüllen, werden die zusätzlichen Quellterme mit berücksichtigt.

Zu bemerken ist, daß bisher keine Näherungen – wie etwa eine Linearisierung – in die Überlegungen mit eingeflossen ist. Die abgeleiteten Beziehungen einschließlich der Ausdrücke auf der rechten Seite sind eine direkte Folgen der Kontinuitäts- und der Impulserhaltungsgleichung. Sie wurden lediglich im akustischen Sinn als Quellterme interpretiert.

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

Betrachtet wird eine Modellquellverteilung, die bis auf die Ableitungen den in der erweiterten Lighthill-Gleichung auftretenden Oberflächenquelltermen entspricht. Auch bei der bewegten punktförmigen Quelle wurde zunächst eine Modellquelle ohne direkte physikalische Entsprechung untersucht. Die Ergebnisse für die Modellquelle konnten dann auf die physikalischen Fälle übertragen werden. Das gleiche Vorgehen wird hier wiederholt.

Die flächenhafte Modellquellverteilung lautet

$$q(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}, t) |\operatorname{grad} f| \delta(f) \quad (10.4.1)$$

Berechnet werden soll die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = q(\vec{x}, t) \quad (10.4.2)$$

Es sei angemerkt, daß es für die rein formale Untersuchung zunächst keine Rolle spielt, ob die Wellengleichung für den Druck p' oder für die Größe $\rho' H(f)$ betrachtet wird. In diesem Abschnitt wird p' statt $\rho' H(f)$ gewählt, um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten. Es muß nur angenommen werden, daß die inhomogene Wellengleichung – wie die erweiterte Lighthill-Gleichung – im gesamten Raum gilt. Dann ergibt sich für (10.4.2) die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} Q(\vec{y}, \tau) |\operatorname{grad} f(\vec{y}, \tau)| \delta(f(\vec{y}, \tau)) \, d^3\vec{y} \quad (10.4.3)$$

Dabei ist die retardierte Zeit mit

$$\tau(\vec{x}, \vec{y}, t) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (10.4.4)$$

und der Abstand zwischen Beobachter und Quellpunkt mit

$$r(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (10.4.5)$$

10 Schallfelder umströmter Körper

gegeben. Gleichung (10.4.3) läßt sich in kompakter Form als

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \left[Q |\text{grad} f| \delta(f) \right]_{\text{ret}} d^3 \vec{y} \quad (10.4.6)$$

schreiben. Diese Art der Darstellung findet man häufig in der Literatur. Die eckigen Klammer $[\cdot]_{\text{ret}}$ gibt an, daß der in ihr eingeschlossene Ausdruck zur retardierten Zeit am Quellort ausgewertet werden muß.

Zunächst wird der Sonderfall einer unbewegten Oberfläche betrachtet. Das bedeutet, die Funktion f hängt ausschließlich von der Ortskoordinate und nicht mehr von der Zeit ab:

$$f(\vec{y}, \tau) = f_0(\vec{y}) \quad (10.4.7)$$

Die Fläche $f_0(\vec{y}) = 0$ entspricht der Oberfläche S . In diesem Fall kann zur Berechnung des Integrals in (10.4.3) die Rechenregel

$$\int_{\mathbb{R}^3} h(\vec{y}) \delta(f_0(\vec{y})) d^3 \vec{y} = \int_S \frac{h(\vec{y})}{|\text{grad} f_0(\vec{y})|} dS(\vec{y}) \quad (10.4.8)$$

angewendet werden. Hier ist $h(\vec{y})$ zunächst eine beliebige Funktion. Das Raumintegral wird in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Die Schreibweise $dS(\vec{y})$ soll klarstellen, daß die Oberflächenintegration bezüglich der Variablen \vec{y} durchgeführt wird. In dem betrachteten Fall wird

$$h(\vec{y}) = \frac{1}{r} Q(\vec{y}, \tau) |\text{grad} f_0(\vec{y})| \quad (10.4.9)$$

gewählt. Einsetzen in (10.4.8) ergibt für die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} Q(\vec{y}, \tau) dS(\vec{y}) \quad (10.4.10)$$

Damit ist der Druck als Integral über die mit Quellen belegten Oberfläche S dargestellt.

Es ist zu bemerken, daß die Hilfsfunktion $f_0(\vec{y})$ nicht eindeutig durch die Oberfläche S festgelegt wird. Auf den ersten Blick hängt damit die Quellstärke in (10.4.1) von der Wahl der Hilfsfunktion ab. In der Lösung (10.4.10) ist jedoch der $|\text{grad} f_0(\vec{y})|$ -Term herausgefallen. Das bedeutet, die Lösung hängt nicht von der konkreten Wahl der Hilfsfunktion sondern nur von der Oberfläche $f_0(\vec{y}) = 0$ ab. Anscheinend wird dies durch den Ausdruck $|\text{grad} f| \delta(f)$ in der Quellverteilung garantiert.

Bei bewegter Oberfläche wird die Umformung der Lösung erheblich erschwert. In Gleichung (10.4.3) sind die Funktionswerte $Q(\vec{y}, \tau)$ und $f(\vec{y}, \tau)$ im Integrand zu einer bestimmten – nach (10.4.4) von \vec{y} abhängigen – retardierten Zeit τ zu nehmen. Der Integrand ist für ein festes \vec{x} und t nur an Stellen \vec{y} mit

$$f\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}\right) = [f]_{\text{ret}} = 0 \quad (10.4.11)$$

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

von Null verschieden. Gleichung (10.4.11) definiert eine Fläche im \mathbb{R}^3 , die im folgenden Σ genannt wird. Das heißt, Σ ist die Menge aller Punkte \vec{y} , für die bei gegebenen \vec{x} und t Gleichung (10.4.11) erfüllt ist. Im Gegensatz zu S hängt Σ nicht von der Zeit ab. Die Oberfläche S stimmt im allgemeinen zu keiner Zeit mit der Fläche Σ überein. Theoretisch kann das Raumintegral in (10.4.3) in ein Integral über die Fläche Σ umgeformt werden. Die Fläche ist jedoch nicht direkt gegeben, und weiter unten wird gezeigt, daß ihre Berechnung relativ aufwendig sein kann.

Für die folgenden Überlegungen wird analog zum Fall der bewegten Punktquelle Gleichung (10.4.3) erweitert, und zusätzlich ein Integral über die retardierte Zeit τ eingeführt. Es kann

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} Q |\text{grad} f| \delta(f) \delta(g) d\tau d^3\vec{y} \quad (10.4.12)$$

geschrieben werden. Jetzt ist τ eine unabhängige Integrationsvariable und entspricht nicht mehr der speziellen retardierten Zeit aus Gleichung (10.4.4). Die Variablen \vec{y} und τ sind unabhängig, und die Integrationen können vertauscht werden. Die Funktionen Q und f sind wie gehabt von \vec{y} und τ abhängig. Wie bei der bewegten Punktquelle tritt die Funktion

$$g(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau \quad (10.4.13)$$

auf. Der Funktionswert entspricht der Differenz zwischen der in (10.4.4) gegebenen speziellen retardierten Zeit und der Integrationsvariablen τ . Für eine feste Beobachtungsposition \vec{x} und Beobachtungszeit t ist die Funktion g nur von \vec{y} und τ anhängig.

Veranschaulichung der Quellverteilung

Die Integration in (10.4.12) erfolgt im vierdimensionalen (\vec{y}, τ) -Raum. Der Integrand in (10.4.12) ist nur an Stellen mit $f(\vec{y}, \tau) = 0$ und $g(\vec{y}, \tau) = 0$ von Null verschieden. Die Bedingungen $f = 0$ und $g = 0$ definieren zwei Hyperflächen im vierdimensionalen (\vec{y}, τ) -Raum. Die Schnittmenge der Flächen gibt wieder eine Hyperfläche in diesem Raum. Die Projektion dieser Schnittmenge auf den dreidimensionalen \vec{y} -Raum ist die durch Gleichung (10.4.11) gegebene Fläche Σ .

Zu Veranschaulichung wird die geometrische Situation zunächst für einen eindimensionalen y -Raum betrachtet. Dieser Fall wurde im Prinzip bereits in Abschnitt 9.1 behandelt. Abbildung 10.5 zeigt die Darstellung in der (y, τ) -Ebene nochmal auf. Die Fläche $g = 0$ entspricht zwei geraden Strahlen, die sich im Beobachtungspunkt (\vec{x}, t) treffen. Alle Ereignisse auf diesen Strahlen werden vom Beobachter gleichzeitig empfangen. Die Oberfläche S reduziert sich im eindimensionalen Raum zu einem Punkt. Die Bahn des Punktes ist durch $f = 0$ gegeben. Die Fläche Σ würde im eindimensionalen Fall einem Punkt auf der y -Achse unterhalb des Schnittpunktes der $f = 0$ Kurve mit den $g = 0$ Strahlen entsprechen.

Bei zwei Raumdimensionen ($\vec{y} \in \mathbb{R}^2$) wird die Menge $g = 0$ zu einem Kegelmantel im dreidimensionalen (\vec{y}, τ) -Raum. In der Spitze des Kegelmantels liegt der

10 Schallfelder umströmter Körper

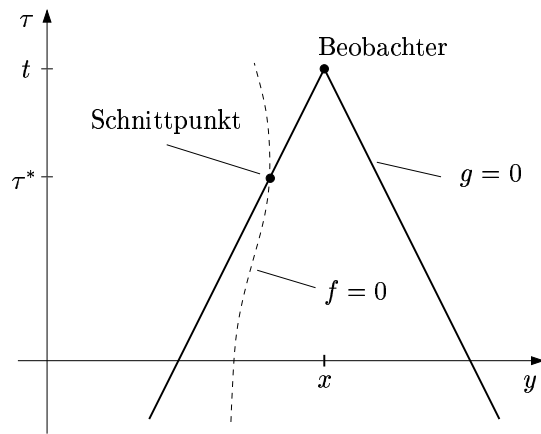


Abbildung 10.5: Betrachtung der Mengen $f = 0$ und $g = 0$ bei einer Raumdimension: $y \in \mathbb{R}$.

