

8 Schallfeld mit Berandung

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

In den vorherigen Abschnitten wurde fast immer davon ausgegangen, daß die Schallfelder keine Berandungen besitzen. Dann läßt sich die Lösung als Integral über die Quellstärkeverteilung multipliziert mit einer einfachen Greenschen Funktion darstellen. Sind jedoch Berandungen – wie zum Beispiel feste Körper – vorhanden, so müssen dort Randbedingungen erfüllt werden. Die Lösung wird dadurch deutlich komplizierter.

Bereits im 19-ten Jahrhundert wurden die theoretischen Grundlagen entwickelt, die dazu notwendig sind, Schallfelder mit Berandungen zu behandeln. Im folgenden sollen die wichtigsten dieser Erkenntnisse vorgestellt werden. Die formale Beschreibung orientiert sich dabei an den mathematischen Darstellungen aus dem 19-ten Jahrhundert. Es wird hier absichtlich auf neuere Elemente – wie etwa die Dirac'sche Deltafunktion – verzichtet. Dadurch werden die Herleitungen zwar etwas umfangreicher, aber die klassische Beschreibung ist im Vergleich zu den Umformungen mit Deltafunktionen etwas anschaulicher.

Die folgenden Überlegungen beginnen bei der homogene Wellengleichung. Sie lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (8.1.1)$$

Die Größe ϕ kann zunächst als ein Stellvertreter für sämtliche Größen, die die Wellengleichung in der gegebenen Form erfüllen, angesehen werden. Die vorgestellten Beziehungen gelten allgemein über das Gebiet der Akustik hinaus. Erst später wird ϕ wieder als akustisches Potential betrachtet.

Untersucht man die Lösung der Wellengleichung für eine Frequenz, kann der harmonische Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.2)$$

verwendet werden. Die Größe $\varphi(\vec{x})$ stellt die komplexe Amplitude des Feldes $\phi(\vec{x}, t)$ dar. Setzt man den harmonischen Ansatz in die Wellengleichung ein, ergibt sich mit

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (8.1.3)$$

die Helmholtz-Gleichung. Dabei ist $k = \omega/c$ wie üblich die Wellenzahl. Eine elementare

8 Schallfeld mit Berandung

Lösung der Wellengleichung sind die Kugelwellen. Ein einfaches Beispiel ist mit

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} = \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} e^{i\omega t} \quad (8.1.4)$$

gegeben. Zur Abkürzung wird der Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0| \quad (8.1.5)$$

verwendet. Das Feld (8.1.4) erfüllt die Wellengleichung überall außer an der Stelle \vec{x}_0 . Dort wird $r = 0$, und die Lösung besitzt eine Singularität.

Auf der rechten Seite von (8.1.4) ist bereits der $e^{i\omega t}$ -Term abgespalten. Für die komplexe Amplitude ergibt sich bei dieser Lösung

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (8.1.6)$$

Dies stellt eine Elementarlösung der Helmholtz-Gleichung (8.1.3) dar. Die weiteren Untersuchungen basieren im Wesentlichen auf dieser Lösung.

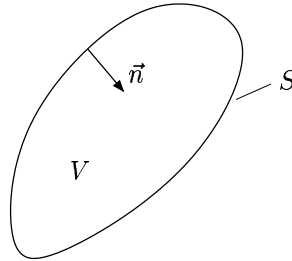


Abbildung 8.1: Volumen V mit Oberfläche S und nach innen zeigenden Normalenvektor \vec{n} .

Es wird ein abgeschlossenes Volumen V mit der Oberfläche S betrachtet. Auf der Oberfläche wird der Normalenvektor \vec{n} nach innen zeigend definiert. Die geometrische Situation ist in Abbildung 8.1 skizziert. Sind die Felder $\varphi_1(\vec{x})$ und $\varphi_2(\vec{x})$ überall in V gegeben, so können mit den Integralsätzen von Green Zusammenhänge zwischen jeweils einem Volumen und einem Oberflächenintegral hergestellt werden. Insbesondere liefert der zweite Greensche Integralsatz die allgemeine Aussage

$$\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS = \int_V (\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2) dV \quad (8.1.7)$$

Dabei ist mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \text{ grad } \varphi \quad (8.1.8)$$

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

die Normalableitung eines Feldes φ an der Oberfläche in Richtung von \vec{n} dargestellt. Voraussetzung für (8.1.7) ist lediglich, dass φ_1 und φ_2 zweimal differenzierbar sind.

