

# 9 Bewegte Schallquellen

## 9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

Durch Bewegung einer Schallquellen verändert sich das von ihr erzeugte Druckfeld. Ein bekannter Effekt ist die Frequenzverschiebung, die ein Beobachteter wahrnimmt, wenn sich eine Quelle relativ zu ihm bewegt. Jedoch ändert sich auch die Stärke der beobachteten Wellen mit der Bewegung. Dies soll im folgenden betrachtet werden. Ausgangspunkt für die Überlegungen ist die inhomogene Wellengleichung für den Druck. Sie lautet

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta \right) p'(\vec{x}, t) = q(\vec{x}, t) \quad (9.1.1)$$

Dabei ist  $q(\vec{x}, t)$  eine allgemeine Quellverteilung. Im offenen Raum ohne Begrenzungen kann die Lösung für  $p'$  als Integral in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.1.2)$$

dargestellt werden. Im Allgemeinen kann der Quellbereich auf ein Volumen  $V_Q$  eingeschränkt werden, so daß nicht über den gesamten Raum integriert werden muß. Die Integrationsvariable ist  $\vec{y}$ . Der Beobachtungspunkt ist mit  $\vec{x}$  gegeben. Der Ausdruck  $t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$  stellt die sogenannte retardierte Zeit dar. Sie ist praktisch die Quellzeit, zu der ein Signal an der Position  $\vec{y}$  ausgesandt werden muß, damit es zur Zeit  $t$  beim Beobachter an der Position  $\vec{x}$  eintrifft.

Im nächsten Schritt soll eine konkrete Quellverteilung für  $q(\vec{x}, t)$  eingesetzt werden. Als einfaches Modell für einen bewegten Monopol wird die Verteilung

$$q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.1.3)$$

gewählt. Dabei ist  $Q(t)$  die momentane Stärke und  $\vec{x}_s(t)$  die momentane Position der Punktquelle. Der Ansatz (9.1.3) ist formal die einfachste Möglichkeit eine bewegte Punktquelle darzustellen. Jedoch wird in einem der folgenden Abschnitte gezeigt, daß die gewählte Verteilung unrealistisch ist, insofern für sie keine physikalische Entsprechung existiert. Später wird gezeigt, daß eine bewegte punktförmige Massenquelle durch eine Quellverteilung beschrieben wird, die etwas komplizierter als (9.1.3) ist. Trotzdem soll hier zunächst von dem formal einfachsten Ansatz ausgegangen werden.

## 9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

Um das Druckfeld eines bewegten Monopols zu berechnen, muß die gewählte Quellverteilung  $q(\vec{x}, t)$  in Gleichung (9.1.2) eingesetzt werden. Zuvor soll jedoch die rechte Seite von (9.1.2) umgeformt werden. Es wird sich eine auf den ersten Blick viel komplizierter erscheinende Form ergeben, die jedoch für das weitere Vorgehen einige Vorteile bietet. Dazu wird eine allgemeine Rechenregel für die  $\delta$ -Funktion verwendet. Allgemein gilt für eine Funktion  $B(\tau)$  die Beziehung

$$B(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) \delta(\tau_0 - \tau) d\tau \quad (9.1.4)$$

Hier wird speziell

$$\tau_0 = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (9.1.5)$$

und

$$B(\tau) = \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (9.1.6)$$

gewählt. Die Gleichung (9.1.4) entspricht dann

$$\frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d\tau \quad (9.1.7)$$

Damit kann der Integrand auf der rechten Seite von (9.1.2) ersetzt werden. Aus (9.1.2) ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d\tau d^3\vec{y} \quad (9.1.8)$$

Statt einer Integration über den dreidimensionalen Raum wird nun über einen vierdimensionalen Raum integriert, in dem die Variable  $\tau$  einer künstlich hinzugefügten Zeitkoordinate entspricht.

Setzt man (9.1.3) in (9.1.8) ein und vertauscht zusätzlich noch die Integrationen, dann ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Q(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d^3\vec{y} d\tau \quad (9.1.9)$$

Jetzt wird deutlich, wieso die Integration über  $\tau$  eingeführt wurde. Für das innere Integral ist  $\tau$  eine Konstante. Der im Argument der ersten  $\delta$ -Funktion auftretende Vektor  $\vec{x}_s(\tau)$  ist fest. Damit kann die ersten  $\delta$ -Funktion verwendet werden, um die

## 9 Bewegte Schallquellen

Integration über  $\vec{y}$  durchzuführen. Ohne die Erweiterung würde zwar auch eine  $\delta$ -Funktion im Integral vorhanden sein, jedoch wäre ihr Argument auf komplizierte Weise von der Integrationsvariablen  $\vec{y}$  abhängig. Diese Schwierigkeit wird so umgangen. Der Preis dafür ist die zusätzliche Integration über  $\tau$ . Dabei ist dann auch die  $\delta$ -Funktion mit komplizierten Argument nicht mehr zu vermeiden. Jedoch ist das Integral nur eindimensional und die Lösung kann angegeben werden.

Im ersten Schritt wird das innere Integral ausgewertet. Dazu wird nochmal eine allgemeine Beziehung für die  $\delta$ -Funktion angewendet. Für ein skalares Feld  $A(\vec{y})$  gilt

$$A(\vec{y}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} A(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{y}_0) d^3 \vec{y} \quad (9.1.10)$$

Die Gleichung ist die räumliche Entsprechung von Beziehung (9.1.4). Es wird jetzt

$$\vec{y}_0 = \vec{x}_s(\tau) \quad (9.1.11)$$

und

$$A(\vec{y}) = \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) \quad (9.1.12)$$

gewählt. Die rechte Seite von (9.1.12) hängt natürlich auch noch von den Zeiten  $t$  und  $\tau$  und von der Beobachtungsposition  $\vec{x}$  ab. Für die Ausführung der inneren Integration in (9.1.9) können diese Variablen jedoch als konstant angenommen werden. Mit den Ersetzungen (9.1.11) und (9.1.12) entspricht Gleichung (9.1.10) dem Ausdruck

$$\begin{aligned} & \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}{c} - \tau\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Q(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d^3 \vec{y} \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Damit kann das innere Integral in (9.1.9) durch die linke Seite von (9.1.13) ersetzt werden. Es ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}{c} - \tau\right) d\tau \quad (9.1.14)$$

Nun ist die Lösung nicht mehr als Integral über den Raum sondern als Integral über die künstlich eingeführte Zeit  $\tau$  dargestellt.

Um das Integral in (9.1.14) auszuwerten wird noch eine weitere Beziehung für die  $\delta$ -Funktion benötigt. Allgemein gilt für Integrale mit der in Gleichung (9.1.14) auftretenden Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(g(\tau)) d\tau = \sum_{n=1}^N \frac{f(\tau_n^*)}{\left| \frac{dg}{d\tau}(\tau_n^*) \right|} \quad (9.1.15)$$

## 9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

Dabei sind  $f(\tau)$  und  $g(\tau)$  beliebige Funktionen. Die Werte  $\tau_n^*$  mit  $n = 1, \dots, N$  sind die numerierten Nullstellen von  $g(\tau)$ . Sie erfüllen die Bedingung

$$g(\tau_n^*) = 0 \quad (9.1.16)$$

Prinzipiell sind auch unendlich viele Nullstellen zulässig. Es ergibt sich dann eine unendliche Summe auf der rechten Seite von (9.1.15). Im vorliegenden Fall werden die Funktionen

$$f(\tau) = \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \quad (9.1.17)$$

und

$$g(\tau) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}{c} - \tau \quad (9.1.18)$$

gewählt. Dann entspricht die linke Seite von (9.1.15) genau dem Integral in Gleichung (9.1.14).

Die Anzahl  $N$  der Nullstellen von  $g(\tau)$  wird durch die Bewegung der Quelle  $\vec{x}_s(\tau)$  bestimmt. Bewegt sich die Quelle zum Beispiel überhaupt nicht, dann ist  $\vec{x}_s(\tau) = \vec{x}_0$  eine konstanter Vektor. Für feste Werte  $\vec{x}$  und  $t$  besitzt in diesem Fall  $g(\tau)$  genau eine Nullstelle bei

$$\tau^* = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{c} \quad (9.1.19)$$

Dies ist natürlich nur ein Sonderfall. Bei Bewegung der Quelle ist theoretisch alles zwischen  $N = 0$  und  $N = \infty$  möglich. Im folgenden wird noch genauer untersucht, unter welchen Bedingungen sich nur genau eine Nullstelle ergibt. Zunächst soll jedoch die Ableitung  $dg/d\tau$  genauer betrachtet werden, die zur Berechnung des Integrals in (9.1.14) notwendig ist.