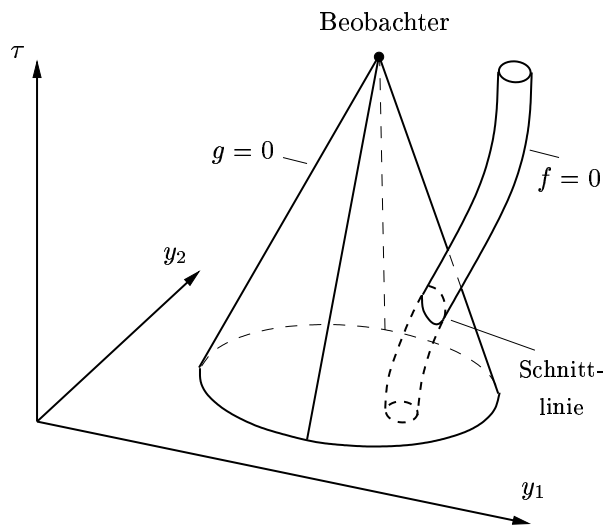


Abbildung 10.6: Betrachtung der Mengen $f = 0$ und $g = 0$ bei zwei Raumdimensionen: $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

Beobachtungspunkt (\vec{x}, t) . In der Abbildung 10.6 ist $f = 0$ für einen bewegten Kreis dargestellt. Durch die Bewegung ergibt sich für $f = 0$ eine Art Schlauch, der den Kugelmantel schneidet. Die Projektion der entstehenden Schnittlinie auf die Ebene $\tau = 0$ entspricht der Fläche Σ .

Bei drei Raumdimensionen ($\vec{y} \in \mathbb{R}^3$) ist die Veranschaulichung nicht so einfach wie im ein- und zweidimensionalen Fall. Sie ist jedoch immer noch möglich, wenn als vierte Dimension die Zeit mit benutzt wird. Konstruiert man sich für eine feste retardierte Zeit τ eine Kugel mit dem Radius $c \cdot (t - \tau)$ um die Beobachtersposition \vec{x} , so gilt auf der Kugeloberfläche die Bedingung $g(\vec{y}, \tau) = 0$. Alle Ereignisse, die zur Zeit τ auf der Kugeloberfläche stattfinden, werden vom Beobachter zur Zeit t registriert. Mögliche Ereignisse sind die Quellen, die sich auf der Oberfläche S befinden. Im folgenden Beispiel soll S mit der Oberfläche eines sich drehenden Rotors übereinstimmen. Für alle Punkte auf der Rotoroberfläche gilt $f(\vec{y}, \tau) = 0$. Zur betrachteten Zeit τ schneidet die Rotoroberfläche die Kugeloberfläche, und es ergibt sich eine Schnittlinie, die mit $\Gamma(\tau)$ bezeichnet wird. In Abbildung 10.7 wird diese Schnittlinie veranschaulicht. Für eine geringfügig frühere Zeit τ' ergibt sich eine etwas größere Kugel und die Rotorposition ist entsprechend um einen kleinen Winkel zurückgedreht. Dadurch erhält man eine weitere Schnittlinie $\Gamma(\tau')$.

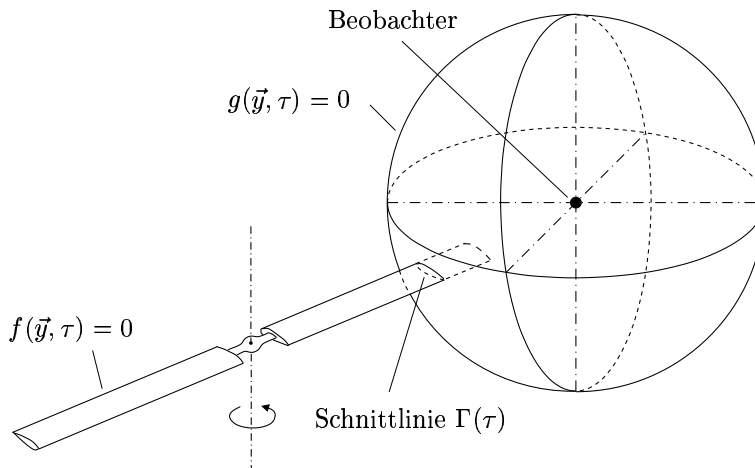


Abbildung 10.7: Zur Erklärung der Schnittlinie $\Gamma(\tau)$.

Denkt man sich nun die retardierte Zeit τ variable, und lässt τ von der Beobachtungszeit t beginnend gegen $-\infty$ laufen, so entspringt dem Beobachtungspunkt eine Kugel, die immer größer wird. Dabei wird von der Kugeloberfläche $g(\vec{y}, \tau) = 0$ der gesamte Raum einmal "abgetastet", wobei unendlich viele Schnittlinien $\Gamma(\tau)$ entstehen können. Die Vereinigungsmenge der Schnittlinien bildet die durch Gleichung (10.4.11) gegebene Fläche Σ . Die Form dieser Fläche weicht unter Umständen deutlich von der Rotorgeometrie ab. Bewegt sich der Rotor am äußeren Blattende mit Überschall, so ist

Σ nicht mehr einfach zusammenhängend und besteht aus mehreren separierten Teilen.

Durch die bisherigen Überlegungen konnten zwar grundsätzliche Erkenntnisse über das Integral in (10.4.12) gewonnen werden, jedoch ist die praktische Berechnung der Fläche Σ sehr auswendig. Unter bestimmten Umständen läßt sich das Problem jedoch umgehen, und das Integral in (10.4.12) kann durch ein Integral über die Oberfläche des Körpers ersetzt werden. Dies soll im folgenden erläutert werden.

Integration im mitbewegten Bezugssystem

Betrachtet wird der Fall, daß die durch $f = 0$ beschriebene Oberfläche eine starre Form besitzt. Dies ist zum Beispiel gegeben, wenn $f = 0$ die Oberfläche eines Körpers darstellt, der sich nicht verbiegt und auch nicht gestreckt oder gestaucht wird. Es liegt dann lediglich eine Translation der Fläche S im Raum und eventuell eine Rotation vor. Unter diesen Bedingungen läßt sich die Integration in Gleichung (10.4.12) vereinfachen, wenn man sie in einem mitbewegten Bezugssystem durchführt. Dazu wird ein mit der Oberfläche (bzw. dem Körper) fest verbundenes Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten eingeführt. In diesem Koordinatensystem ist die Hilfsfunktion f nicht mehr von der Zeit abhängig. Das neue Koordinatensystem wird so definiert, daß die $\vec{\eta}$ -Koordinaten mit den \vec{y} -Koordinaten zur Zeit $\tau = 0$ übereinstimmen. Die beiden Koordinaten sind durch

$$\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau) \tag{10.4.14}$$

miteinander verknüpft. Dabei ist

$$\vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau) = \int_0^\tau \vec{U}(\vec{\eta}, \tau') d\tau' \tag{10.4.15}$$

der Verschiebungsvektor der Punktes mit der Koordinate $\vec{\eta}$ zur Zeit τ . Der Vektor $\vec{U}(\vec{\eta}, \tau')$ ist die Geschwindigkeit im \vec{y} -System, die der Punktes mit der Koordinate $\vec{\eta}$ besitzt. Bei reiner Translation ist \vec{U} konstant für alle $\vec{\eta}$. Bei Rotation um eine Achse gilt $\vec{U} = 0$ entlang der Achse, und mit dem Abstand von ihr nimmt \vec{U} betragsmäßig zu.

In der Abbildung 10.8 ist das Beispiel eines mit einem Rotorblatt rotierenden Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten veranschaulicht. Die Drehachse stimmt mit der y_3 -Achse überein. Im linken Teil ist die Situation zum Zeitpunkt $\tau = 0$ dargestellt. Die \vec{y} und $\vec{\eta}$ -Koordinaten stimmen überein. Etwas später zur Zeit $\tau_1 > 0$ hat sich der Rotor um einen kleinen Winkel gedreht. Die η_1 und η_2 -Achsen fallen nicht mehr mit den y_1 und y_2 -Achsen zusammen. Für einen Punkt mit der Koordinate $\vec{\eta}_*$ (im Beispiel direkt auf der Achse durch das Rotorblatt liegend) gibt $\vec{x}_s(\vec{\eta}_*, \tau_1)$ die momentane Verschiebung des Punktes an.

Nach dieser Vorbereitung wird die Lösung (10.4.12) betrachtet. Sie besitzt die Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} q(\vec{y}, \tau) \delta(g) d\tau d^3\vec{y} \tag{10.4.16}$$

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

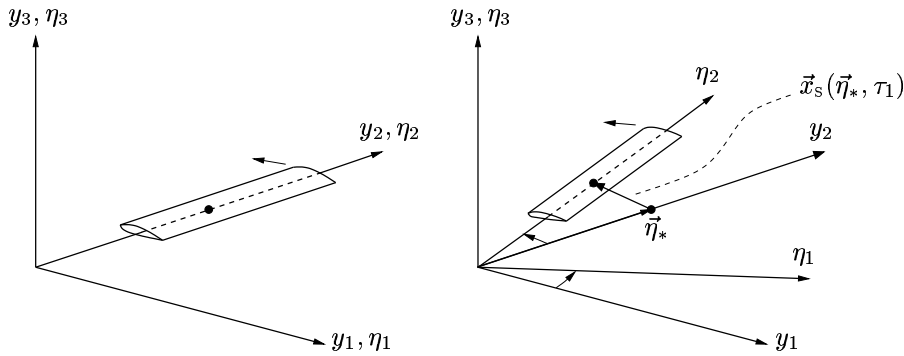


Abbildung 10.8: Zur Erläuterung des körperfesten Koordinatensystems: Zustand bei $\tau = 0$ links und bei einer etwas späteren Zeit $\tau = \tau_1$ rechts.

Zunächst ist die konkrete Gestalt der Quellstärkeverteilung $q(\vec{y}, \tau)$ nicht wichtig. Erst später wird wieder die flächenhafte Verteilung nach (10.4.1) eingesetzt. Im nächsten Schritt werden die Integrationen vertauscht, so daß die räumliche Integration die Innere ist. Anschließend wird die Integrationsvariable \vec{y} mit $\vec{\eta}$ substituiert. Zwischen den infinitesimalen Volumenelementen in den verschiedenen Bezugssystemen besteht der Zusammenhang

$$d^3\vec{y} = J d^3\vec{\eta} \quad (10.4.17)$$

Dabei ist mit J die sogenannte Funktionaldeterminante (oder Jacobische Determinante) bezeichnet. Sie ist die Determinante der Funktionalmatrix (oder Jacobische Matrix). Es gilt

$$J = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial \eta_j} \right) \quad (10.4.18)$$

Da die beiden Bezugssysteme durch reine Translation und Rotation ineinander übergehen, entspricht eine Volumeneinheit in dem \vec{y} -System auch einer Volumeneinheit in dem $\vec{\eta}$ -System. Das bedeutet, für Funktionaldeterminante gilt überall einfach $J = 1$. Würde sich das mitbewegte System verzerren, dehnen oder stauchen, dann wäre das nicht unbedingt mehr der Fall.