Erfüllen die Felder φ_1 und φ_2 überall in V zusätzlich auch die Helmholtz-Gleichung (8.1.2), dann gilt

$$\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2 = \varphi_2 (-k^2 \varphi_1) - \varphi_1 (-k^2 \varphi_2) = 0 \quad (8.1.9)$$

Damit verschwindet das Integral auf der rechten Seite von (8.1.7). Es folgt

$$\int_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS = \int_S \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \quad (8.1.10)$$

Diese Beziehung gilt für alle Paare φ_1, φ_2 von Lösungen der Helmholtz-Gleichung. Im folgenden wird für φ_2 eine bestimmte Lösung – und zwar die Elementarlösung (8.1.6) – eingesetzt. Es wird

$$\varphi_2(\vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (8.1.11)$$

gewählt. Dies spezielle Feld φ_2 erfüllt überall außer im Punkt \vec{x}_0 , an dem $r = 0$ wird, die Helmholtz-Gleichung.

Zunächst wird der Fall betrachtet, daß der Punkt \vec{x}_0 außerhalb des Volumens V liegt. Dann ist φ_2 überall in V eine Lösung, und die Bedingung (8.1.10) gilt. Es folgt für alle Lösungen φ_1 die Gleichung

$$\int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \quad (8.1.12)$$

Liegt der Punkt \vec{x}_0 jedoch innerhalb des Volumens V , so ist φ_2 zumindest in einem Punkt nicht definiert und damit auch keine Lösung. Die Voraussetzung für (8.1.10) ist dann nicht mehr erfüllt. Es läßt sich jedoch eine wertvolle Beziehung herleiten, wenn man das Volumen V so modifiziert, daß der Punkt \vec{x}_0 herausfällt. Dazu wird eine kleine Kugel mit dem Radius a um den Punkt \vec{x}_0 aus dem Volumen V herausgeschnitten. Es ergibt sich ein neues Volumen

$$V_{\text{neu}} = V - V_{\text{K}} \quad (8.1.13)$$

wobei V_{K} das Volumen der kleinen Kugel bezeichnet. Die Situation ist in Abbildung 8.2 illustriert.

Die Oberfläche der neuen Volumens besteht aus der Oberfläche S und der Kugeloberfläche S_{K} . Man kann sich zusätzlich einen unendlich dünnen Schlauch zwischen den beiden Teilen der Oberfläche vorstellen, wie er gestrichelt in Abbildung 8.2 angedeutet ist. Damit ergibt sich eine einfach zusammenhängende Oberfläche. Dieser Teil der Oberfläche ist jedoch bei folgenden Überlegungen nicht von Bedeutung, denn bei einer Oberflächenintegration liefert er keinen Beitrag. Für die neue Oberfläche kann

$$S_{\text{neu}} = S + S_{\text{K}} \quad (8.1.14)$$

8 Schallfeld mit Berandung

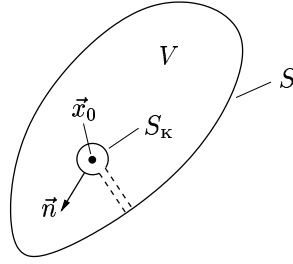


Abbildung 8.2: Volumen V mit herausgeschnittener Kugel um \vec{x}_0 und Oberflächen S des Volumens V und S_k der Kugel.

geschrieben werden.