Auf der rechten Seite von (9.1.18) tritt der Abstand zwischen Quellposition zur Zeit  $\tau$  und dem Beobachter auf. Für den Abstand gilt

$$|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| = \sqrt{(x_i - x_{s,i}(\tau))^2} \quad (9.1.20)$$

Dabei ist  $x_{s,i}$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $\vec{x}_s$ . Das Quadrat unter der Wurzel impliziert nach der Summationskonvention eine Summe über die Komponenten. Differenziert man den Abstand folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_{s,i}} |\vec{x} - \vec{x}_s| = \frac{1}{2} \frac{2(x_i - x_{s,i})(-1)}{\sqrt{(x_i - x_{s,i})^2}} = -\frac{x_i - x_{s,i}}{|\vec{x} - \vec{x}_s|} \quad (9.1.21)$$

Für die Ableitung der Funktion  $g(\tau)$  ergibt sich daraus

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{(x_i - x_{s,i}(\tau))}{c |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \frac{dx_{s,i}(\tau)}{d\tau} - 1 \quad (9.1.22)$$

## 9 Bewegte Schallquellen

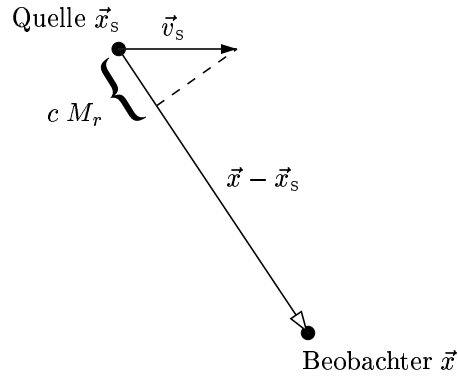


Abbildung 9.1: Zur Definition der Machzahl  $M_r$ .

Dies kann in rein vektorieller Darstellung als

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{c} \cdot \underbrace{\frac{(\vec{x} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}}_{\substack{\text{Normierter} \\ \text{Richtungsvektor}}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{x}_s(\tau)}{d\tau}}_{\vec{v}_s(\tau)} - 1 \quad (9.1.23)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{= c M_r(\tau)}$$

geschrieben werden. Auf der rechten Seite von (9.1.23) ergibt sich ein Skalarprodukt zweier Vektoren. Der Erste ist ein normierter Richtungsvektor mit der Länge Eins. Er zeigt von der Quellposition (zur retardierten Zeit) zum Beobachter. Der zweite Vektor entspricht der Geschwindigkeit  $\vec{v}_s(\tau)$ , die die Quelle zur retardierten Zeit hatte. Das Skalarprodukt ergibt gerade den Betrag der Komponente von  $\vec{v}_s$  in Richtung des Beobachters. Definiert man mit  $M_r$  eine Machzahl der Quellbewegung in Richtung zum Beobachter hin, so ist diese Geschwindigkeitskomponente gleich  $c M_r$ . In Abbildung 9.1 ist der Zusammenhang veranschaulicht. Zu beachten ist, daß die Machzahl  $M_r$  vorzeichenbehaftet ist. Sie wird negativ, wenn sich die Quelle vom Beobachter entfernt. Mit der Definition vereinfacht sich (9.1.23) zu:

$$\frac{dg}{d\tau} = M_r(\tau) - 1 \quad (9.1.24)$$

Zur Berechnung des Schalldrucks am Beobachtungsort, müssen noch alle Quellzeiten  $\tau^*$  ermittelt werden. Zunächst stellt sich die Frage, wie viele Lösungen  $\tau^*$  überhaupt existieren. Bewegt sich die Quelle immer mit Unterschall und strebt auch nicht asym-

## 9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

ptotisch gegen Schallgeschwindigkeit für  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , so gilt

$$|M_r(\tau)| \leq |M_r(\tau)|_{\max} < 1 \quad (9.1.25)$$

Damit ist  $g(\tau)$  nach (9.1.24) eine streng monoton fallende Funktion, die genau eine Nullstelle  $\tau^*$  besitzt. Die Summe in Gleichung (9.1.15) besteht damit nur aus einem Summanden. Es folgt für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{Q(\tau^*)}{4\pi r(\tau^*) |1 - M_r(\tau^*)|} \quad (9.1.26)$$

Diese Gleichung gilt, falls sich die Quelle immer nur mit Unterschallgeschwindigkeit bewegt. In (9.1.26) ist der Abstand zwischen Quellposition und Beobachtungsposition mit

$$r(\tau) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| \quad (9.1.27)$$

abgekürzt. Es sind die Werte der beiden Größen  $r$  und  $M_r$  zu der Quellzeit  $\tau^*$  in (9.1.26) einzusetzen.

Es zeigt sich, daß die Stärke der beobachteten Druckschwankungen nicht nur von der Entfernung zur Quelle sondern auch von deren Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit abhängt. Im Vergleich zur ruhenden Quelle ( $M_r = 0$ ) erhält man eine Verstärkung des Signals, wenn sich die Quelle auf den Beobachter zu bewegt. In diesem Fall ist  $M_r > 0$  und damit  $|1 - M_r| < 1$ . Entsprechend wird eine Abschwächung beobachtet, wenn sich die Quelle entfernt. Dann ist  $M_r < 0$  und für den Ausdruck im Nenner gilt  $|1 - M_r| > 1$ .

Bewegt sich die Quelle zeitweise mit Überschall ist die Bedingung (9.1.25) nicht mehr erfüllt. Es können sich mehrere Quellzeiten  $\tau^*$  ergeben. Alle müssen die Bedingung

$$c(t - \tau^*) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| \quad (9.1.28)$$

erfüllen, die äquivalent zu  $g(\tau^*) = 0$  ist. Prinzipiell ist es auch möglich, daß überhaupt keine Lösung für  $\tau^*$  existiert. Dies hängt von der Bewegung  $\vec{x}_s(\tau)$ , der Beobachtungszeit  $t$  und dem Beobachtungsort  $\vec{x}$  ab. Entsprechende Fälle werden weiter unten diskutiert. Falls mehrere Lösungen  $\tau^*$  Gleichung (9.1.28) erfüllen, ergibt sich der Schalldruck als Summe. Es gilt

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{Q(\tau_n^*)}{4\pi r(\tau_n^*) |1 - M_r(\tau_n^*)|} \quad (9.1.29)$$

Bei beliebiger Bewegung  $\vec{x}_s(\tau)$  ist es im Allgemeinen nicht möglich die Nullstellen  $\tau_n^*$  explizit anzugeben. Die Bestimmung von  $\tau_n^*$  soll anhand eines eindimensionalen Beispiels veranschaulicht werden. Die Quellposition ist nun durch die skalare Größe  $x_s(\tau)$  gegeben.

### Eindimensionales Beispiel

Es wird die Situation in der  $(x_s, \tau)$ -Ebene betrachtet. Dies ist eine Raum-Zeit-Ebene, in der alle möglichen Kombinationen aus Quellposition  $x_s$  und Quellzeit  $\tau$  liegen. Die Bewegung der Quelle  $x_s(\tau)$  definiert eine Kurve in dieser Ebene. Es soll der Schalldruck an der Beobachtersposition  $x_B$  zur Zeit  $t_B$  berechnet werden. Diese Kombination definiert einen Punkt in der Raum-Zeit-Ebene. Die geometrische Situation ist in Abbildung 9.2 dargestellt.

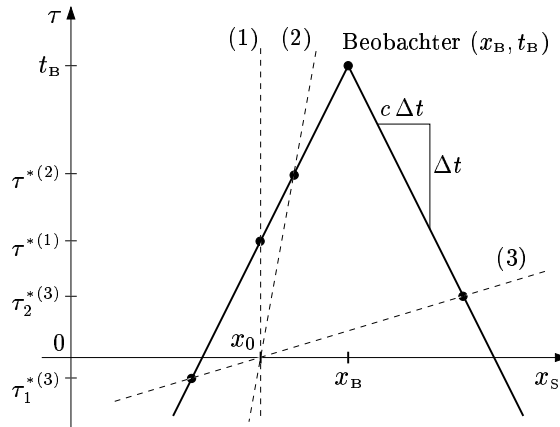


Abbildung 9.2: Raum-Zeit-Ebene mit drei Bewegungskurven.

Die zur vorgegebenen Zeit  $t_B$  am Ort  $x_B$  empfangenen Signale können nicht von beliebigen Punkten in dem Raum-Zeit-Ebene ausgegangen sein. Damit das Signal, welches eine Quelle am Ort  $x_s$  zur Zeit  $\tau$  aussendet, am Ort  $x_B$  zur Zeit  $t_B$  eintrifft, muß die Bedingung

$$c(t_B - \tau) = |x_B - x_s| \quad (9.1.30)$$

erfüllt sein. Das bedeutet, die Entfernung zwischen Quell- und Beobachtersposition entspricht der Laufzeit multipliziert mit der Schallgeschwindigkeit. Die Beziehung ist analog zu Gleichung (9.1.28). Hier wird jedoch keine konkrete Bewegung  $x_s(\tau)$  vorgegeben, sondern alle möglichen Quellpositionen im gesamten eindimensionalen Raum betrachtet.

Gleichung (9.1.30) definiert eine Menge in der Raum-Zeit-Ebene, die aus zwei Strahlen zusammengesetzt ist. Die Strahlen treffen im Punkt  $x_B, t_B$  zusammen und besitzen die Steigungen  $1/c$  und  $-1/c$ . Nur  $(x_s, \tau)$ -Kombinationen auf diesen Strahlen können einen Beitrag zum Signal in  $x_B, t_B$  liefern. Die Schnittpunkte der Strahlen mit der durch  $x_s(\tau)$  gegebenen Kurve, ergeben die Quellzeiten  $\tau^*$  und Quellpositionen  $x_s(\tau^*)$ .