Ist die Substitution abgeschlossen, dann können die Integrationen wieder vertauscht werden. Aus (10.4.16) ergibt sich schließlich

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} q(\vec{\eta}, \tau) \delta(g) d\tau d^3\vec{\eta} \quad (10.4.19)$$

Rein formal ist lediglich das Symbol \vec{y} durch $\vec{\eta}$ ersetzt worden. Es ist jedoch zu beachten, daß die Abhängigkeiten der verschiedenen Größen von den Integrationsvariablen

10 Schallfelder umströmter Körper

nun etwas komplizierter sind als vorher. Der Abstand r hängt jetzt mit

$$r = r(\vec{x}, \vec{\eta}, \tau) = |\vec{x} - \vec{\eta} - \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau)| \quad (10.4.20)$$

nicht nur der neuen Koordinate $\vec{\eta}$ sondern zusätzlich auch von der Zeit τ ab. Entsprechend ist auch die Funktion

$$g = g(\vec{x}, t, \vec{\eta}, \tau) = t - \frac{r}{c} - \tau \quad (10.4.21)$$

einmal direkt und einmal über den Abstand r von der Zeit τ abhängig.

Im nächsten Schritt wird das innere Integral in (10.4.19) betrachtet. Ein vergleichbares Integral wurde bereits im Abschnitt 9.1 berechnet. Ersetzt man $q(\vec{\eta}, \tau)$ mit $Q(\tau)$ und $\vec{\eta} + \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau)$ mit $\vec{x}_s(\tau)$, dann entspricht das inneren Integral in (10.4.19) rein formal dem Integral in Gleichung (9.1.14). Die Übereinstimmung kann auch anschaulich begründet werden. Für die Berechnung des inneren Integrals können die Größen \vec{x} , t und $\vec{\eta}$ als konstant betrachtet werden. Die Koordinate $\vec{\eta}$ markiert einen Punkt, der sich im \vec{y} -Raum bewegt. In dem Punkt ist die Quellstärke mit $q(\vec{\eta}, \tau)$ gegeben. Man kann ihn als bewegte Punktquelle ansehen. Das innere Integral beschreibt den Schalldruck, den diese bewegte Punktquelle am Ort \vec{x} zur Zeit t bewirkt. Im Unterschied zum Abschnitt 9.1 besteht die Quelle hier aus vielen Punkten. Daher müssen, um den gesamten Schalldruck zu erhalten, die Anteile der Punktquellen aufsummiert werden. Die geschieht mit der äußeren Integration über die Koordinate $\vec{\eta}$.

Zur Berechnung des inneren Integrals wird das Vorgehen aus Abschnitt 9.1 übernommen. Im folgenden wird die Beobachtungsort \vec{x} und die Beobachtungszeit t festgehalten. Die Funktion g hängt dann nur von $\vec{\eta}$ und τ ab. Für eine feste Koordinate $\vec{\eta}$ ist g sogar nur eine Funktion von τ . Es gilt die allgemeine Regel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta(g(\tau)) = \sum_{n=1}^N \frac{h(\tau_n^*)}{\left| \frac{dg}{d\tau} \right|} \quad (10.4.22)$$

Dabei ist $h(\tau)$ eine beliebige Funktion. Mit der Regel kann das innere Integral in eine Summe umgewandelt werden. Zuerst wird noch die Ableitung der Funktion g nach der Zeit τ für eine feste Koordinate $\vec{\eta}$ berechnet. Es ergibt sich

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(\vec{\eta}, \tau) = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} - 1 = M_r(\vec{\eta}, \tau) - 1 \quad (10.4.23)$$

Dabei ist mit $M_r(\vec{\eta}, \tau)$ die Beobachtungsmachzahl für den Punkt mit der Koordinate $\vec{\eta}$ eingeführt worden. Sie gibt an, mit welcher Machzahl sich der Punkt auf den Beobachter zu bewegt. Denn der Faktor

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} = \frac{\partial r}{\partial x_{s,i}} \cdot \frac{\partial x_{s,i}}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} = -\frac{(\vec{x} - \vec{\eta} - \vec{x}_s)_i}{r} \cdot \frac{\partial x_{s,i}}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} \quad (10.4.24)$$

ist die Komponente der Geschwindigkeit des Punktes in Richtung vom Beobachter weg. Der erste Faktor auf der rechten Seite entspricht dem Einheitsvektor, der von

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

dem Punkt mit der Koordinate $\vec{\eta}$ zum Beobachter zeigt. Der zweite Faktor gibt die Geschwindigkeit des Punktes an. Durch den $-1/c$ -Vorfaktor in (10.4.23) ergibt sich daraus eine Machzahl.

Bisher unterscheidet sich die Darstellung von der im Abschnitt 9.1 im wesentlichen dadurch, daß jetzt alle Größen zusätzlich von der Koordinate $\vec{\eta}$ abhängen. So sind auch die Nullstellen der Funktion g , über die in Gleichung (10.4.22) summiert wird, eine Funktion von $\vec{\eta}$. Sogar die Anzahl der Nullstellen kann von $\vec{\eta}$ abhängen: $N = N(\vec{\eta})$. Die Nullstellen werden wieder mit τ^* bezeichnet. Sie müssen die Gleichung

$$c(t - \tau^*(\vec{\eta})) = |\vec{x} - \vec{\eta} - \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau^*(\vec{\eta}))| \quad (10.4.25)$$

erfüllen. Die Überlegungen aus Abschnitt 9.1 können auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Bewegt sich der betreffende Punkt immer mit Unterschallgeschwindigkeit, dann besitzt Funktion $g(\vec{\eta}, \tau)$ bezüglich τ nur eine Nullstelle τ^* . Es ist damit $N(\vec{\eta}) = 1$, und die Summe besteht nur aus einem Glied.

Wird $h(\tau) = q/r$ in (10.4.22) eingesetzt, dann folgt für die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} \quad (10.4.26)$$

Dabei geben die eckigen Klammern $[\cdot]_{\tau=\tau^*}$ an, daß der darin enthaltene Ausdruck zur retardierten Zeit τ^* ausgewertet werden muß. Ferner ist, falls mehr als eine retardierte Zeit τ^* existiert, eine Summe über die entsprechenden Ausdrücke zu bilden. Wenn es keine Zeit τ^* gibt, dann ist der Ausdruck gleich Null. Diese Schreibweise gestaltet die Darstellung etwas übersichtlicher, als die Verwendung eines Summenzeichens. Dieses wäre in vielen Fällen sowieso unnötig, da sich häufig alle Punkte nur mit Unterschallgeschwindigkeit bewegen.

Die bisherigen Überlegungen sind unabhängig von der konkreten Form der Quellstärkeverteilung. Sie gelten allgemein auch für eine räumlich ausgedehnte Quelle. Jetzt soll die flächenhafte Quellstärkeverteilung nach Gleichung (10.4.1) eingesetzt werden. Dort tritt der Gradient der Funktion f auf. Der Gradient hängt von dem Koordinatensystem ab, in dem man ihn bildet. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird daher der Gradient entsprechend gekennzeichnet. Allerdings wird in der vorliegenden Herleitung explizit nur der Betrag des Gradienten benötigt. Da die beiden Bezugssysteme gleiche Skalierung besitzen, stimmen der Betrag eines Gradienten im \vec{y} -System mit dem im $\vec{\eta}$ -System überein. Es gilt damit auch

$$|\text{grad}_{\vec{y}} f| = |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \quad (10.4.27)$$

Diese einfache Beziehung erleichtert die folgende Umformung wesentlich.

Setzt man die Quellstärkeverteilung (10.4.1) in die Lösung (10.4.26) ein, ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{Q |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \delta(f)}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} \quad (10.4.28)$$

10 Schallfelder umströmter Körper

Dabei wurde bereits von (10.4.27) Gebrauch gemacht. Die Funktion f ist in dem $\vec{\eta}$ -Bezugssystem nicht von der Zeit τ abhängig. Daher können die Ausdrücke mit f aus der eckigen Klammer herausgezogen werden. Man erhält

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{Q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \delta(f) d^3 \vec{\eta} \quad (10.4.29)$$

Um das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umzuwandeln, wird wieder die allgemeinen Beziehung (10.4.8) verwendet. Sie lautet in den $\vec{\eta}$ -Koordinaten

$$\int_{\mathbb{R}^3} h(\vec{\eta}) \delta(f(\vec{\eta})) d^3 \vec{\eta} = \int_S \frac{h(\vec{\eta})}{|\text{grad}_{\vec{\eta}} f|} dS(\vec{\eta}) \quad (10.4.30)$$

Setzt man hier

$$h(\vec{\eta}) = \left[\frac{Q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \quad (10.4.31)$$

ein, so ergibt sich für die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{Q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.4.32)$$

Damit ist die Lösung als Integral über die Oberfläche in dem mitbewegten Bezugssystem dargestellt. Dies hat den Vorteil, daß keine komplizierte Fläche Σ berechnet werden muß. Im Allgemeinen ist die Integration in dem mitbewegten Bezugssystem relativ leicht zu realisieren. Es bleibt lediglich die Berechnung der retardierten Zeiten τ^* . Dazu muß an allen Punkten $\vec{\eta}$ die Gleichung (10.4.25) auf mögliche Lösungen τ^* untersucht werden. Auch dies kann unter Umständen sehr aufwendig werden. Hier sei nochmal darauf hingewiesen, daß die gezeigte Umformung der Lösung nur möglich ist, falls die Oberfläche S starr ist. Es muß ein $\vec{\eta}$ -Bezugssystem existieren, in dem S zeitunabhängig ist, und das sich mit einer reinen Translation und Rotation in das \vec{y} -System überführen läßt.

Quellstärke mit Ableitung

In der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.2.15) treten zwar flächenhafte Quellterme auf, jedoch unterscheiden sie sich durch eine Ableitung nach t beziehungsweise x_i von der bisher untersuchten Quellstärkeverteilung nach (10.4.1). Bereits im Abschnitt 9.4 wurden Ableitungen als Quellstärkeverteilung betrachtet. Es kann immer zunächst die Lösung der Wellengleichung mit der Quellstärkeverteilung ohne Ableitung berechnet werden, und anschließend die eigentliche Lösung durch nachträgliches Differenzieren ermittelt werden. Dabei stört nicht, daß die Lösung als Integral im bewegten $\vec{\eta}$ -System dargestellt ist. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \frac{\partial}{\partial t} b(\vec{x}, t) \quad (10.4.33)$$

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

ist durch

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{b}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} \quad (10.4.34)$$

gegeben. Dies läßt sich auch auf eine flächenhafte Quellstärkeverteilung übertragen. Entspricht zum Beispiel

$$b(\vec{x}, t) = B(\vec{x}, t) |\text{grad}f| \delta(f) \quad (10.4.35)$$

einer solchen Verteilung, dann ergibt sich die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{B}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.4.36)$$

Es tritt die Ableitung des Oberflächenintegrals nach der Beobachtungszeit t auf. Die Umformungen lassen sich selbstverständlich auch mit den räumliche Ableitung $\partial/\partial x_i$ und auch mit der zweiten Ableitung $\partial^2/(\partial x_i \partial x_j)$ durchführen.