Der Punkt \vec{x}_0 liegt außerhalb des konstruierten Volumens V_{neu} . Damit ist Gleichung (8.1.12) wieder erfüllt, wenn man die Oberfläche S durch S_{neu} ersetzt. Wird dies durchgeführt und werden die Oberflächenintegrale über S_{neu} in zwei Teilintegrale über S und S_k aufgespalten, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS + \int_{S_k} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS_k \\ = \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS + \int_{S_k} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS_k \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

Die S_k -Teilintegrale über die Kugeloberfläche lassen sich berechnen, wenn man die Kugel beliebig klein macht. Dies ist erlaubt, denn der Punkt \vec{x}_0 bleibt dabei immer außerhalb von V_{neu} . Es wird angenommen, daß φ_1 und auch seine Ableitungen überall stetig und beschränkt sind. Dies ist vernünftig, denn φ_1 ist nach Voraussetzung eine Lösung der Helmholtz-Gleichung und zweimal differenzierbar. Zuerst wird das S_k -Teilintegral auf der linken Seite von (8.1.15) betrachtet. Dort tritt die Normalableitung der Elementarlösung auf. Auf der Kugel gilt der Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (8.1.16)$$

denn der Normalenvektor \vec{n} zeigt überall in die Richtung von r . Für die radiale Ableitung der Elementarlösung gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = - \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right) e^{-ikr} \quad (8.1.17)$$

Damit kann die Normalableitung im Integranden ersetzt werden. Dieser Anteil des Integranden wird singulär, wenn $a \rightarrow 0$ geht. Gleichzeitig geht jedoch auch die Oberfläche gegen Null. Der Wert von φ_1 konvergiert überall auf der Oberfläche gegen den

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Wert $\varphi_1(\vec{x}_0)$. Insgesamt erhält man

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS_K = \lim_{a \rightarrow 0} \left[-4\pi a^2 \left(\frac{1}{a^2} + i \frac{k}{a} \right) e^{-ika} \right] \varphi_1(\vec{x}_0) = -4\pi \varphi_1(\vec{x}_0) \quad (8.1.18)$$

Die Abnahme der Kugeloberfläche $4\pi a^2$ hebt gerade die $1/a^2$ -Singularität auf, und es ergibt sich ein endlicher Grenzwert.

Im S_K -Teilintegral auf der rechten Seite kommt die Normalableitung des Feldes φ_1 vor. Sie ist beschränkt. Diesmal wird der erste Faktor im Integral singular für $a \rightarrow 0$. Jedoch reicht die $1/a$ -Singularität nicht aus um die Abnahme der Oberfläche mit a^2 auszugleichen. Es gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[4\pi a^2 \frac{e^{-ika}}{a} \right] = 0 \quad (8.1.19)$$

Wegen der Beschränktheit von $\partial\varphi_1/\partial n$ folgt unmittelbar

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS_K = 0 \quad (8.1.20)$$

Die beiden berechneten S_K -Teilintegrale können nun in Gleichung (8.1.15) eingesetzt werden. Werden die verbleibenden Integrale auf eine Seite gebracht, folgt der Zusammenhang

$$\int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS - \int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{x}_0 \notin V \\ -4\pi\varphi_1(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in V \end{cases} \quad (8.1.21)$$

Die Oberflächenintegrale auf der linken Seite ergeben entweder Null oder den Wert $-4\pi\varphi_1(\vec{x}_0)$ je nachdem, ob \vec{x}_0 außerhalb oder innerhalb des Volumens V liegt. Falls der Punkt \vec{x}_0 genau am Rand liegt, ist die Gleichung (8.1.21) nicht anwendbar. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß bei glatter Oberfläche S (ohne Knick) sich gerade $-2\pi\varphi_1(\vec{x}_0)$ ergibt. Hier wird jedoch zunächst der Fall $\vec{x}_0 \in S$ ausgeschlossen.

Die Beziehung (8.1.21) gilt unter der Voraussetzung, daß φ_1 überall in V eine Lösung der Helmholtz-Gleichung (8.1.3) ist. Es ist damit möglich jede Lösung innerhalb der Volumens durch ein Integral über die Oberfläche darzustellen. Wird (8.1.21) nach φ_1 aufgelöst und der Index weggelassen, ergibt sich

$$\varphi(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS \quad (8.1.22)$$

Diese Formel wird üblicherweise als Kirchhoff-Helmholtz-Integral bezeichnet.