## 9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

Für das Beispiel wird angenommen, daß sich die Quelle mit konstanter Geschwindigkeit in positive  $x_s$ -Richtung bewegt. Zur Zeit  $t = 0$  befindet sie sich gerade an der Stelle  $x_s = x_0$ . Es werden drei Fälle betrachtet:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x_s(\tau) = x_0 \\
 (2) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s \tau; \quad 0 < U_s < c \\
 (3) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s \tau; \quad U_s > c
 \end{aligned} \tag{9.1.31}$$

In den dargestellten Beispiel ist  $x_0 < x_B$ . Die Kurven  $x_s(t)$  nach (9.1.31) stellen Geraden in der  $(x_s, \tau)$ -Ebene dar. Die Neigung der Geraden hängt von der Geschwindigkeit ab. Die Lösungen für  $\tau^*$  ergeben sich durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit den beiden Strahlen aus  $(x_B, t_B)$ . Fall (1) entspricht einer ruhenden Quelle. In den Fällen (1) und (2) ergibt sich genau eine Lösung für  $\tau^*$ . Daran ändert sich auch nichts, wenn  $x_0$  verschoben wird, da die Steigung größer als  $1/c$  ist. Man findet immer genau einen Schnittpunkt beziehungsweise eine Lösung  $\tau^*$ . Dies muß nach den obigen Überlegungen auch so sein, da im Fall (1) und (2) die Bedingung  $|M_r| < 1$  gilt. Im dritten Fall, in dem sich die Quelle mit Überschallgeschwindigkeit bewegt, ergeben sich in der Abbildung zwei Lösungen  $\tau_1^*$  und  $\tau_2^*$ . Das bedeutet, es ist  $N = 2$ . Die Steigung der Geraden ist kleiner als  $1/c$ . Durch verschieben von  $x_0$  nach links ist es daher möglich, daß die Gerade keinen Schnittpunkt mit den beiden Strahlen mehr besitzt. In diesem Fall wäre  $N = 0$  und der Beobachter am Ort  $x_B$  würde zur Zeit  $t_B$  noch nichts von der Quelle hören können. Erst zu einem späteren Zeitpunkt  $t > t_B$  könnte er die Quelle wahrnehmen.

Nachdem die Bestimmung der Quellzeitpunkte  $\tau^*$  geometrisch gedeutet werden konnte, soll anhand des eindimensionalen Beispiels auch noch die Veränderung der Signalstärke bei Bewegung der Quelle veranschaulicht werden. Dazu wird betrachtet, welche integrale Wirkung eine Quelle auf den Beobachter in einem kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  besitzt.

In dem Zeitintervall werden alle Signale empfangen, die von Punkten in der  $(x_s, \tau)$ -Ebene ausgehen, die in dem in der Abbildung 9.3 schattiert dargestellten Bereich liegen. Es werden wieder drei Fälle mit konstanter Geschwindigkeit betrachtet:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x_s(\tau) = x_0 \\
 (2) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s t; \quad 0 < U_s < c \\
 (3) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s t; \quad 0 > U_s > -c
 \end{aligned} \tag{9.1.32}$$

Bei ruhender Quelle (1) befindet sich die Quelle genau das Zeitintervall  $\Delta\tau = \Delta t$  in dem relevanten Bereich. Dies bedeutet, die in dieser Zeit von der Quelle abgesandten Signale werden vom Beobachter in Intervall  $[t_B, t_B + \Delta t]$  empfangen.

Bewegt sich die Quelle auf den Beobachter zu (2), so wirken die Signale der Quelle aus einem längerem Zeitintervall  $\Delta\tau = \Delta t / (1 - |M_r|)$  mit  $M_r = U_s/c$  auf den Beobachter ein. Entfernt sich die Quelle (3), so wirken lediglich die in einem Zeitintervall  $\Delta\tau = \Delta t / (1 + |M_r|)$  abgestrahlten Signale auf den Beobachter. Die Verstärkung beziehungsweise Abschwächung der beobachteten Signale kann durch die unterschiedlichen Verhältnisse von Quellzeitraum  $\Delta\tau$  zu Beobachtungszeitraum  $\Delta t$  plausibel gemacht werden. Wird in dem relevanten Zeitintervall  $\Delta\tau$  zum Beispiel ein konstantes Signal



## 9 Bewegte Schallquellen

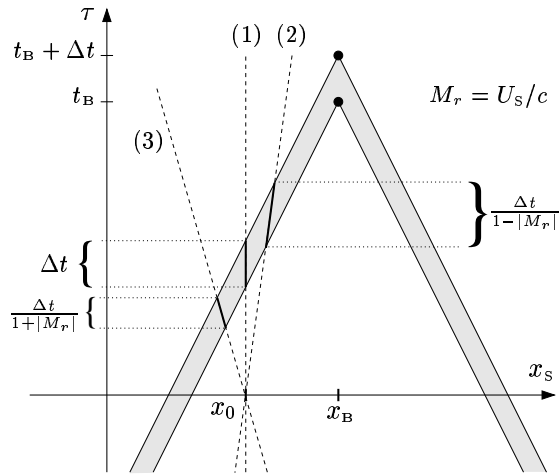


Abbildung 9.3: Zur Veranschaulichung der Verstärkung.

ausgesandt, so addieren sich die Anteile in dem Beobachtungszeitraum  $\Delta t$ . Je größer das Verhältnis von  $\Delta\tau/\Delta t$  ist, desto stärker ist das beobachtete Signal.

### Einfaches dreidimensionales Beispiel

Bisher wurde der eindimensionale Fall ausführlich betrachtet. Die Bestimmung der retardierten Zeiten  $\tau^*$  läßt sich dort gut anschaulich darstellen. Im dreidimensionalen Fall wird die Situation jedoch unübersichtlicher. Dies gilt selbst bei gleichförmig, gradlinig bewegter Quelle. Die folgende Betrachtung soll dies verdeutlichen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß sich die Quelle zur Zeit  $t = 0$  im Ursprung  $\vec{x} = 0$  befindet, und daß die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $U_s = |\vec{v}_s|$  entlang der  $x_1$ -Achse erfolgt. Es gilt

$$\vec{x}_s(t) = U_s \cdot t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.1.33)$$

Der Beobachter empfängt an der Stelle  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  das von der Quelle zur Zeit  $\tau^*$  abgestrahlte Signal. Der Zusammenhang zwischen  $\tau^*$  und  $t$  ist durch (9.1.28) gegeben. Es gilt

$$c(t - \tau^*) = \sqrt{(x_1 - U_s \tau^*)^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (9.1.34)$$

## 9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

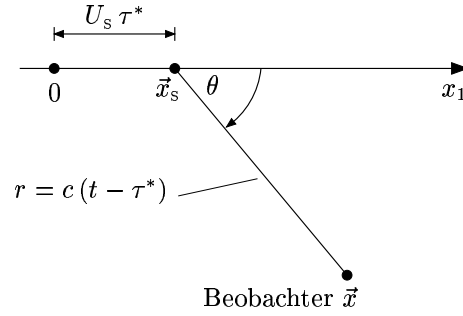


Abbildung 9.4: Zur Definition des Winkels  $\theta$  zwischen Beobachtungs- und Bewegungsrichtung.

Dies kann nach  $\tau^*$  aufgelöst werden. Nach einigen Umformungen, die hier nicht gezeigt werden, ergibt sich

$$\tau^* = \frac{1}{c(1 - M_s^2)} \cdot \left\{ ct - M_s x_1 \pm \sqrt{(x_1 - U_s t)^2 + (1 - M_s^2)(x_2^2 + x_3^2)} \right\} \quad (9.1.35)$$

mit

$$M_s = \frac{U_s}{c} \quad (9.1.36)$$

Zu beachten ist, daß nur reelle Lösungen von (9.1.35) mit  $\tau^* \leq t$  physikalisch sinnvoll sind.

Die Machzahl der Quellbewegung relativ zum Beobachter ist bei der betrachteten Geometrie durch den Winkel  $\theta(\tau^*)$  gegeben. Dies ist der Winkel zwischen Bewegungs- und Beobachtungsrichtung zum Quellzeitpunkt. Die Situation ist in Abbildung 9.4 illustriert. Es gilt

$$M_r(\tau^*) = \frac{U_s}{c} \cdot \cos(\theta(\tau^*)) = M_s \cos(\theta(\tau^*)) \quad (9.1.37)$$

Damit ergibt sich für das beobachtete Signal die Winkelabhängigkeit:

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{Q(\tau^*)}{4\pi r |1 - M_s \cdot \cos \theta|} \quad (9.1.38)$$

Die Verstärkung beziehungsweise Abschwächung durch Bewegung kann als Funktion des Winkels  $\theta$  in einem Polardiagramm veranschaulicht werden. Dies ist in Abbildung 9.5 dargestellt.