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie die Lösung für eine flächenhafte Quellstärkeverteilung als Integral im bewegten Bezugssystem dargestellt werden kann. Diese Erkenntnisse sollen im folgenden bei der erweiterte Lighthill-Gleichung (10.2.15) angewendet werden. Voraussetzung ist, daß die durch $f = 0$ gegebene Oberfläche starr ist. Dann kann ein mitbewegtes Koordinatensystem gefunden werden, in dem f zeitunabhängig ist.

Die erweiterte Lighthill-Gleichung (10.2.15) kann in der Form

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \{ \rho' H(f) \} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{ T_{ij} H(f) \} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} n_i |\text{grad}f| \delta(f) \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i (v_j - u_j) + P_{ij} \right\} n_j |\text{grad}f| \delta(f) \right) \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

geschrieben werden. Dabei wurde lediglich $\rho' = \rho - \rho_0$ auf der linken Seite eingeführt, und auf der rechten Seite der Gradient von f mit (10.3.3) umgeformt. Der erste Term auf der rechten Seite stellt eine räumlich verteilte Quelle dar. Es ist mit dem Quellterm in der ursprünglichen Lighthill-Gleichung ohne Erweiterung identisch. Die anderen beiden Terme repräsentieren flächenhafte Quellstärkeverteilungen. Jedem der Quellterme entspricht eine Teillösung, die er für sich allein erzeugen würde. Die komplette Lösung erhält man durch Überlagern der Teillösungen. Alle drei Quellterme sind durch Ableitungen gegeben. Folglich lassen sich die Teillösungen alle auch durch entsprechende Ableitungen ausdrücken.

Der zweite Quellterm entspricht der Quellstärkeverteilung aus Gleichung (10.4.33). Im Fall der starren Oberfläche kann seine Teillösung – wie in (10.4.36) – durch ein Oberflächenintegral dargestellt werden. Die Integration wird im mitbewegten Bezugssystem durchgeführt, und vor dem Integral steht die Ableitung nach der Beobachtungszeit t . Analoges gilt für den dritten Quellterm. Es ist möglich, seine Teillösung durch die räumliche Ableitung eines Oberflächenintegrals auszudrücken. Die Teillösung für den ersten Quellterm mit räumlich verteilter Quellstärke, kann ebenfalls durch ein Integral im mitbewegten System angegeben werden. Mit den Überlegungen des letzten Abschnitts ergibt sich – im Fall einer starren Oberfläche – die Lösung der erweiterten Lighthill-Gleichung

$$\begin{aligned}
 4\pi c^2 \left\{ \rho' H(f) \right\}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{T_{ij} H(f)}{r |1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3 \vec{\eta} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i}{r |1 - M_r|} n_i \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \\
 &- \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{\rho v_i (v_j - u_j) + P_{ij}}{r |1 - M_r|} n_j \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta})
 \end{aligned} \tag{10.5.2}$$

Diese Beziehung wird üblicherweise als “Ffowcs Williams-Hawkings”-Gleichung (FW-H-Gleichung) bezeichnet. Allerdings findet man auch Literaturstellen, in denen nicht die Lösung (10.5.2) sondern die Differentialgleichung (10.5.1) so genannt wird. Es hat sich bisher noch keine einheitliche Bezeichnung durchgesetzt.

Im folgenden werden einige Bemerkungen zur Lösung (10.5.2) gegeben. Zu beachten ist, daß der Faktor 4π abweichend von der üblichen Darstellung diesmal auf der linken Seite steht. Der Faktor c^2 auf der linken Seite erklärt sich dadurch, daß in der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.5.1) der c^2 -Term vor dem Laplace-Operator und nicht als $1/c^2$ vor der Zeitableitung steht. Die Integrationen werden in dem mitbewegten Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten durchgeführt. Die Schreibweise mit den eckigen Klammern $[\cdot]_{\tau=\tau^*}$ wurde im letzten Abschnitt mit Gleichung (10.4.26) eingeführt. Die Klammern geben an, daß der darin enthaltene Ausdruck zur retardierten Zeit τ^* ausgewertet werden muß. Die Zeit τ^* wird durch die Gleichung (10.4.25) bestimmt. Falls mehrere Lösungen τ^* existieren, impliziert die Schreibweise mit den eckigen Klammern, daß eine Summe zu bilden ist. In allen drei Integralen tritt der Faktor $1/|1 - M_r|$ auf. Dieser Faktor ergibt sich durch die Integration im mitbewegten Bezugssystem.

Prinzipiell gilt die Gleichung (10.5.1) in jedem nicht beschleunigt bewegten Bezugssystem, das als Inertialsystem bezeichnet werden kann. Die Größen \vec{v} und \vec{u} sind Geschwindigkeiten. Sie hängen von dem Bezugssystem ab. Bei der Lösung (10.5.2) ist zu beachten, daß obwohl die Integration im $\vec{\eta}$ -System durchgeführt wird, alle Geschwindigkeiten im Inertialsystem zu messen sind. Das mitbewegte $\vec{\eta}$ -System führt unter Umständen eine beschleunigte Bewegung (z.B. Rotation) aus. Es kann dann nicht als Bezugssystem für die FW-H-Gleichung verwendet werden.

Häufig kann ein besonders günstiges Inertialsystem gefunden werden. Betrachtet man einen Körper in homogener Anströmung, so ist in seiner Umgebung das Strömungsfeld mehr oder weniger stark gestört. Es können Fluktuationen auftreten, und auch die zeitlichen Mittelwerte der Strömungsgrößen unterscheiden sich von den Werten in der Anströmung. Die Störungen nehmen meist mit der Entfernung vom Körper ab. Theoretisch kann der Körper die Strömung im gesamten Raum beeinflussen. Jedoch findet man häufig in genügend großem Abstand näherungsweise die ungestörten Anströmbedingungen. In diesem Fall bietet es sich an, das Inertialsystem so zu wählen, daß in dem Außenbereich die mittlere Geschwindigkeit verschwindet. Das bedeutet, das System bewegt sich mit der Außenströmung mit. Dieses Bezugssystem hat den Vorteil, daß sich in ihm die Ausbreitung der Störungen im Außenbereich durch die normale Wellengleichung beschreiben läßt.

Die eigentlichen Schallquellen befinden sich alle in der Umgebung des umströmten Körpers und auf seiner Oberfläche. Von dort breiten sich Störungen wellenförmig aus, die auch den Außenbereich erreichen können. All das wird durch die erweiterte Lighthill-Gleichung (10.5.1) beschrieben. Der T_{ij} -Term auf der rechten Seite stellt eine Quellstärke dar, die theoretisch im gesamten Raum vorhanden sein kann. Ist jedoch im Außenbereich die mittlere Geschwindigkeit gleich Null, und alle Störungen sind klein im akustischen Sinn, dann kann dort der T_{ij} -Term vernachlässigt werden. Die entsprechenden Überlegungen wurden bereits im Zusammenhang mit der Lighthill-Gleichung ohne Erweiterung durchgeführt. Auch dort wird zweckmäßigerweise immer das Bezugssystem so gewählt, daß im Außenbereich die Quellstärke vernachlässigbar ist. Dann kann das erste Integral in (10.5.2) auf einen Quellbereich V_Q um den Körper eingeschränkt werden. Der Quellbereich muß allerdings so groß sein, daß alle Quellen und nichtlinearen Effekte erfaßt werden. So bleibt der entstehende Abweichung gering. In jedem Fall wird bei der Beschränkung des Quellbereichs ein kleiner Fehler gemacht, und die Lösung gilt nur noch näherungsweise. Es sei hier nochmal darauf hingewiesen, daß bisher keine Näherungen bei den Umformungen verwendet wurden und die FW-H-Gleichung (10.5.2) eine exakte Folge der nichtlinearen Kontinuitäts- und Impulserhaltungsgleichung ist.

Anwendungen

Die typische Anwendung der FW-H-Gleichung (10.5.2) liegt in der Berechnung des Schalls, der durch Körpern im Strömungsfeld erzeugt wird. Klassische Beispiele dafür sind die Propeller- und Rotorgeräusche. Dabei geht es hauptsächlich um die Anteile des Schalls durch die Quellen auf den festen Oberfläche. Diese wurden mit Hilfe der FW-H-Gleichung intensiv untersucht. In den letzten Jahren wird die Berechnung von Schallfeldern mit der FW-H-Gleichung zunehmend in Kombination mit numerischen Strömungssimulationen eingesetzt. Wie dabei vorgegangen wird soll anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht werden.

In einem ausgedehnten Rechengebiet wird die Umströmung eines Körpers numerisch simuliert. In Abbildung 10.9 ist eine typische Anordnung skizziert. Ziel ist es, aus den Ergebnissen der Strömungssimulation den entstehenden Schall im Fernfeld zu berechnen. Eine direkte numerische Rechnung bis in das Fernfeld ist wegen des benötig-

10 Schallfelder umströmter Körper

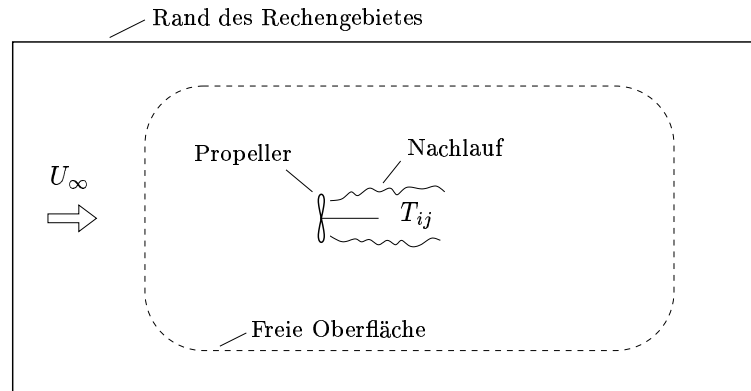


Abbildung 10.9: Propeller als Beispiel für einen Körper im Rechengebiet mit numerisch simulierter Umströmung.

ten großen Anzahl von Gitterpunkten zu aufwendig. Daher wird der Schall mit Hilfe der FW-H-Gleichung durch ein Integral über die numerisch berechneten Quellterme ermittelt. In jedem Fall muß das Rechengebiet so ausgedehnt sein, daß alle Störungen am Rande als klein im akustischen Sinn betrachtet werden können. Dann erfaßt die numerische Simulation im Rechengebiet alle Quellen. Die FW-H-Gleichung wird in dem Bezugssystem angewendet, welches sich mit der Anströmung mitbewegt. Das bedeutet, das Rechengebiet zur Strömungssimulation bewegt sich in dem Bezugssystem der FW-H-Gleichung. Prinzipiell sind zwei Vorgehensweisen möglich:

- a) Die Fläche $f = 0$ wird auf die Körperoberfläche (im Beispiel die Propelleroberfläche) gelegt. Zur Berechnung des Schalls werden die Quellstärken auf der Körperoberfläche und im Strömungsfeld (T_{ij} -Term) berechnet. Es müssen sowohl Oberflächen- als auch ein Volumenintegral gebildet werden.