Interpretation

Die Oberflächenintegrale in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel lassen sich anschaulich interpretieren. Dazu wird ein Vergleich mit der Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = q(\vec{x}, t) \quad (8.1.23)$$

angestellt. Ohne Berandung kann die Lösung an einer Stelle \vec{x}_0 mit

$$\phi(\vec{x}_0, t) = \int_{V_Q} \frac{q(\vec{x}, t - r/c)}{4\pi r} d^3 \vec{x} \quad (8.1.24)$$

angegeben werden. Dabei ist der Abstand

$$r = |\vec{x}_0 - \vec{x}| \quad (8.1.25)$$

definiert. Im harmonischen Fall mit

$$q(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.26)$$

ergibt sich

$$\phi(\vec{x}_0, t) = \int_{V_Q} Q(\vec{x}) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{4\pi r} d^3 \vec{x} = e^{i\omega t} \frac{1}{4\pi} \int_{V_Q} Q(\vec{x}) \frac{e^{-ikr}}{r} d^3 \vec{x} \quad (8.1.27)$$

Damit ist die komplexe Amplitude der Feldes $\phi(\vec{x}_0, t)$ durch

$$\varphi(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_Q} Q(\vec{x}) \frac{e^{-ikr}}{r} d^3 \vec{x} \quad (8.1.28)$$

gegeben. Dies kann als Integral über Kugelwellen, die von Monopolen an den Quellpositionen \vec{x} ausgehen, angesehen werden. Die Stärke der Kugelwellen ist durch die Quellstärke $Q(\vec{x})$ gegeben.

Die Lösung (8.1.28) ist mit dem ersten Integral in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) vergleichbar, obwohl dort über eine Fläche und kein Volumen integriert wird. Es wird ebenfalls eine Überlagerung von Monopolfeldern gebildet. Die Monopole gehen von den Punkten auf der Oberfläche S aus. Die Stärke der Monopole ist durch die Ableitung $\partial\varphi/\partial n$ an der jeweiligen Ausgangsposition gegeben. In dem zweiten Integral tritt die Ableitung der Elementarlösung – des Monopolfeldes – in Normalenrichtung auf. Daraus resultiert ein Dipolfeld, welches senkrecht zur Oberfläche orientiert ist. Das zweite Integral stellt demnach eine Überlagerung von Dipolfeldern, die von den Punkten auf der Oberfläche ausgehen, und deren Stärke durch das Feld φ an der jeweiligen Ausgangsposition gegeben ist.

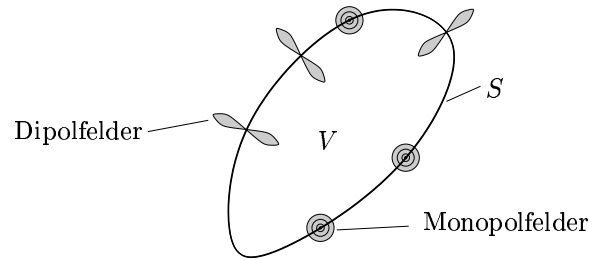


Abbildung 8.3: Illustration zur Überlagerung von Monopol- und Dipolfeldern, die von der Oberfläche S ausgehen.

Die Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) besagt folglich, daß jede Lösung φ der Helmholtz-Gleichung in dem Volumen V durch eine Überlagerung von Monopol- und Dipolfeldern, die vom Rand des Volumens ausgehen, gebildet werden kann. In Abbildung 8.3 wird dies veranschaulicht. Jede Lösung im Inneren von V läßt sich also durch eine Quellverteilung am Rand darstellen. Dabei spielt es überhaupt keine Rolle, was außerhalb des Volumens passiert. Es können dort echte Quellen und auch Berandungen, an denen die Wellen reflektiert werden, vorhanden sein. Bei den in Gleichung (8.1.22) vorkommenden Quellen handelt es sich sozusagen um virtuelle Quellen, die den Einfluß des gesamten Außenbereichs auf die Lösung im Volumen V ersetzen. In jedem Fall läßt sich mit der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) die Lösung, wenn sie am Rand bekannt ist, auch im gesamten Innenbereich von V berechnen.