Die Stärke des abgestrahlten Signals in der entsprechenden Richtung ergibt sich aus dem Abstand zum Ursprung. Der fett eingezeichnete Kreis repräsentiert die richtungsunabhängige Stärkeverteilung eines ruhenden Monopols. Die Quelle bewegt sich

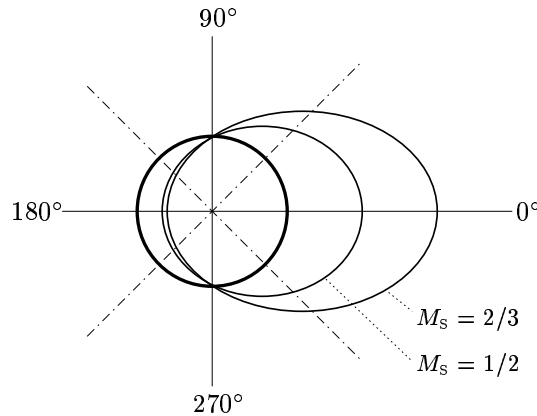


Abbildung 9.5: Polardiagramm der relativen Stärke bei Bewegung der Quelle mit  $M_s$ .

in  $0^\circ$ -Richtung. In dieser Richtung findet man auch die maximale Verstärkung bei Bewegung. In den Richtungen  $90^\circ$  und  $270^\circ$  ändert sich die Stärke der Abstrahlung überhaupt nicht. Entgegen der Bewegungsrichtung bei  $180^\circ$  wird die Abstrahlung am schwächsten.

## 9.2 Frequenzverschiebung

Betrachtet wird der Fall, daß die Quelle ein harmonisches Signal mit der Frequenz  $\omega$  aussendet. Es soll

$$Q(t) = \hat{Q} e^{i\omega t} \quad (9.2.1)$$

gelten. Bewegt sich die Quelle immer mit Unterschallgeschwindigkeit, so ergibt sich der Schalldruck am Beobachter zu

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\hat{Q} e^{i\omega\tau^*}}{4\pi r(\tau^*)|1 - M_r(\tau^*)|} \quad (9.2.2)$$

Um die Frequenz, mit der der Beobachter das Signal wahrnimmt, zu bestimmen, muß die zeitliche Änderung von  $p'$  betrachtet werden. Die rechte Seite von (9.2.2) hängt zunächst rein formal nur von  $\tau^*$  ab. Die Quellzeit  $\tau^*$  ist wiederum von der Bewegung  $\vec{x}_s(\tau)$ , der Beobachtungsposition  $\vec{x}$  und der Beobachtungszeit  $t$  abhängig. Das bedeutet, bei vorgegebener Bewegung der Quelle existiert eine Funktion  $\tau^*(\vec{x}, t)$ . Bei Bewegung mit Unterschallgeschwindigkeit ist die Funktion eindeutig. Sie kann allerdings selbst bei einfachen Bewegungen eine relativ komplexe Form annehmen.

Die folgenden Überlegungen gelten für eine feste Beobachtungsposition  $\vec{x}$ . Um den zeitliche Signalverlauf in der Nähe einer gegebenen Beobachtungszeit  $t = t_0$  genauer zu

untersuchen, wird die Funktion  $\tau^*(\vec{x}, t)$  bezüglich  $t$  in eine Reihe entwickelt. Es kann

$$\tau^*(\vec{x}, t) = \underbrace{\tau^*(\vec{x}, t_0)}_{\tau_0^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}(\vec{x}, t_0) \cdot (t - t_0) + \dots \quad (9.2.3)$$

geschrieben werden. Das erste Glied der Reihe wird mit  $\tau_0^*$  abgekürzt. Aus Gleichung (9.2.2) ergibt sich für die Druckschwankung die Proportionalität

$$p' \sim e^{i\omega\tau^*} = e^{i\omega[\tau_0^* + (t - t_0)\frac{\partial \tau^*}{\partial t} + \dots]} \quad (9.2.4)$$

Die Größe  $\tau_0^*$  bewirkt eine feste Phasenverschiebung des Signals. Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung ergibt sich für das beobachtete Signal auch eine harmonische Schwingung. Die beobachtete Frequenz ist jedoch nicht einfach gleich der ausgesandten Frequenz  $\omega$ , sondern sie ist um den Faktor  $\partial\tau^*/\partial t$  "verschoben".

Es ist zu bemerken, daß im Allgemeinen kein harmonisches Signal empfangen wird, obwohl die Quelle harmonisch abstrahlt. Daher kann man strenggenommen keine eindeutige Frequenz mehr definieren. Mit der Ausnahme von Sonderfällen wird eine Oszillation zu beobachten sein. Betrachtet man einen kurzen Zeitabschnitt, so ändert sich die Ableitung  $\partial\tau^*/\partial t$  vielleicht nur gering. Dann kann näherungsweise in diesem kurzen Zeitabschnitt das beobachtete Signal mit einer harmonischen Schwingung angenähert werden. Das entspricht der Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in (9.2.4). Nur in diesem Sinne kann von einer Frequenz des Signals gesprochen werden.

In Abschnitt 9.1 wurde für den Fall einer gleichförmig, geradlinigen Bewegung der Quelle mit Gleichung (9.1.35) eine Funktion  $\tau^*(\vec{x}, t)$  angegeben. Im Prinzip kann daraus die benötigte Ableitung  $\partial\tau^*/\partial t$  berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß man die richtige Lösung  $\tau^*$  auswählt. Denn die angegebene Funktion ist quadratisch und liefert unter Umständen auch unphysikalische Lösungen. Zusätzlich gilt die Funktion nur für eine bestimmte Quellbewegung.

Auch ohne Vorgabe einer bestimmten Quellbewegung kann eine nützliche Beziehung für die gesuchte Ableitung hergeleitet werden. Dazu wird von der Gleichung (9.1.28) ausgegangen. Für alle Quellzeiten  $\tau^*$ , die einen Beitrag zur Zeit  $t$  am Ort  $\vec{x}$  liefern, muß

$$c(t - \tau^*) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| \quad (9.2.5)$$

erfüllt sein. Differenziert man beide Seiten nach der Beobachtungszeit  $t$ , ergibt sich

$$c \left( 1 - \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) = \frac{d}{d\tau^*} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \quad (9.2.6)$$

Auf der rechten Seite tritt die Ableitung des Abstands zwischen Beobachtungsort und Quellposition nach der Quellzeit  $\tau^*$  auf. Ein ähnlicher Ausdruck wurde bereits im

## 9 Bewegte Schallquellen

letzten Abschnitt berechnet. Dort ergab sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| &= \frac{\partial}{\partial x_{s,i}} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| \cdot \frac{dx_{s,i}}{d\tau} = -\frac{(x_i - x_{s,i}(\tau))}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \cdot \frac{dx_{s,i}}{d\tau} \\ &= -c M_r(\tau) \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Um diese Beziehung hier anwenden zu können, muß nur  $\tau$  durch  $\tau^*$  ersetzt werden. Die linke Seite entspricht dann dem ersten Faktor auf der rechten Seite von (9.2.6). Er ist daher gleich  $-c M_r(\tau^*)$ . Setzt man dies in (9.2.6) ein und löst nach der gesuchten Ableitung auf, erhält man

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.2.8)$$

Damit ist die gesuchte Ableitung als Funktion der Beobachtungsmachzahl  $M_r$  ausgedrückt.

Vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung in der Reihenentwicklung von  $\tau^*(t)$ , so ergibt sich aus (9.2.2) für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\hat{Q}}{4\pi r |1 - M_r|} \cdot e^{i\omega\tau_0^*} \cdot e^{i\omega_D(t - t_0)} \quad (9.2.9)$$

Dabei ist die "verschobene" Frequenz mit

$$\omega_D = \omega \cdot \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.2.10)$$

gegeben. Mit der Beziehung (9.1.37) kann  $M_r$  durch die Machzahl der Quellebewegung  $M_s$  und den Beobachtungswinkel  $\theta$  ausgedrückt werden. Es ergibt sich

$$\omega_D = \frac{\omega}{1 - M_s \cos \theta} \quad (9.2.11)$$

Gleichung (9.2.9) ist nur in einem kurzen Augenblick bei  $t \approx t_0$  eine gute Approximation. In diesem Moment nimmt der Beobachter die Quelle mit der Frequenz  $\omega_D$  wahr. Im Allgemeinen verändert sich die Frequenz  $\omega_D$  ständig als Funktion der Beobachtungsmachzahl  $M_r$ . Nur wenn sich die Quelle direkt auf den Beobachter zubewegt ( $\theta = 0$ ), bleibt die Frequenz konstant und springt erst dann auf einen neuen Wert, wenn die Quelle den Beobachter passiert.

Die Frequenzverschiebung wird anschaulich plausibel, wenn man Phasenfronten (z.B. die Maxima) der abgestrahlten Wellen betrachtet. Dies ist in Abbildung 9.6 dargestellt. Durch die Bewegung rücken die Phasenfronten auf einer Seite zusammen und auf der anderen Seite auseinander. Der Beobachter, auf den sich die Quelle zubewegt, sieht eine kürzere Wellenlänge und eine entsprechend höhere Frequenz. Dies steht im Einklang mit der formalen Überlegung. Für den Beobachter auf der rechten Seite ist  $M_r > 0$ . Damit wird der Ausdruck in (9.2.8) größer Eins. Die beobachtete Frequenz ist erhöht. Analog ergibt sich eine niedrigere Frequenz entgegen der Bewegungsrichtung.