Vorteil: Wie in Abschnitt 10.3 gezeigt wurde vereinfachen sich die Quellterme, wenn die Fläche $f = 0$ mit einer undurchlässigen Oberfläche übereinstimmt.

Nachteil: Wenn sich die Körperoberfläche im Rechengebiet bewegt (wie im Fall des sich drehenden Propellers), dann kann die Berechnung der retardierten Zeiten τ^* relativ aufwendig werden.

- b) Es wird $f = 0$ als eine freie Oberfläche mit einfacher Geometrie gewählt, die alle Quellen einschließt. In der Abbildung ist diese Oberfläche durch die gestrichelte Linie angedeutet. Eventuell ist das Rechengebiet entsprechend zu vergrößern. Die Quellterme auf der freien Oberfläche repräsentieren alle Quellen im Inneren.

Vorteil: Für die Berechnung des Schalls sind nur die Oberflächenintegrale zu berechnen. Die Oberfläche $f = 0$ bewegt sich nur translatorisch im Bezugssystem der FW-H-Gleichung bewegt. Als $\vec{\eta}$ -Bezugssystem kann das Bezugssystem der Strömungssimulation verwendet werden. Der Aufwand ist deutlich geringer

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

im Vergleich zur Integration in einem beschleunigt bewegten (z.B. rotierenden) Bezugssystem.

Nachteil: Das numerische Verfahren muß die Ausbreitung der Schallwellen, die am Körper entstehen, mit relativ großer Genauigkeit bis an die freie Oberfläche berechnen können. Eventuell muß ein viel feineres Gitter und ein Verfahren höherer Ordnung verwendet werden.

Bei der Variante (a) entsprechen die Quellterme in der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.5.1) den tatsächlich vorhandenen Quellen. Dagegen werden die echten Quellen bei der Variante (b) sozusagen durch künstliche Quellen auf der freien Oberfläche ersetzt. Auf vergleichbare Weise ist es möglich mit dem Kirchhoff-Integral aus Abschnitt 8.1 die Quellen im Inneren einer Oberfläche durch virtuelle Quellen auf der Oberfläche zu ersetzen. Die virtuellen Quellen erzeugen das gleiche Schallfeld außerhalb der Oberfläche wie die echten Quellen. Im Gegensatz zur FW-H-Gleichung sind die Terme in dem Kirchhoff-Integral alle linear. Auch ist das Kirchhoff-Integral in der in Abschnitt 8.1 vorgestellten Form nicht bei bewegten Oberflächen anwendbar. Weiter unten wird gezeigt, daß in der Tat das Kirchhoff-Integral durch Vereinfachungen aus der FW-H-Gleichung abgeleitet werden kann.

Umformungen

Im folgenden werden einige allgemeine Umformungen vorgestellt, die später auf Terme in der FW-H-Gleichung angewendet werden sollen. Zunächst wird eine inhomogene Wellengleichung der Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right)\phi = \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \quad (10.5.3)$$

betrachtet. Die Quellstärkeverteilung ist durch eine Divergenz gegeben. Die Größe ϕ erfüllt die Wellengleichung. Dabei spielt ihre physikalische Bedeutung zunächst keine Rolle. Sie kann als Platzhalter für den Schalldruck, das akustische Potential oder zum Beispiel auch für den Ausdruck $\{\rho' H(f)\}$ angesehen werden. Es wird angenommen, die Gleichung gilt im gesamten Raum. Es müssen keine Randbedingungen erfüllt werden. Dann kann die Lösung als

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{r} \delta(g) \, d\tau \, d^3\vec{y} \quad (10.5.4)$$

in Form einer Divergenz angegeben werden. Die Darstellung entspricht der in Abschnitt 8.1 vorgestellten Formulierung mit der Funktion

$$g = t - \frac{r}{c} - \tau \quad (10.5.5)$$

wobei der Abstand wie üblich mit

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (10.5.6)$$

10 Schallfelder umströmter Körper

abgekürzt ist. Im Integrand ist nur der Abstand r und die Funktion g von der Beobachtungsposition \vec{x} abhängig. Da die Integrationsgrenzen keine Funktion von \vec{x} sind, kann die Ableitung einfach in das Integral hineingezogen werden. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} B_i(\vec{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} d\tau d^3\vec{y} \quad (10.5.7)$$

Um den Ausdruck weiter umzuformen, wird die Ableitung ausgeführt. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} = \frac{1}{r} \delta'(g) \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{1}{r^2} \delta(g) \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (10.5.8)$$

Dabei bezeichnet $\delta'(g)$ die Ableitung der δ -Funktion. Zusätzlich treten die partiellen Ableitungen von g und r nach x_i auf. Die Ableitung des Abstands nach der Beobachtungsposition wurde schon häufiger berechnet. Es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x} - \vec{y}| = \frac{x_i - y_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{x_i - y_i}{r} \quad (10.5.9)$$

Damit folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{1}{c} \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.10)$$

Die Funktion g ist ebenfalls von der Beobachtungszeit t abhängig. Der Zusammenhang ist jedoch relativ einfach. Nach (10.5.5) gilt

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 \quad (10.5.11)$$

Dies kann ausgenutzt werden um (10.5.8) umzuschreiben. Bildet man von dem Ausdruck in den geschweiften Klammern die partielle Ableitung nach der Zeit, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} = \frac{1}{r} \delta'(g) \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{r} \delta'(g) \quad (10.5.12)$$

Damit kann die Zeitableitung verwendet werden, um die Ableitung der δ -Funktion zu ersetzen. Aus Gleichung (10.5.8) wird nach Einsetzen der obigen Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} - \frac{1}{r^2} \delta(g) \right) \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.13)$$

Setzt man dies wiederum in Gleichung (10.5.7) ein, erhält man

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} B_r \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} - \frac{1}{r^2} \delta(g) \right) d\tau d^3\vec{y} \quad (10.5.14)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$B_r = B_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.15)$$

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

verwendet. Der Ausdruck $(x_i - y_i)/r$ stellt einen normierten Vektor dar, der von dem Quellpunkt in Richtung des Beobachters zeigt. Die Größe B_r ist somit die Komponente des Vektors \vec{B} in Richtung des Beobachters.

Das Integral in (10.5.14) kann in zwei Teilintegrale zerlegt werden. Man erhält

$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} d\tau d^3\vec{y} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_r}{r^2} \delta(g) d\tau d^3\vec{y} \quad (10.5.16)$$

Die Ableitung nach der Beobachtungszeit t im ersten Ausdruck wird vor die Integrale gezogen. Die inneren Integrale über τ werden dann ausgeführt. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{cr} [B_r]_{\text{ret}} d^3\vec{y} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r^2} [B_r]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.17)$$

Dabei gibt die Schreibweise mit den eckigen Klammern an, daß entsprechend

$$[B_r]_{\text{ret}} = B_r \left(\vec{y}, t - \frac{r}{c} \right) \quad (10.5.18)$$

der eingeschlossene Ausdruck zur retardierten Zeit $t - r/c$ auszuwerten ist. Die τ -Integration kann auch auf der rechten Seite von (10.5.4) ausgeführt werden. Das Gleichsetzen dieser Lösung mit der Form (10.5.17) ergibt die interessante Regel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} [B_i]_{\text{ret}} d^3\vec{y} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{cr} [B_r]_{\text{ret}} d^3\vec{y} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r^2} [B_r]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.19)$$

zur Umformung der Lösungsintegrale. Damit kann die räumliche Ableitung der Integrale umgangen werden. Zu beachten ist, das auf der linken Seite nach Summationskonvention eine Summe aus drei Ableitungen steht. Dagegen sind auf der rechten Seite nur zwei Integrale und von einem die Zeitableitung zu berechnen. Es ergibt sich insgesamt eine Vereinfachung.

Die Integrationen in (10.5.19) können auch in einem mitbewegten Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten durchgeführt werden. Geht das $\vec{\eta}$ -System durch reine Translation und Rotation in das \vec{y} -System über, dann können die Ergebnisse aus Abschnitt 10.4 angewendet werden. Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{B_i}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{B_r}{cr|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} - \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{B_r}{r^2|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} \end{aligned} \quad (10.5.20)$$

In den Integralen taucht nun der Faktor $1/|1 - M_r|$ auf, der sich durch die Bewegung des Bezugssystems ergibt. Ist die Quellstärkeverteilung auf eine Fläche beschränkt,

10 Schallfelder umströmter Körper

dann kann das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Als Beispiel wird eine Quellstärkeverteilung der Form

$$B_i = W_i |\text{grad} f| \delta(f) \quad (10.5.21)$$

betrachtet. Die Fläche S ist durch $f(\vec{x}, t) = 0$ definiert. Im mitbewegten $\vec{\eta}$ -System soll die Oberfläche zeitlich konstant sein: $f = f(\vec{\eta})$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{W_i}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{W_r}{cr|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) - \int_S \left[\frac{W_r}{r^2|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \end{aligned} \quad (10.5.22)$$

Dabei ist

$$W_r = W_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.23)$$

die Komponente von \vec{W} in Richtung des Beobachters.