Unendlich ausgedehnte Volumen

Bisher wurde immer ein abgeschlossenes Volumen V betrachtet. Es ist jedoch auch möglich, die Kirchhoff-Helmholtz-Formel auf unendlich ausgedehnte Volumen anzuwenden. In Abbildung 8.4 sind zwei Beispiele skizziert. In Teil a) entspricht V einem Halbraum. Die Oberfläche S ist eine Ebene. Damit die Kirchhoff-Helmholtz-Formel angewendet werden kann, muß eigentlich die Oberfläche geschlossen sein. Dies kann man sich so vorstellen, daß sich die Oberfläche – in der Abbildung gestrichelt angedeutet ist – im Unendlichen schließt. Der im unendlichen liegende Teil wird jedoch bei der Integration weggelassen. Voraussetzung für die Gültigkeit der Kirchhoff-Helmholtz-Formel ist dann, daß die Lösung im Unendlichen mit $1/R$ abklingt. Sie muß asymptotisch gegen die Form

$$\varphi = C \frac{e^{-ikR}}{R} \quad \text{für } R \rightarrow \infty \quad (8.1.29)$$

gehen, wobei C eine feste konstante und R der Abstand vom Ursprung ist. Damit liefert der im Unendlichen liegende Teil der Oberfläche keinen Beitrag zu den Integralen.

8 Schallfeld mit Berandung

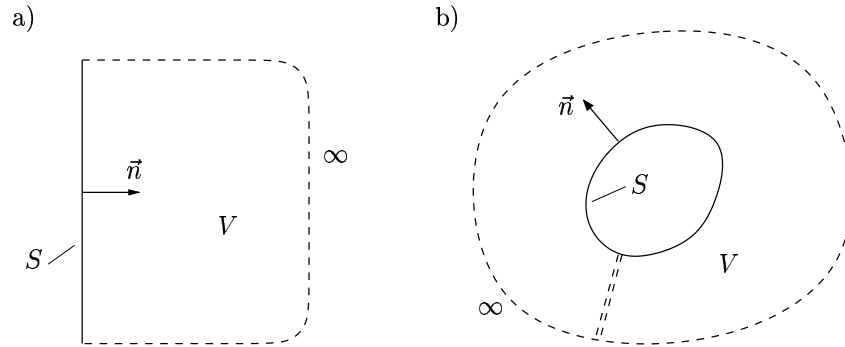


Abbildung 8.4: Beispiele für unendlich ausgedehnte Volumina: a) Halbraum; b) Außenraum um eine geschlossene Oberfläche.

Praktisch sind dadurch alle Fälle mit Quellen im Unendlichen ausgeschlossen. Auch eine ebene Welle, die im Unendlichen nicht abklingt, ist nicht zulässig. Wird die Bedingung (8.1.29) erfüllt, kann die Kirchhoff-Helmholtz-Formel auch bei der in Abbildung 8.4b dargestellten Geometrie angewendet werden. Dort ist die Oberfläche S geschlossen und V entspricht dem gesamten Außenraum. Wieder kann man sich S ins Unendliche fortgesetzt denken. Der Weggelassene Teil liefert jedoch wie im vorigen Beispiel keinen Beitrag bei den Integrationen.

Anwendung in der Akustik

Bisher sind die Überlegungen allgemein unabhängig von einer physikalischen Anwendung vorgestellt worden. Im folgenden sollen die Erkenntnisse auf die Akustik übertragen werden. Es wird angenommen ϕ ist das akustische Potential. Mit dem harmonischen Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.30)$$

wird die komplexe Amplitude $\varphi(\vec{x})$ des akustischen Potentials definiert. Wie gewohnt, führt man auch für die physikalischen Größen komplexe Amplituden ein. Es sollen für Druck und Schnelle die Ansätze

$$p = \hat{p} e^{i\omega t} \quad (8.1.31)$$

und

$$v'_i = \hat{v}_i e^{i\omega t} \quad (8.1.32)$$

gelten. Dabei ist \hat{p} die Druckamplitude und \hat{v}_i die Amplitude der i -ten Schnellekomponente. Die Schnelle \vec{v}' berechnet sich als Gradient der Potentials mit