### 9.3 Quelle mit Überschallgeschwindigkeit

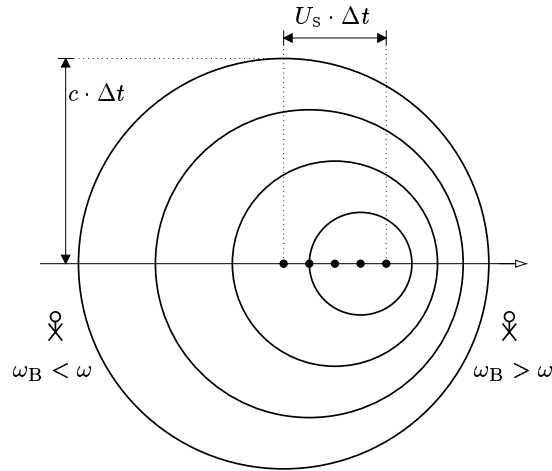


Abbildung 9.6: Zur Frequenzverschiebung.

Dort ist  $M_r < 0$ . Entsprechend sind die Abstände der Phasenfronten auf der linken Seite in Abbildung 9.6 größer. Das Phänomen der Frequenzverschiebung wird üblicherweise als Doppler-Verschiebung bezeichnet. Der Faktor in (9.2.10), um den sich die Frequenz ändert, heißt Doppler-Faktor.

### 9.3 Quelle mit Überschallgeschwindigkeit

In einem Gedankenexperiment von Lord Rayleigh bewegt sich ein Geigenspieler mit doppelter Schallgeschwindigkeit  $M_s = 2$  direkt auf einen Beobachter zu. Der Beobachter befindet sich in der Bahn des Musikers. Der Musiker erzeugt ein Signal  $Q(t)$ . Zunächst hört der Beobachter den herannahenden Musiker überhaupt nicht. Wenn der Musiker den Beobachter passiert hat, hört der Beobachter eine Überlagerung von zwei Signalen, denn es existieren zwei Quellzeiten  $\tau_1^*$  und  $\tau_2^*$ . Sie entsprechen zwei Quellpositionen. Eine liegt auf dem Weg zum Beobachter hin und die andere auf dem Weg vom Beobachter weg. Für die erste Quellposition ist die Beobachtungsmachzahl  $M_r = 2$  und für die zweite ist  $M_r = -2$ .

Der Beobachter hört das Signal

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^2 \frac{Q(\tau_n^*)}{4\pi r(\tau_n^*) |1 - M_r(\tau_n^*)|} \quad (9.3.1)$$

Für die erste Quellposition gilt

$$\frac{\partial \tau_1^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_r} = -1 \quad (9.3.2)$$

## 9 Bewegte Schallquellen

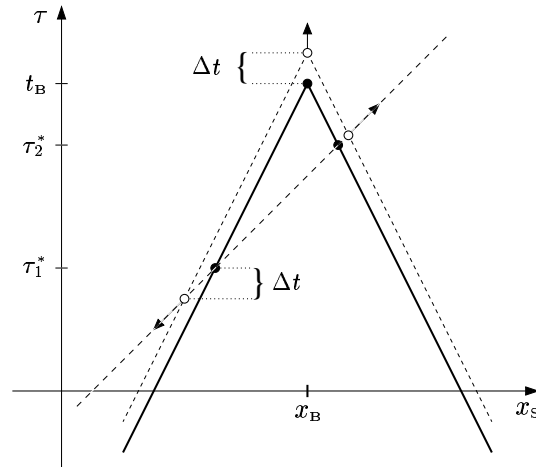


Abbildung 9.7: Verschiebung der Quellzeiten mit der Beobachtungszeit.

Der Beobachter hört demnach die Musik in Originalgeschwindigkeit jedoch rückwärts! Das ganze ist Überlagert mit dem Signal, von der zweiten Quellzeit  $\tau_2^*$ . Stoppt der Musiker sein Spiel, wenn er den Beobachter erreicht, hört der Beobachter die rückwärts spielende Musik sogar ungestört.

Dieses Phänomen wird anschaulich plausibel, wenn man die Situation in der  $(x_s, \tau)$ -Ebene betrachtet. Hat die Quelle den Beobachter passiert, existieren für den Beobachter am Ort  $x_B$  zur Zeit  $t_B$  zwei Lösungen  $\tau_1^*$  und  $\tau_2^*$ . Diese sind durch die Schnittpunkte der Bewegungsbahn mit den  $\pm 1/c$ -Strahlen durch  $(x_B, t_B)$  gegeben. Die Kurven sind in der Abbildung 9.7 dargestellt. Zu einem um  $\Delta t$  späteren Zeitpunkt ergeben sich neue Schnittpunkte in der  $(x_s, \tau)$ -Ebene und damit andere Lösungen  $\tau^*$ . Die mit  $\tau_1^*$  bezeichnete Lösung ist genau um  $\Delta t$  verringert, wenn  $t_B$  um  $\Delta t$  erhöht wird. Dies entspricht der Aussage von Gleichung (9.3.2).

Bei dem Gedankenexperiment von Lord Rayleigh handelt es sich um einen Spezialfall. Im nächsten Schritt soll ein etwas allgemeinerer Fall betrachtet werden. Zur Vereinfachung wird weiterhin angenommen, daß sich die Quelle gradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit

$$U_s = |\vec{v}_s| > c \quad (9.3.3)$$

bewegt. Die Machzahl der Quellbewegung ist mit

$$M_s = \frac{U_s}{c} > 1 \quad (9.3.4)$$

gegeben. Im dem eindimensionalen Gedankenexperiment war klar, daß der Beobachter die herannahende Schallquelle nicht wahrnehmen kann, bevor sie ihn erreicht. Im dreidimensionalen Fall stellt sich die Frage, an welchen Orten ein Beobachter die Quelle zu

### 9.3 Quelle mit Überschallgeschwindigkeit

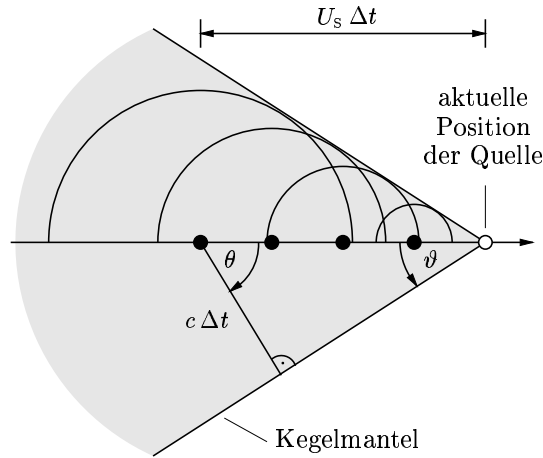


Abbildung 9.8: Zum Machschen Kegel.

einem bestimmten Zeitpunkt  $t_B$  bereits wahrgenommen hat. Die Quelle befindet sich zur Zeit  $t_B$  an der Position  $\vec{x}_s(t_B)$ , die im Folgenden als aktuelle Position bezeichnet wird. Zum Zeitpunkt  $t_B - \Delta t$  befand sich die Quelle noch um  $U_s \Delta t$  vor der aktuellen Position. Konstruiert man sich um diese Position eine Kugel, deren Radius  $c \Delta t$  gerade der Strecke entspricht, die Wellen in der Zeit  $\Delta t$  zurücklegen, so haben alle Beobachter innerhalb der Kugel zur aktuellen Zeit  $t_B$  die Quelle bereits wahrgenommen. Eine solche Kugel kann nun für alle möglichen Werte  $\Delta t$  konstruiert werden. Die Kugeln überlagern sich zu einem Kegel im Raum. Die Spitze des Kegels befindet sich in der aktuellen Position der Quelle. Die Situation ist in der Abbildung 9.8 in einem Schnitt durch die Mitte des Kegels veranschaulicht. Die Quelle bewegt sich von links nach rechts.

Der resultierende Kegel wird Machscher Kegel genannt. Beobachter außerhalb des Kegels haben die Quelle zur Zeit  $t_B$  noch nicht wahrgenommen. Beobachter auf dem Kegelmantel erreicht gerade die erste Information von der Quelle. Für diese Beobachter ergibt sich eine ganz besondere Situation. Betrachtet man den deren Beobachtungswinkel  $\theta$ , so ergibt sich

$$\cos \theta = \frac{c \Delta t}{U_s \Delta t} = \frac{1}{M_s} \quad (9.3.5)$$

Gleichzeitig gilt nach den Überlegungen aus Abschnitt 9.1 für die Beobachtungsmachzahl bei gradlinig gleichförmiger Bewegung

$$M_r = M_s \cos \theta \quad (9.3.6)$$

Zusammen mit (9.3.5) folgt daraus, daß für Beobachter auf dem Kegelmantel die Beob-



## 9 Bewegte Schallquellen

achtungsmachzahl

$$M_r = 1 \quad (9.3.7)$$

ist. Für das beobachtete Drucksignal gilt allgemein

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{Q(\tau_n^*)}{4\pi r(\tau_n^*)|1 - M_r(\tau_n^*)|} \quad (9.3.8)$$

Für den Beobachter am Kegelmantel existiert nur eine Quellzeit  $\tau^*$ . Diese hängt vom Abstand des Beobachters zur aktuellen Quellposition ab. Der Beobachtungswinkel  $\theta$  und die Beobachtungsmachzahl  $M_r$  sind jedoch für alle gleich. In jedem Fall ist

$$|1 - M_r(\tau^*)| = 0 \quad (9.3.9)$$

Dies bedeutet, daß für Beobachter am Kegelmantel der beobachtete Schalldruck theoretisch unendlich groß wird. Dort sind die Annahmen der Akustik nicht mehr erfüllt. In der Realität hört ein Beobachter am Kegelmantel den sogenannten Überschallknall. Für die Stärke und Form der realen Druckschwankungen im Überschallknall spielen nichtlineare Effekte und die Ausdehnung der Quelle eine Rolle.