Im folgenden soll noch eine weitere hilfreiche Regel angegeben werden, die im Prinzip schon in einem vorangegangenen Abschnitt hergeleitet wurde. Dazu wird die inhomogene Wellengleichung der Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \phi = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (10.5.24)$$

betrachtet. Die Quellstärke ist als zeitliche Ableitung gegeben. Es wird angenommen, daß die Gleichung überall gilt und keine Randbedingungen erfüllt werden müssen. Die Lösung kann einmal in der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial B}{\partial t}(\vec{y}, \tau)}{r} \delta(g) d\tau d^3\vec{y} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial B}{\partial t} \right]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.25)$$

angegeben werden. Die Zeitableitung ist als Quellstärke in das Integral eingesetzt worden. Alternativ läßt sich aber auch die Lösung als zeitliche Ableitung eines Integrals darstellen. Die wurde bereits ausführlich in Abschnitt 9.4 behandelt. Für die Lösung gilt auch

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{r} \delta(g) d\tau d^3\vec{y} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} [B]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.26)$$

Setzt man die Lösungen (10.5.25) und (10.5.26) gleich, dann ergibt sich die Regel

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial B}{\partial t} \right]_{\text{ret}} d^3\vec{y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} [B]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.27)$$

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

zur Umformung der Lösungsintegrale mit Zeitableitungen. Zu bemerken ist, daß sich die Regel (10.5.27) nicht so einfach in ein mitbewegtes System übertragen läßt. Sinnvollerweise müßte dann auch die Zeitableitung $\partial B/\partial t$ in dem mitbewegten System ausgedrückt werden. Die Zeitableitung ist jedoch vom Bezugssystem abhängig. Beim Übergang in ein mitbewegtes $\vec{\eta}$ -Bezugssystem würde sich ein komplizierter Ausdruck ergeben.

Ist die Quellstärkeverteilung auf eine Fläche beschränkt, dann können die Volumenintegrale wieder in Oberflächenintegrale umgewandelt werden. Analog zu oben wird von einer Quellstärkeverteilung

$$B = W |\text{grad} f| \delta(f) \quad (10.5.28)$$

ausgegangen. Zusätzlich wird angenommen, daß die Funktion f zeitlich konstant ist. Damit bewegt sich die Oberfläche S nicht. Es folgt

$$\int_S \frac{1}{r} \left[\frac{\partial W}{\partial t} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{1}{r} [W]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.29)$$

Die Verallgemeinerung auf eine sich bewegende Oberfläche und eine Integration im mitbewegten Bezugssystem ist wegen der Zeitableitung $\partial W/\partial t$ nicht so einfach möglich.

Übergang zum Kirchhoff-Integral

Im folgenden wird das Kirchhoff-Integral, wie es in Abschnitt 8.1 vorgestellt wurde, aus der FW-H-Gleichung abgeleitet. Das Kirchhoff-Integral basiert auf der linearen Wellengleichung. Entsprechend beschreibt es die Ausbreitung von kleinen Störungen. Dagegen gilt die FW-H-Gleichung allgemein. Sie enthält nichtlineare Terme und auch die Reibungseffekte sind mit berücksichtigt. Die FW-H-Gleichung kann jedoch an die Bedingungen, unter denen das Kirchhoff-Integral gilt, angepaßt werden. Sind überall nur kleine Störungen vorhanden, dann können die nichtlinearen Anteile und die Reibungseffekte vernachlässigt werden. Weiterhin ist die im Kirchhoff-Integral verwendete Oberfläche unbeweglich. Beschränkt man die FW-H-Gleichung auf unbewegte Oberflächen ergeben sich sofort die Vereinfachungen $\vec{u} = 0$, $M_r = 0$ und $\vec{y} = \vec{\eta}$. Zusätzlich wird die Berechnung der retardierten Zeiten deutlich vereinfacht. Bei Bewegung müssen die Zeiten τ^* als Lösung der Gleichung (10.4.25) ermittelt werden. Bei unbewegter Oberfläche kann man die retardierte Zeit einfach mit $\tau = t - r/c$ berechnen. Dies kann durch

$$\left[\cdot \right]_{\tau=\tau^*} = \left[\cdot \right]_{\text{ret}} \quad \text{bei} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (10.5.30)$$

ausgedrückt werden. Damit vereinfacht sich die FW-H-Gleichung (10.5.2) zu

$$\begin{aligned}
 4\pi c^2 \left\{ \rho' H(f) \right\}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{T_{ij} H(f)}{r |1 - M_r|} \right]_{\text{ret}} d^3 \vec{y} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho v_i}{r} n_i \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \\
 &- \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{\rho v_i v_j + P_{ij}}{r} n_j \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y})
 \end{aligned} \tag{10.5.31}$$

Im folgenden wird angenommen, daß auf der Oberfläche S und außerhalb von ihr nur kleine Störungen auftreten. Alle Bewegungen werden nur durch diese Störungen hervorgerufen. In diesem Fall können die Lighthillschen Spannungen T_{ij} auf der Oberfläche und in dem gesamten Außenbereich vernachlässigt werden. Dies wurde bereits im Zusammenhang mit der Lighthill-Gleichung ausführlich behandelt. Wenn nur kleine Schwankungen vorliegen und das Bezugssystem ist entsprechend gewählt, dann ergibt der Term mit den Lighthill-Spannungen nur einen Effekt von höherer Ordnung in den Schwankungsgrößen.

Auch die anderen Ausdrücke in der FW-H-Gleichung enthalten noch Anteile von höherer Ordnung. Betrachtet man das Produkt ρv_i , so gilt

$$\rho v_i = (\rho' + \rho_0) v'_i = \rho_0 v'_i + O(2) \tag{10.5.32}$$

Die Terme von zweiter und höherer Ordnung sind dabei mit dem Ausdruck $O(2)$ zusammengefaßt. Zu beachten ist, daß keine mittlere Strömung vorliegt. Damit kann $v_i = v'_i$ gesetzt werden. Analog folgt für den Ausdruck im dritten Integral auf der rechten Seite

$$\rho v_i v_j + P_{ij} = \rho v_i v_j + (p - p_0) \delta_{ij} - \tau_{ij} = p' \delta_{ij} + O(2) \tag{10.5.33}$$

Hier sind auch die Reibungsspannungen mit in dem $O(2)$ -Term enthalten. Strenggenommen sind die Reibungsspannungen τ_{ij} jedoch nicht von höherer Ordnung. Sie kann man jedoch auf andere Weise als klein abschätzen. Dies wurde bereits ausführlich im Rahmen der Herleitung der Wellengleichung behandelt. Hier werden sie vereinfachend mit den Termen höherer Ordnung in dem $O(2)$ -Ausdruck zusammengefaßt.

Vernachlässigt man in der schon reduzierten FW-H-Gleichung (10.5.31) noch den T_{ij} -Term und die $O(2)$ -Anteile, dann ergibt sich

$$4\pi c^2 \left\{ \rho' H(f) \right\}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\rho_0}{r} [v'_i n_i]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{1}{r} [p' n_i]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \tag{10.5.34}$$

Diese Gleichung entspricht bereits dem Kirchhoff-Integral aus Abschnitt 8.1. Allerdings besitzt es noch nicht ganz die dort angegebene Form. Um eine analoge Darstellung zu

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

erhalten, wird hier die Schnelle senkrecht zur Oberfläche mit

$$v'_n = v'_i n_i \quad (10.5.35)$$

eingeführt. Wendet man die Umformungsregel (10.5.29) auf das erste Integral an, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\rho_0}{r} [v'_i n_i]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \int_S \frac{\rho_0}{r} \left[\frac{\partial v'_n}{\partial t} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.36)$$

Zur Umformung des zweiten Integrals kann die Regel (10.5.22) benutzt werden. Dazu wird die Größe

$$W_i = p' n_i \quad (10.5.37)$$

gewählt. Mit (10.5.23) ergibt sich

$$W_r = p' n_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.38)$$

Das Skalarprodukt auf der rechten Seite kann mit Hilfe der Ableitung des Abstands r in Normalenrichtung

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial y_i} n_i = -\frac{(x_i - y_i)}{r} n_i \quad (10.5.39)$$

ausgedrückt werden. Es folgt

$$W_r = -p' \frac{\partial r}{\partial n} \quad (10.5.40)$$

Zur Erinnerung sei angemerkt, daß in Abschnitt 8.1 auch der Ausdruck $\partial r / \partial n$ in der Formulierung des Kirchhoff-Integrals verwendet wurde.

Die beiden Ausdrücke für W_i und W_r können nun in Gleichung (10.5.22) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{1}{r} [p' n_i]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} [p']_{\text{ret}} dS(\vec{y}) + \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [p']_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.41)$$

Damit kann das zweite Integral auf der rechten Seite von (10.5.41) umgewandelt werden. Statt der Ableitung nach der Beobachtungsposition x_i tritt die Ableitung nach der Beobachtungszeit t vor einem Integral auf. Diese Ableitung kann mit Hilfe der Beziehung (10.5.36) durch eine Ableitung im Integral dargestellt werden. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} [p']_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.42)$$

Dabei tritt mit $\partial p' / \partial t$ die zeitliche Änderung des Schalldrucks im Integral auf.

10 Schallfelder umströmter Körper

Setzt man die umgeformten Lösungsintegrale in die Gleichung (10.5.34) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
 4\pi c^2 \left\{ \rho' H(f) \right\}(\vec{x}, t) &= \int_S \frac{\rho_0}{r} \left[\frac{\partial v'_n}{\partial t} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \\
 &\quad - \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \\
 &\quad - \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \left[p' \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y})
 \end{aligned} \tag{10.5.43}$$

Bisher wurde die linke Seite noch nicht verändert. Es wurde vorausgesetzt, daß außerhalb der Oberfläche S alle Schwankungen klein sind. Da innerhalb von S die linke Seite wegen $H(f) = 0$ sowieso verschwindet, kann generell mit $p' = c^2 \rho'$ die Dichte durch die Druckfluktuation ersetzt werden. Zusätzlich können die drei Integrale zusammengefaßt werden. Es ergibt sich

$$\int_S \left[\frac{\rho_0}{r} \frac{\partial v'_n}{\partial t} - \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} p' \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = 4\pi \begin{cases} p'(\vec{x}, t) & \text{falls } f(\vec{x}) > 0 \\ 0 & \text{falls } f(\vec{x}) < 0 \end{cases} \tag{10.5.44}$$

Diese Beziehung stimmt mit dem Kirchhoff-Integral (8.1.90) überein. Hier ist lediglich die Beobachungsposition mit \vec{x} statt \vec{x}_0 und die Quellposition mit \vec{y} statt mit \vec{x} bezeichnet.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß das Volumen V in Abschnitt 8.1 genau invers zu der Definition in diesem Abschnitt verwendet wurde. In Abschnitt 8.1 war V der von der Oberfläche S eingeschlossene Bereich. Der Normalenvektor \vec{n} war nach innen gerichtet definiert. Das Kirchhoff-Integral gibt die Lösung an einem Punkt \vec{x}_0 im Volumen V an. Dies wurde entsprechend der historischen Herleitung so gewählt. Hier ist V der innere Bereich in dem die FW-H-Gleichung das Ergebnis Null liefert. Die eigentliche Lösung wird außerhalb der Oberfläche S – also nicht in V – berechnet. Entsprechend ist der Normalenvektor \vec{n} nach außen gerichtet.