In Abbildung 9.8 ist auch der Kegelwinkel  $\vartheta$  eingezeichnet. Er wird Machscher Winkel genannt. Die Regeln für rechtwinklige Dreiecke ergeben, daß

$$\sin \vartheta = \frac{1}{M_s} \quad (9.3.10)$$

gelten muß. Damit hängt der Machsche Winkel mit

$$\vartheta = \arcsin\left(\frac{1}{M_s}\right) \quad (9.3.11)$$

von der Machzahl der Quellbewegung  $M_s$  ab. Je schneller sich die Quelle bewegt, desto spitzer wird der Kegel.

Bewegt sich die Quelle nicht gradlinig, kann ebenfalls um jede durchlaufene Position der Quelle eine Kugel konstruiert werden. Bei einer gekrümmten Bahn entsteht dann kein Kegel sondern ein Konoid, falls  $M_s > 1$  ist. Es ergibt sich auch in diesem Fall auf der Oberfläche des Konoids ein Beobachtungswinkel  $\theta$  für den  $M_r = 1$  wird. Die lineare Theorie liefert entsprechend auch dort einen singulären Schalldruck.

## 9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

Bisher wurde die bewegte Punktquelle durch eine Quellverteilung der Form

$$q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.1)$$

beschrieben. Dies ist formal der einfachste Ansatz. Er entspricht jedoch nicht direkt einer physikalischen Quelle – wie etwa einer bewegten punktförmigen Massenquelle.

#### 9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

Um dies zu verdeutlichen, wird die linearisierte Kontinuitätsgleichung für diesen Fall betrachtet. Die Massenzufuhr kann durch einen Quellterm auf der rechten Seite ausgedrückt werden. Für eine bewegte punktförmige Massenquelle gilt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = \rho_0 \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.2)$$

Vereinfachend soll angenommen werden, daß die zugeführte Masse die gleiche Dichte  $\rho_0$  wie das vorhandene Medium besitzt. Mit  $\beta(t)$  wird der Volumenanteil der zugeführten Masse zur Zeit  $t$  bezeichnet. Damit stellt  $\rho_0 \beta$  die bereits zugeführte Masse pro Volumen dar, und  $\rho_0 \dot{\beta}$  entspricht der zugeführten Masse pro Zeit und pro Volumen. Die Masse wird jedoch nur an einem Punkt  $\vec{x}_s(t)$  zugeführt. Die  $\delta$ -Funktion sorgt dafür, daß sich bei Integration über ein Volumen um die Quelle herum ein endlicher Massenstrom (Masse pro Zeit) ergibt.

Wenn die zugeführte Masse keinen Impuls besitzt, dann hat die Massenquelle keinen Einfluß auf die Impulserhaltung. Die linearisierte Euler-Gleichung gilt in der gewohnten Form:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0 \quad (9.4.3)$$

Um einer Wellengleichung zu erhalten, differenziert man (9.4.2) nach der Zeit und bildet die Divergenz von (9.4.3). Die resultierenden Gleichungen werden subtrahiert. Zusätzlich wird die Dichte mit  $\rho' = p'/c^2$  ersetzt. Es ergibt sich die inhomogene Wellengleichung

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \underbrace{\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}}_{q(\vec{x}, t)} \quad (9.4.4)$$

Die rechte Seite entspricht einer Quellverteilung  $q(\vec{x}, t)$ . Es zeigt sich, daß die hergeleitete Quellverteilung nicht der einfachen Punktquelle in (9.4.1) entspricht. Durch die Zeitableitung auf der rechten Seite ergibt sich eine grundsätzlich andere Form.

Analog kann eine bewegte, punktförmige Impulsquelle betrachtet werden. Für diesen Fall erhält man statt Gleichung (9.4.3) die linearisierte Euler-Gleichung mit Quellterm auf der rechten Seite:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = \vec{f}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.5)$$

Der Vektor  $\vec{f}(t)$  gibt die Richtung und Stärke des zugeführten Impulses pro Volumen zur Zeit  $t$  an. Wird ausschließlich Impuls und keine Masse zugeführt, dann gilt die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \quad (9.4.6)$$

## 9 Bewegte Schallquellen

Aus (9.4.5) und (9.4.6) kann in der üblichen Weise wieder eine Wellengleichung abgeleitet werden. Es folgt

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) p' = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}}_{q(\vec{x}, t)} \quad (9.4.7)$$

Auch durch die Impulsquelle erhält man keine Quellverteilung, die der einfachen Form in Gleichung (9.4.1) entspricht. Hier ergibt sich durch die räumliche Ableitung ein prinzipieller Unterschied.

Zu bemerken ist, daß die bewegte Massen- und Impulsquelle in der Regel miteinander verknüpft sind. Betrachtet man zum Beispiel eine kleine atmende Kugel als punktförmige Massenquelle, so wird bei Bewegung dieser Kugel auch ein Impuls auf das Fluid übertragen. In der Praxis treten die beiden Effekte fast immer in Kombination auf. Bei der folgenden Untersuchung werden die Fälle jedoch getrennt behandelt.

### Ableitung im Quellterm

Im freien Raum ohne Begrenzungen ist die Lösung der inhomogenen Wellengleichung durch das Integral

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.8)$$

gegeben. Dabei ist zur Abkürzung die retardierte Zeit

$$\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (9.4.9)$$

eingeführt worden. Zur Berechnung der entstehenden Schallfelder muß die entsprechende Quellverteilung für  $q$  in dem Integral eingesetzt werden. Hier soll jedoch ein anderer Weg besprochen werden, der direkt auf eine Form der Lösung führt, die für die weiteren Berechnungen einige Vorteile besitzt.

Sowohl die bewegte Massen- und als auch die Impulsquelle werden beide durch Quellverteilungen beschrieben, die als Ableitung gegeben sind. Die Gleichung (9.4.4) besitzt die Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) p' = \frac{\partial B}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (9.4.10)$$

Auf der rechten Seite steht die Zeitableitung eines Feldes  $B(\vec{x}, t)$ . Die folgende Überlegung ist unabhängig von der konkreten Form des Feldes. Rein formal läßt sich eine inhomogene Wellengleichung aufstellen, in der nicht die Ableitung  $\partial B/\partial t$  sondern das Feld  $B$  selbst die Quellstärke angibt. Es soll

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \psi = B(\vec{x}, t) \quad (9.4.11)$$

#### 9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

gelten. Dabei ist  $\psi$  eine Hilfsgröße, die nicht notwendigerweise eine physikalische Bedeutung besitzt. Ohne Berandung kann die Lösung der Gleichung mit

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.12)$$

angegeben werden. Differenziert man (9.4.10) nach der Zeit  $t$ , ergibt sich

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (9.4.13)$$

Die rechte Seite ist mit der von Gleichung (9.4.10) identisch. Damit muß  $p'$  mit der Zeitableitung der Größe  $\psi$  übereinstimmen. Aus (9.4.12) folgt

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.14)$$

Diese Lösung hätte sich natürlich auch aus (9.4.8) ergeben, wenn man für  $q$  die Zeitableitung von  $B$  einsetzt. Es ist jedoch nicht so einfach den entstehenden Ausdruck so umzuformen, daß die Zeitableitung vor dem Integral erscheint.

Auch für die Quellverteilung mit räumlicher Ableitung kann eine Lösung angegeben werden, bei der die Ableitung vor dem Integral steht. Gleichung (9.4.7) kann als

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) \quad (9.4.15)$$

dargestellt werden. Dabei ist  $B_i$  die Komponente eines Vektorfeldes. Analog zu (9.4.10) wird mit jeder dieser Komponenten eine inhomogene Wellengleichung aufgestellt. Diese lautet

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi_i = B_i(\vec{x}, t) \quad (9.4.16)$$

Dabei ist  $\psi_i$  wieder eine Hilfsgröße. Differenziert man beide Seiten nach  $x_i$  und vergleicht das Resultat mit (9.4.15), dann folgt für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.17)$$

Auch hier wurde erreicht, daß die Ableitung nicht im sondern vor dem Integral steht.

Die hergeleiteten Lösungen gelten für beliebige Felder  $B$  beziehungsweise  $B_i$ . Im nächsten Schritt sollen die tatsächlichen Quellverteilungen für die bewegte Massen- und Impulsquelle eingesetzt werden. Wählt man

$$B(\vec{x}, t) = \rho_0 \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.18)$$

## 9 Bewegte Schallquellen

dann entspricht (9.4.10) der Gleichung (9.4.4) für die bewegte Massenquelle. Setzt man dieses Feld  $B$  in die Lösung (9.4.14) ein, ergibt sich für die Druckverteilung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\dot{\beta}(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.19)$$

Im Fall der bewegten Impulsquelle muß

$$B_i(\vec{x}, t) = -f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.20)$$

gewählt werden, damit (9.4.15) mit (9.4.7) übereinstimmt. Aus (9.4.17) folgt für das entstehende Druckfeld

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_i(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.21)$$

Die Lösung für den einfachen bewegten Monopol mit einer Quellverteilung nach Gleichung (9.4.1) ist mit

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Q(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.22)$$

gegeben. Der wesentliche Unterschied zu den beiden Lösungen (9.4.19) und (9.4.21) besteht in der Ableitung vor dem Integral. Außerdem muß natürlich in (9.4.21) die Summe über den Index  $i$  gebildet werden. Das vorkommende Integral selbst besitzt jedoch in allen drei Fällen die gleiche Gestalt. Für den einfachen bewegten Monopol wurde die Lösung bereits in Abschnitt 9.1 untersucht. Dort konnte das Integral in eine Summe umgewandelt werden (siehe Gleichung (9.1.29)). Die gleichen Umformungen können jetzt auch auf die Integrale in (9.4.19) und (9.4.21) angewendet werden. Die Ableitungen nach  $x_i$  und  $t$ , die vor den Integralen stehen, bleiben von den Operationen unberührt. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 9.1 folgt für die bewegte Massenquelle

$$p'(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{\dot{\beta}(\tau_n^*)}{4\pi r |1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.23)$$

Die bewegte Impulsquelle hat als Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{f_i(\tau_n^*)}{4\pi r |1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.24)$$

Dabei müssen die retardierten Zeitpunkte  $\tau_n^*$  die Bedingung

$$c(t - \tau_n^*) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau_n^*)| \quad (9.4.25)$$

erfüllen. Mit  $N$  ist die Anzahl aller Lösungen  $\tau_n^*$  gegeben, die die Bedingung (9.4.25) erfüllen. In (9.4.23) und (9.4.24) ist zu beachten, daß auch der Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau_n^*)| \quad (9.4.26)$$

und die Beobachtungsmachzahl  $M_r$ , wie die beiden Größen  $\dot{\beta}$  und  $f_i$  zu den Quellzeiten  $\tau_n^*$  zu nehmen sind.

### Abschätzung für das Fernfeld

Durch die Ableitungen vor der Summe ist die Richtungsabhängigkeit des abgestrahlten Schalls in den beiden Lösungen für Massen- und Impulsquelle nicht so einfach ersichtlich. Um sie zu untersuchen, müssen die Ableitungen nach  $t$  beziehungsweise  $x_i$  berechnet werden. Zunächst sollen zwei nützliche Beziehungen angegeben werden. Es gilt

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.4.27)$$

und

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} = - \frac{x_i - x_{s,i}(\tau^*)}{c r (1 - M_r)} \quad (9.4.28)$$

Die beiden Gleichungen ergeben sich durch Differenzieren von (9.4.25) nach  $t$  beziehungsweise  $x_i$  und einigen Umformungen. Der Index  $n$  an der Größe  $\tau^*$  wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Die erste Gleichung wurde bereits im Abschnitt 9.2 hergeleitet und bei der Berechnung der Dopplerverschiebung verwendet.

Zuerst soll die Lösung für die bewegte Massenquelle untersucht werden. In (9.4.23) kann die Ableitung mit der Summe vertauscht werden. Betrachtet man einen einzelnen Summanden, so ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\beta} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.29)$$

zu berechnen. Durch Differenzieren des Ausdrucks ergibt sich nach der Produktregel eine Summe. Bei exakter Rechnung erhält man jedoch ein relativ unübersichtliches Resultat. Es zeigt sich, daß unter bestimmten Bedingungen zwei der Summanden mit  $1/r^2$  abfallen und einer mit  $1/r$ . Für die Richtungsabhängigkeit im Fernfeld  $r \rightarrow \infty$  ist es ausreichend nur den Anteil zu betrachten, der am schwächsten mit  $r$  abfällt.

Um eine Näherungslösung für große Abstände  $r$  zu bestimmen, werden zunächst die Ableitungen der einzelnen Faktoren in (9.4.29) untersucht. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\beta}(\tau^*) = \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \tau^*} \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \quad (9.4.30)$$

Mit der Schreibweise

$$\ddot{\beta} = \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \tau^*} \quad (9.4.31)$$

## 9 Bewegte Schallquellen

folgt daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\beta}(\tau^*) = \ddot{\beta}(\tau^*) \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.4.32)$$

Dieser Ausdruck fällt offensichtlich nicht mit dem Abstand  $r$  ab. Nach der Produktregel ist das Ergebnis noch mit dem zweiten und dritten Faktor in (9.4.29) zu multiplizieren. Insgesamt ergibt sich dann ein Ausdruck, der wegen des zweiten Faktors mit  $1/r$  skaliert.

Für die Ableitung des zweiten Faktors in (9.4.29) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \right\} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \tau^*} \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \quad (9.4.33)$$

Die Ableitung  $\partial r / \partial \tau^*$  gibt die Änderung des Beobachtungsabstandes bei Variation der Quellzeit  $\tau^*$  an. Sie entspricht damit der Komponente der Geschwindigkeit der Quelle in Richtung des Beobachters. Nach (9.2.7) gilt

$$\frac{\partial r}{\partial \tau^*} = \frac{\partial}{\partial \tau^*} |\vec{x} - \vec{x}_s| = -c M_r \quad (9.4.34)$$

Dieser Ausdruck skaliert nicht mit dem Abstand  $r$ . Man erhält die Proportionalität

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \right\} \sim \frac{1}{r^2} \quad (9.4.35)$$

Damit liefert der Summand mit der Ableitung des zweiten Faktors in (9.4.29) nur einen  $1/r^2$ -Anteil an der Gesamtlösung.

Zuletzt wird die Ableitung des dritten Faktors betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} &= \frac{1 - M_r}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial M_r}{\partial t} \\ &= \frac{1 - M_r}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial M_r}{\partial \tau^*} \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.4.36)$$

Mit der Schreibweise

$$\dot{M}_r = \frac{\partial M_r}{\partial \tau^*} \quad (9.4.37)$$

und der Beziehung (9.4.27) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} = \frac{\dot{M}_r}{|1 - M_r|^3} \quad (9.4.38)$$

Es stellt sich die Frage, wie dieser Ausdruck mit dem Abstand skaliert. Die Antwort darauf ist nicht so einfach zu geben, da  $\dot{M}_r$  entscheidend von der Bewegung der Quelle abhängt. Im Spezialfall der gleichförmig, gradlinigen Bewegung gilt

$$M_r = M_s \cos(\theta(\vec{x}, \tau^*)) \quad (9.4.39)$$

#### 9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

und die Machzahl der Quellbewegung  $M_s$  ist eine Konstante. Damit hängt  $M_r$  nur von dem Beobachtungswinkel  $\theta$  ab. Anschaulich ist klar, daß sich dieser Winkel für große Abstände  $r$  nicht so schnell ändert wie bei kleinen Abständen. Damit fällt  $\dot{M}_r$  irgendwie mit  $r$  ab.

Ist jedoch die Bewegung der Quelle nicht gradlinig, dann kann unter Umständen  $\dot{M}_r$  unabhängig vom Abstand  $r$  sein. Ein Beispiel dafür ist eine Quelle, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt. In einem Moment bewegt sich die Quelle auf den Beobachter zu und dann wieder von ihm weg. Auch für große Abstände  $r$  fällt die Rate, mit der sich die Beobachtungsmachzahl  $M_r$  ändert, nicht ab. In diesem Fall skaliert  $\dot{M}_r$  nicht mit  $r$ .

Zur Vereinfachung wird für die weiteren Überlegungen eine gleichförmig gradlinige Bewegung angenommen. Aus (9.4.39) folgt

$$\dot{M}_r = -M_s \sin(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau^*} \quad (9.4.40)$$

Betrachtet man die zeitliche Änderung des Beobachtungswinkels, ergibt sich aus geometrischen Überlegungen

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau^*} = \frac{\sin \theta}{2\pi r} |\vec{v}_s| \quad (9.4.41)$$

Die Winkeländerung ist am größten, wenn sich die Quelle gerade tangential zum Beobachter bewegt. Vergrößert sich der Abstand so fällt  $\partial \theta / \partial \tau^*$  mit  $1/r$  ab. Offensichtlich gilt für eine Quelle mit gleichförmig, gradliniger Bewegung

$$\dot{M}_r \sim \frac{1}{r} \quad (9.4.42)$$

Daraus folgt insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} \sim \frac{1}{r} \quad (9.4.43)$$

Durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit dem ersten und zweiten Faktor in (9.4.29) ergibt sich insgesamt ein Anteil, der mit  $1/r^2$  skaliert.

Somit fällt nur der Anteil, der durch Differenzieren des ersten Faktors entsteht, mit  $1/r$  ab. Alle anderen Anteile sind proportional  $1/r^2$ . Aus (9.4.32) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\dot{\beta}}{r|1 - M_r|} \right\} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\ddot{\beta}}{r|1 - M_r|(1 - M_r)} \quad (9.4.44)$$

Damit kann das resultierende Druckfeld angegeben werden. Für die punktförmige Massenquelle, die sich gleichförmig und gradlinig bewegt, ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_0 \ddot{\beta}(\tau_n^*)}{4\pi r (1 - M_r) |1 - M_r|} \quad (9.4.45)$$



## 9 Bewegte Schallquellen

Zu beachten ist, daß diese Beziehung wirklich nur für eine unbeschleunigte Quellbewegung gilt. Für diesen Spezialfall kann jetzt die Richtungsabhängigkeit des erzeugten Schallfeldes für weit entfernte Beobachter betrachtet werden. Im Vergleich zur einfachen Quelle nach (9.4.1) findet man einen zusätzlichen Faktor  $(1 - M_r)$  im Nenner. Die Richtungsabhängigkeit ist bei der bewegten Massenquelle stärker. Ist zum Beispiel  $M_r = 0.5$ , so ergibt sich nach (9.4.45) eine Verstärkung um den Faktor vier. Im Fall der bewegten einfachen Quelle beträgt der Faktor nur zwei.