In Abbildung 10.10 wird ein Überblick gegeben, wie die verschiedenen Gleichungen zusammenhängen. Der linke Zweig entspricht der Ableitung des Kirchhoff-Integrals in Abschnitt 8.1. Der rechte Weg zeigt, wie das Kirchhoff-Integral über die FW-H-Gleichung hergeleitet werden kann. Übrigens kann man das Kirchhoff-Integral auch auf dem gleichen Weg wie die FW-H-Formel direkt ableiten. Man muß nur in einem Zwischenschritt als erstes die Kontinuitäts- und Impulserhaltungsgleichung linearisieren. Statt der erweiterten Lighthill-Gleichung ergibt sich dann eine Wellengleichung mit linearen Quelltermen. Die Lösung dieser Gleichung liefert dann das Kirchhoff-Integral. Auf diese Weise ist es auch möglich das Kirchhoff-Integral auf bewegte Oberflächen zu erweitern.

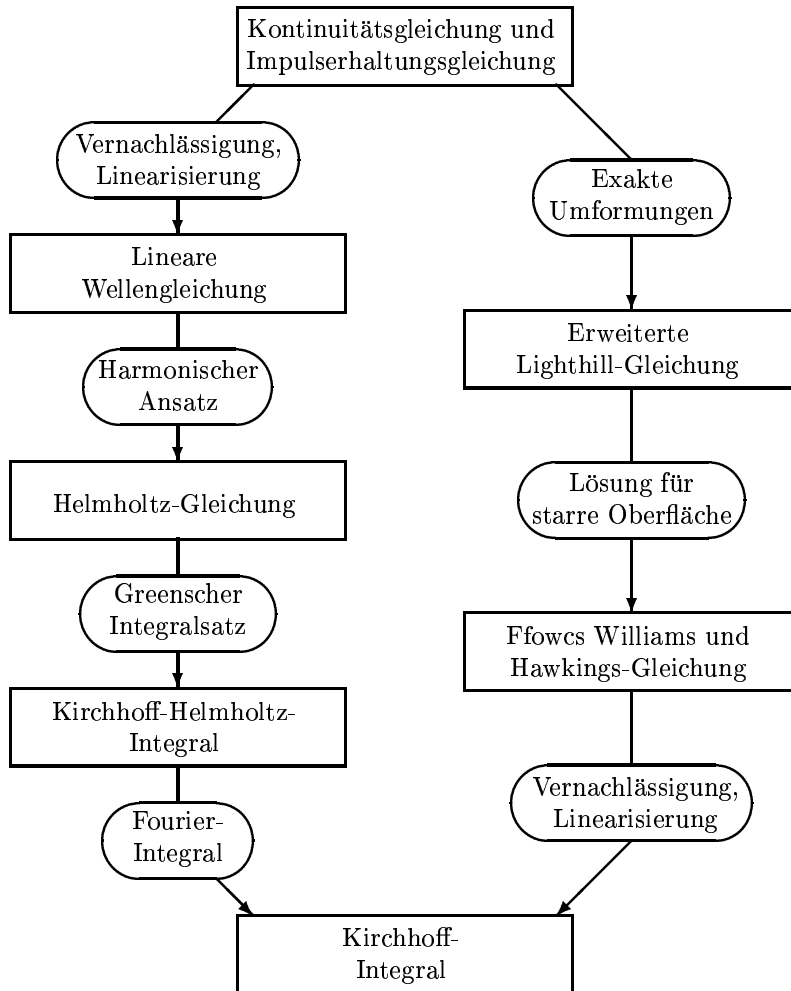


Abbildung 10.10: Zusammenhang der verschiedenen Gleichungen in einem Ableitungsschema.

Propeller- und Rotorgeräusche

Ein klassisches Einsatzgebiet für die FW-H-Gleichung ist die Untersuchung der Propeller- und Rotorgeräusche. Bei der Anwendung der FW-H-Gleichung wird die Oberfläche S auf die feste Oberfläche der Propeller- beziehungsweise Rotorblätter gelegt. Das $\vec{\eta}$ -Bezugssystem rotiert mit dem Propeller beziehungsweise Rotor mit. In diesem Bezugssystem ist die Oberfläche S zeitlich konstant. Zu beachten ist, daß Verformungen der Propeller- und Rotorblätter vernachlässigt werden müssen. Die Blätter müssen als starr angenommen werden. Nur dann kann ein $\vec{\eta}$ -Bezugssystem mit den erforderlichen Eigenschaften – wie in Abschnitt 10.4 beschrieben – gefunden werden.

Zweckmäßigerweise wird das Bezugssystem der FW-H-Gleichung so gewählt, daß im Außenbereich nur kleine Schwankungen auftreten. Betrachtet man zum Beispiel den Propeller an einem fliegenden Flugzeug, dann ist das FW-H-Bezugssystem fest mit der ruhenden Luftmasse in der Umgebung verbunden. In dem Bezugssystem bewegt sich das Flugzeug und natürlich auch der Propeller. Ein Beobachter, der sich am Boden befindet und den Schall des Propellers wahrnimmt, ist in Ruhe. Das mitbewegte $\vec{\eta}$ -Bezugssystem hängt sozusagen fest an dem Propeller. Es führt eine Überlagerung aus Rotations- und Translationsbewegung aus. Entsprechend schwierig wird die Berechnung der retardierten Zeiten τ^* .

Üblicherweise betrachtet man den von den verschiedenen Quelltermen herrührenden Schall getrennt voneinander. In der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.5.1) sind zwei Quellterme vorhanden, die eine flächenhafte Quellstärkeverteilung darstellen. Sie repräsentieren Quellen auf der Oberfläche des Propellers beziehungsweise Rotors. Die beiden Quellterme wurden in Abschnitt 10.3 für den Fall, das S mit einer undurchlässigen Oberfläche übereinstimmt, bereits untersucht. Es ergab sich eine vereinfachte Form der Quellstärkeverteilung. Sie lautet

$$q(\vec{x}, t) = + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 u_n |\text{grad } f| \delta(f) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ l_i |\text{grad } f| \delta(f) \right\} \quad (10.5.45)$$

Dabei ist $u_n = \vec{u} \vec{n}$ die skalare Normalengeschwindigkeit, und mit l_i ist die Kraft pro Oberflächenelement gegeben, die von dem Körper auf das Medium ausgeübt wird. Die Teillösungen für die beiden Terme werden im folgenden getrennt untersucht.

Zunächst wird der Einfluß des Quellterms mit der räumlichen Ableitung betrachtet. Es wird die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p'_L = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ l_i |\text{grad } f| \delta(f) \right\} \quad (10.5.46)$$

aufgestellt. Sie soll für den Schalldruck p'_L gelten. Der Index L kennzeichnet, daß es sich nur um einen Anteil von der Gesamtlösung handelt. In der Literatur wird dieser Anteil als “Loading-Noise” bezeichnet, da er durch die Kraft beziehungsweise Last auf den Propeller beziehungsweise Rotor verursacht wird. Zu beachten ist, daß im Gegensatz zur erweiterten Lighthill-Gleichung der Schalldruck und nicht die Größe $\{\rho' H(f)\}$ die abhängige Variable ist. Da üblicherweise nur die Lösung im Außenbereich interessiert, kann auf den Faktor $H(f)$ verzichtet werden. Er ist dort sowieso überall gleich Eins. Wenn im Außenbereich nur kleine Schwankungen auftreten, gilt dort die linearisierte

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

Druck-Dichtebeziehung $p' = c^2 \rho'$. So läßt sich die Dichteschwankung ρ' näherungsweise durch den Schalldruck p' ersetzen. Der entstehende Fehler ist im Außenbereich vernachlässigbar klein. In der Nähe des Rotors beziehungsweise Propellers, wo stärkere Schwankungen vorliegen, tritt möglicherweise eine größere Abweichung.

Die Lösung für die inhomogene Wellengleichung (10.5.46) lautet

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{l_i}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.47)$$

Um die Lösung besser interpretieren zu können, wird die räumliche Ableitung mit Hilfe der Umformungsregel (10.5.22) in eine zeitliche Ableitung verwandelt. Mit $W_i = l_i$ ergibt sich für die Lösung

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{l_r}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) + \int_S \left[\frac{l_r}{r^2|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.48)$$

Dabei ist mit

$$l_r = l_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.49)$$

die Komponente der Kraft l_i in Richtung des Beobachters gegeben. Die neue Form der Lösung besteht aus zwei Integralen. Im zweiten Ausdruck tritt der Faktor $1/r^2$ auf. Für einen Beobachter im Fernfeld spielt sein Anteil an der Lösung daher keine Rolle. Der Schall wird im wesentlichen durch die Schwankung des ersten Integrals mit der Beobachtungszeit bestimmt. Schwankungen können sich durch viele Faktoren ergeben. Zum einen können sich die Kräfte l_i zeitlich ändern. Zusätzlich ergibt sich durch die Rotations des Propellers beziehungsweise Rotors eine ständige Variation des Abstands r , der Beobachtungsrichtung und der Beobachtungsmachzahl M_r .

Für einen Flugzeugpropeller ist es selbstverständlich notwendig, daß er eine Kraft auf das Medium ausübt. Schließlich bewirkt die entstehende Gegenkraft den Vortrieb des Flugzeugs. Die Reduzierung des "Loading-Noise" durch Verringerung der Kräfte l_i ist damit kaum möglich, wenn das Flugzeug noch fliegen soll. Es bleibt die Möglichkeit die zeitlichen Schwankungen abzusenken. Das könnte zum Beispiel mit einer Zurücknahme der Propellerdrehzahl erfolgen. Läßt sich durch bessere Formgebung der Propellerblätter bei kleinerer Drehzahl die gleiche Kraft erzeugen, dann hätte man damit auch den "Loading-Noise" reduziert. In jedem Fall sollte eine instationäre Fluktuation der Kräfte l_i vermieden werden. Idealerweise ist die Umströmung des Propellers in dem mitbewegten Bezugssystem zeitlich konstant. Die Kräfte l_i ändern dann nur durch die Drehung ihre Richtung einmal pro Umdrehung. Der Betrag $|\vec{l}|$ bleibt konstant. Ist jedoch die Umströmung des Propellers stark instationär, so kommt es zu zusätzlichen Schwankungen. Dies ist zum Beispiel auch der Fall, wenn die Anströmung des Propeller nicht homogen ist. Die zusätzlichen Schwankungen bewirken eine verstärkte zeitliche Änderung der ersten Integrals und damit eine erhöhte Schallemission.