### Fernfeld der bewegten Impulsquelle

Im folgenden soll auch noch die Lösung für die bewegte Impulsquelle hergeleitet werden. Dazu muß die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.46)$$

berechnet werden. Das weitere Vorgehen ist analog zu der vorherigen Herleitung. Zu beachten ist, daß die Größen  $r$  und  $M_r$  zur Quellzeit  $\tau^*$  zu nehmen sind. Diese Zeit hängt von der Beobachtersposition  $x_i$  ab. Die Größen  $r$  und  $M_r$  sind zusätzlich noch direkt von  $x_i$  abhängig. Dadurch ergeben sich etwas kompliziertere Ausdrücke als im Fall der Massenquelle. Die Ableitung des ersten Faktors in (9.4.46) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_i(\tau^*) = \frac{\partial f_i}{\partial \tau^*} \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} = \dot{f}_i \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \quad (9.4.47)$$

mit der Schreibweise

$$\dot{f}_i = \frac{\partial f_i}{\partial \tau^*} \quad (9.4.48)$$

Für den zweiten Faktor erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{r(\vec{x}, \tau^*)} \right\} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ r(\vec{x}, \tau^*) \} \quad (9.4.49)$$

Es wird die Ableitung von  $r(\vec{x}, \tau^*)$  nach  $x_i$  benötigt. Für diese ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ r(\vec{x}, \tau^*) \} &= \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| = \left. \frac{\partial r}{\partial x_i} \right|_{\tau^*} + \left. \frac{\partial r}{\partial \tau^*} \right|_{\vec{x}} \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \\ &= \frac{x_i - x_{s,i}}{r} - cM_r \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (9.4.50)$$

Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{r} \right\} = -\frac{x_i - x_{s,i}}{r^3} + \frac{cM_r}{r^2} \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \quad (9.4.51)$$

#### 9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

Die Ableitung  $\partial\tau^*/\partial x_i$  skaliert nach (9.4.28) nicht mit dem Abstand. Es gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{r(\vec{x}, \tau^*)} \right\} \sim \frac{1}{r^2} \quad (9.4.52)$$

Als letztes muß noch die Ableitung des dritten Faktors gebildet werden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} = \frac{1 - M_r}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \{M_r(\vec{x}, \tau^*)\} \quad (9.4.53)$$

Im folgenden wird wieder nur der Fall einer gleichförmig, gradlinigen Bewegung der Quelle betrachtet. Das heißt, es gilt (9.4.39) mit einem konstanten Wert  $M_s$ . Damit ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{M_r(\vec{x}, \tau^*)\} = -M_s \sin(\theta) \left\{ \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \Big|_{\tau^*} + \frac{\partial\theta}{\partial\tau^*} \Big|_{\vec{x}} \frac{\partial\tau^*}{\partial x_i} \right\} \quad (9.4.54)$$

Die Summanden in der geschweiften Klammer fallen beide mit dem Abstand ab. Aus (9.4.41) folgt, daß der zweite Summand mit  $1/r$  skaliert. Die Ableitung  $\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \Big|_{\tau^*}$  wurde bisher noch nicht betrachtet. Aus geometrischen Gründen ist jedoch klar, daß die Winkeländerung durch eine Verschiebung des Beobachtungsortes bei fester Quellposition umgekehrt proportional zum Abstand  $r$  ist. Damit gilt für große Abstände

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{M_r(\vec{x}, \tau^*)\} \sim \frac{1}{r} \quad (9.4.55)$$

Die Ableitung (9.4.46) liefert daher nur einen Anteil, der mit  $1/r$  skaliert. Die anderen beiden fallen mit  $1/r^2$  ab. Für große Abstände ist nur der Anteil, der sich durch die Ableitung des ersten Faktors ergibt, zu berücksichtigen. Multipliziert man die rechte Seite von (9.4.47) mit den zweiten und dritten Faktor ergibt sich unter Berücksichtigung von (9.4.28)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{f_i}{r|1 - M_r|} \right\} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\frac{1}{c} \dot{f}_r}{r(1 - M_r)|1 - M_r|} \quad (9.4.56)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$f_r = f_i \cdot \frac{(x_i - x_{s,i})}{|\vec{x} - \vec{x}_s|} = \vec{f} \cdot \frac{(\vec{x} - \vec{x}_s)}{|\vec{x} - \vec{x}_s|} \quad (9.4.57)$$

verwendet. Die Größe  $f_r$  entspricht – analog zu  $M_r$  – der Komponente der Impulsquelle in Richtung des Beobachters.

Für die Druckverteilung der gleichförmig, gradlinig bewegten Impulsquelle erhält man für große Abstände schließlich die Druckverteilung

$$p'(\vec{x}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{n=1}^N \frac{\dot{f}_r(\tau_n^*)/c}{4\pi r (1 - M_r) |1 - M_r|} \quad (9.4.58)$$

## 9 Bewegte Schallquellen

<p>a) Einfache Quelle (rein formal)</p> $q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t))$ $p'(\vec{x}, t) \sim \frac{1}{1 - M_r}$
<p>b) Massen- und Impulsquelle</p> $q(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}$ $p'(\vec{x}, t) \sim \frac{1}{(1 - M_r)^2}$
<p>c) Quadrupol-Quelle</p> $q(\vec{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ T_{ij}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}$ $p'(\vec{x}, t) \sim \frac{1}{(1 - M_r)^3}$

Tabelle 9.1: Abhängigkeit des Schalldrucks im Fernfeld von der Beobachtungsmachzahl: Gegenüberstellung der verschiedenen Quelltypen; b) und c) bei gleichförmig gradliniger Bewegung.

Die Richtungsabhängigkeit dieser Lösung ist nicht nur durch die  $(1 - M_r)$ -Terme im Nenner gegeben, sondern auch  $\dot{f}_r$  hängt von der Beobachtungsrichtung ab. Dabei ist die Richtung des zugeführten Impulses ausschlaggebend. Senkrecht zu dieser Richtung wird kein Schall abgestrahlt. Daran ändern auch die Verstärkung beziehungsweise Abschwächung durch die Bewegung der Quelle nichts. Eine unbewegte Impulsquelle erzeugt ein Dipolfeld. Die Richtungsabhängigkeit des Dipolfeldes wird mit der Verstärkung beziehungsweise Abschwächung durch Bewegung überlagert.

Um einen Überblick zu geben, sind für die verschiedenen Quelltypen die Abhängigkeiten des Schalldrucks im Fernfeld von der Beobachtungsmachzahl  $M_r$  in der Tabelle 9.1 zusammengefaßt. Zu beachten ist, daß die Proportionalitäten in b) und c) nur für den Fall der gleichförmig, gradlinigen Bewegung gelten. Die Formel für den punktförmigen Quadrupol in c) wird hier nur angegeben und nicht hergeleitet.

**Beschleunigt bewegte Massenquelle**

Die Lösungen (9.4.45) und (9.4.58) werden durch die instationäre Massen- und Impulszufuhr bestimmt. Falls  $\ddot{\beta} = 0$  und  $\dot{f}_r = 0$  sind, ergeben sich bei gleichförmig, gradlinigen Bewegung der Quellen nur Druckfelder, die mit  $1/r^2$  abfallen. Dies ändert sich jedoch bei beschleunigter Bewegung der Quelle. Dann gilt die Proportionalität (9.4.42) nicht mehr. Der Ausdruck in Gleichung (9.4.38) fällt nicht mehr notwendigerweise mit  $1/r$  ab. Damit dominiert der entsprechende Summand die Lösung. In dem Fall  $\ddot{\beta} = 0$  ergibt sich für eine bewegte Massenquelle das Druckfeld

$$p'(\vec{x}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_0 \dot{\beta}(\tau_n^*) \dot{M}_r}{4\pi r |1 - M_r|^3} \quad (9.4.59)$$

Für eine unbeschleunigte Bewegung ist im Fernfeld  $\dot{M}_r \sim 1/r$ , und der Ausdruck in (9.4.59) fällt mit  $1/r^2$  ab. Wird jedoch die Massenquelle zum Beispiel entlang einer Geraden periodisch hin- und herbewegt, ist  $\dot{M}_r$  in Richtung der Bewegung unabhängig von  $r$ . Der Schalldruck fällt dann mit  $1/r$  im Fernfeld ab.

Anschaulich bedeutet dies, daß eine punktförmige Massenquelle mit zeitlich konstantem Massenfluß nur effizient Schall abstrahlt, wenn sich die Quelle beschleunigt bewegt. Bei einer ruhenden oder eine gleichförmig, gradlinig bewegten Massenquelle führt nur die instationäre Schwankung des Massenflusses zu einer Schallabstrahlung ins Fernfeld.