Als nächstes wird noch der erste Quellterm in (10.5.45) untersucht. Analog zu oben

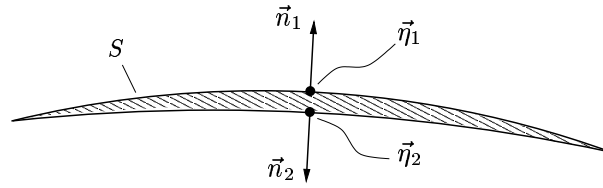


Abbildung 10.11: Schnitt durch einen dünnen Körper mit zwei gegenüberliegenden Punkten an den Koordinaten $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$.

wird die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) p'_T = \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_0 u_n | \text{grad} f | \delta(f) \} \quad (10.5.50)$$

aufgestellt. Die Größe p'_T ist wieder ein Anteil des Schalldrucks. Er wird üblicherweise als "Thickness-Noise" bezeichnet. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung lautet

$$4\pi p'_T(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho_0 u_n}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.51)$$

Wie oben bestimmt die zeitliche Änderung eines Integrals den entstehenden Schall. Im Integral tritt der Faktor $\rho_0 u_n$ auf. Es gibt die Rate an, mit der Masse von einem Oberflächenelement bei seiner Bewegung verdrängt wird. Je schneller die Bewegung, desto größer die Verdrängung. Allerdings kann insgesamt durch einen starren Körper keine Masse verdrängt werden. Das auf einer Seite verdrängte Medium strömt auf der anderen Seite nach. Es muß zu jeder Zeit

$$\int_S \rho_0 u_n dS(\vec{\eta}) = 0 \quad (10.5.52)$$

gelten. Im Gleichung (10.5.51) wird allerdings nicht wie hier über den Ausdruck $\rho_0 u_n$ zu einer festen Zeit integriert. Der Wert von $\rho_0 u_n$ ist zu unterschiedlichen Zeiten $\tau^*(\vec{\eta})$ zu nehmen. Zusätzlich wird mit dem Faktor $1/(r|1 - M_r|)$ multipliziert. Dieser ist im allgemeinen nicht konstant. Damit ergibt sich ein endlicher Wert für das Integral in (10.5.51) trotz des starren Körpers.

Ein relativ geringer "Thickness-Noise" wird bei einem dünnen beziehungsweise flachen Körper beobachtet. Dies soll anhand eines Beispiels erläutert werden. In Abbildung 10.11 ist ein Schnitt durch einen solchen Körper dargestellt. Es werden zwei Punkte auf der Oberfläche mit den Koordinaten $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$ betrachtet. Sie sollen sich direkt gegenüber liegen. Die Normalenvektoren in den Punkten sind genau gegeneinander gerichtet. Die Oberflächenelemente um diese beiden Punkte liefern jeweils einen

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

Anteil zum Integral in (10.5.51). Die Werte im Integral sind zur retardierten Zeit τ^* zu nehmen. Die beiden Punkte $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$ haben jedoch fast die gleiche retardierte Zeit. Je dünner der Körper ist, und je geringer damit der Abstand der beiden Punkte ist, desto kleiner ist der Unterschied in der retardierten Zeit. Im Grenzfall eines unendlich dünnen Körpers stimmen die Zeiten sogar überein. Es gilt

$$|\tau^*(\vec{\eta}_1) - \tau^*(\vec{\eta}_2)| \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad |\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2| \rightarrow 0 \quad (10.5.53)$$

Ist der Körper nur hinreichend dünn, dann kann der Unterschied zwischen den retardierten Zeiten $\tau^*(\vec{\eta}_1)$ und $\tau^*(\vec{\eta}_2)$ vernachlässigt werden.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß der Körper nicht um eine Achse in der Nähe der beiden Punkte $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$ rotiert. Dann bewegen sich die Punkte näherungsweise mit der gleichen Geschwindigkeit, und es gilt für die Normalgeschwindigkeit

$$u_n(\vec{\eta}_1, \tau^*(\vec{\eta}_1)) \approx -u_n(\vec{\eta}_2, \tau^*(\vec{\eta}_2)) \quad (10.5.54)$$

Entsprechend erhält man für die Beobachtungsmachzahl

$$M_r(\vec{\eta}_1, \tau^*(\vec{\eta}_1)) \approx M_r(\vec{\eta}_2, \tau^*(\vec{\eta}_2)) \quad (10.5.55)$$

Damit heben sich die Beiträge der gegenüberliegenden Oberflächenelemente zum Integral in (10.5.51) auf. Im Grenzfall eines unendlich dünnen Körpers verschwindet das Integral sogar. Ein Körper ohne Volumen erzeugt demnach überhaupt keinen "Thickness-Noise", auch wenn er eine ausgedehnte Oberfläche besitzt.

Kompakte Oberfläche

Die Berechnung der Schallfelder, die von den Oberflächenquellen erzeugt werden, kann unter bestimmten Umständen weiter vereinfacht werden. Als Beispiel wird der "Loading-Noise"-Anteil betrachtet, welcher durch ein einzelnes Blatt eines rotierenden Propellers erzeugt wird. Vereinfachend wird angenommen, daß die Umströmung des Blattes im mitbewegten $\vec{\eta}$ -Bezugssystem konstant ist. Das bedeutet, die Schwankungen der Kräfte l_i ergeben sich lediglich durch die Drehbewegung. Sie ändern sich – wie die Beobachtungsrichtung und die Beobachtungsmachzahl M_r – periodisch einmal pro Umlauf. Damit muß auch die resultierende Druckverteilung p'_L mit einer bestimmten Frequenz oszillieren. Ist die entsprechende Wellenlänge λ groß gegenüber der Ausdehnung der Quellstärkeverteilung, dann können einige Vereinfachungen bei der Berechnung des "Loading-Noise" durchgeführt werden. Zu beachten ist, daß nicht die Ausdehnung des Propellerblattes sondern die Ausdehnung der in Abschnitt 10.4 beschriebenen Fläche Σ entscheidend ist. Auf ihr liegen alle Quellpositionen, von denen die gleichzeitig am Beobachtungsort eintreffenden Signale ausgegangen sind.

Bezeichnet man die Ausdehnung der Quellstärkeverteilung mit D und die beobachtete Frequenz mit ω , dann soll die Bedingung

$$D \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (10.5.56)$$

gelten. Das bedeutet, die Quelle ist kompakt. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß sich der Beobachter weit entfernt von der Quelle befindet. Es wird ein Mittelpunkt $\vec{y}_M(t)$ der Quelle festgelegt. Bewegt sich die Oberfläche, dann verschiebt sich auch der Mittelpunkt. Er ist also Zeitabhängig. In dem mitbewegten $\vec{\eta}$ -Bezugssystem ruht der Mittelpunkt. Seine Koordinate wird mit $\vec{\eta}_M$ bezeichnet. Zu beachten ist, daß der Mittelpunkt nicht unbedingt auf der Oberfläche selbst liegen muß. Er kann zum Beispiel mit dem geometrischen Schwerpunkt des eingeschlossenen Volumens übereinstimmen. In Abbildung 10.12 ist die betrachtete Anordnung skizziert. Der Abstand vom Beobachtungsort

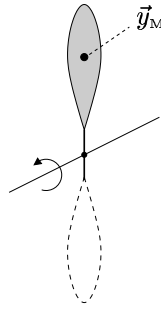


Abbildung 10.12: Blatt eines sich drehenden Propellers.

\vec{x} zur Mitte der Quelle wird mit R bezeichnet. Es soll

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| \gg D \quad (10.5.57)$$

erfüllt sein. Unter den genannten Bedingungen kann die Lösung (10.5.47) für den "Loading-Noise"-Anteil approximativ mit

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) \approx -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{R} \int_S \frac{l_i}{|1 - M_r|} dS(\vec{\eta}) \right]_{\tau=\tau^*} \quad (10.5.58)$$

berechnet werden. Dabei wurden zwei Vernachlässigungen eingeführt. Einmal wurde der exakten Kehrwert des Abstandes $1/r$ näherungsweise durch den Kehrwert des mittleren Abstandes $1/R$ ersetzt. Zum zweiten wurde die Variation der retardierten Zeit vernachlässigt. Das bedeutet, die Werte im Integral werden alle zur gleichen retardierten Zeit τ^* berechnet. Entsprechend schließt die eckige Klammer nun das Integral ein. Die Zeit τ^* hängt vom dem Beobachtungsort \vec{x} , der Beobachtungszeit t und der Koordinate $\vec{\eta}$ ab. Zweckmäßigerweise wird zur Berechnung des Integrals der Wert τ^* genommen, welcher dem Mittelpunkt – also der Koordinate $\vec{\eta}_M$ – entspricht. Praktisch bewirkt die Vereinfachung eine deutliche Verringerung des Rechenaufwands.

Der Vektor \vec{l} gibt die Kraft pro Fläche an, die vom Körper auf das Medium ausgeübt wird. Integriert man diese Größe über die gesamte Körperoberfläche ergibt sich

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

die Gesamtkraft vom Körper auf das Medium. Im Integral in (10.5.58) wird allerdings die Kraft pro Fläche mit dem Faktor $1/|1 - M_r|$ multipliziert. Dadurch weicht der Wert des Integrals im allgemeinen von der Gesamtkraft ab. Unter bestimmten Umständen kann der Faktor $1/|1 - M_r|$ für einen entfernten Beobachter näherungsweise als konstant angenommen werden. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn der Körper eine reine Translationsbewegung ausführt, oder wenn die Beobachtungsmachzahl insgesamt relativ klein ist ($M_r \ll 1$). Auch im Fall des rotierenden Propellerblattes kann eine solche Vereinfachung erlaubt sein. Dies hängt von den jeweiligen Parametern wie der Geometrie des Propellers, der Drehzahl und auch der Beobachtungsrichtung ab.

Wird der Faktor $1/|1 - M_r|$ näherungsweise als konstant angenommen, dann kann M_r durch den Wert $M_R = M_r(\vec{\eta}_M, \tau^*)$ am Mittelpunkt ersetzt werden. Man erhält eine weitere Vereinfachung mit

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) \approx -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{F_i}{R|1 - M_R|} \right]_{\tau=\tau^*} \quad (10.5.59)$$

wobei die Gesamtkraft vom Körper auf das Medium mit

$$F_i = \int_S l_i \, dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.60)$$

eingeführt wurde. Die Lösung entspricht dem Schallfeld einer bewegten punktförmigen Impulsquelle, die sich am Ort $\vec{y}_M(t)$ befindet. Ein solches Feld wurde bereits in Abschnitt 9.4 berechnet. Ein Vergleich mit Gleichung (9.4.24) zeigt die formale Übereinstimmung mit der approximativen Lösung (10.5.59).