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \quad (8.1.33)$$

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Damit folgt für die Schnelleamplitude

$$\hat{v}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \quad (8.1.34)$$

Auch der Druck ist mit dem akustischen Potential verknüpft. Es gilt

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -i\omega \rho_0 \varphi e^{i\omega t} \quad (8.1.35)$$

wobei die zweite Gleichheit aus dem harmonischen Ansatz folgt. Entsprechend kann die Druckamplitude mit

$$\hat{p} = -i\omega \rho_0 \varphi \quad (8.1.36)$$

aus dem Feld φ berechnet werden. Zweckmäßigerweise wird noch die Normalkomponente der Schnelle mit

$$v'_n = \vec{v}' \cdot \vec{n} \quad (8.1.37)$$

eingeführt. Auch sie schwingt harmonisch entsprechend dem Ansatz

$$v'_n = \hat{v}_n e^{i\omega t} \quad (8.1.38)$$

Es gilt

$$v'_n = \text{grad}(\phi) \cdot \vec{n} \quad (8.1.39)$$

Daraus ergibt sich

$$\hat{v}_n = \text{grad}(\varphi) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (8.1.40)$$

Mit dieser Vorbereitung lassen sich die in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel benötigten physikalischen Größen identifizieren. Um das Feld φ zu bestimmen muß auf der Oberfläche φ und $\partial\varphi/\partial n$ bekannt sein. Erstere läßt sich gemäß (8.1.36) aus der Druckamplitude bestimmen. Die zweite Größe entspricht der Amplitude der Schnelle normal zur Oberfläche. Ist also Druck und Schnelle auf der Oberfläche bekannt, so kann das gesamte Feld φ – und damit auch wieder die physikalischen Größen – im gesamten Volumen V berechnen.

Eine Anwendung für die Kirchhoff-Helmholtz-Formel ist zum Beispiel die Berechnung des Schallfeldes eines abstrahlenden Körpers im unbegrenzten Raum. Dabei kann es sich um eine atmende Kugel, eine Lautsprecherbox oder um eine vibrierende Maschine handeln. Durch die bewegte Oberfläche wird Schall erzeugt. Das Volumen V wird so gewählt, daß die Oberfläche S der mittleren Position der Körperoberfläche entspricht. Die Bewegung der Körperoberfläche gibt die Normalkomponente v'_n der Schnelle vor. Um das entstehende Schallfeld berechnen zu können, muß noch der Druck auf der Oberfläche bekannt sein. Die vorgegebene Schnelle allein reicht nicht aus. Zudem kann mit der Kirchhoff-Helmholtz-Formel immer nur eine einzelne Frequenz untersucht werden.

Vereinfachung der Integration

Unter bestimmten Umständen ist es möglich, daß Kirchhoff-Helmholtz-Integral zu vereinfachen. Die Lösung im Volumen V kann dann als Oberflächenintegral mit nur einen Quelltyp allein – entweder Monopol- oder Dipolquellen – ausgedrückt werden. Im folgenden wird die Herleitung der entsprechenden Formeln vorgestellt.

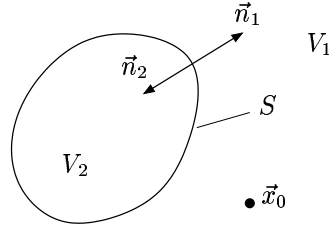


Abbildung 8.5: Äußeres Volumen V_1 und das durch die Oberfläche S eingeschlossene Volumen V_2 .

Es wird ein Feld $\varphi_1(\vec{x})$ betrachtet, welches überall in dem Volumen V_1 die Helmholtz-Gleichung erfüllt. Die Oberfläche des Volumens ist mit S bezeichnet, und \vec{n}_1 ist der nach innen zeigende Normalenvektor. Nach der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) kann φ_1 an allen Punkten $\vec{x}_0 \in V_1$ durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt werden. Es gilt

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \varphi_1(\vec{x}_0) \quad (8.1.41)$$

Das Volumen $V_2 = \mathbb{R}^3 - V_1$ sei der restliche Teil des Raumes außerhalb von V_1 . Die beiden Volumen sind durch die Oberfläche S getrennt. Die Situation ist die Abbildung 8.5 dargestellt. Mit \vec{n}_2 ist der ins Innere von V_2 zeigende Normalenvektor bezeichnet. Mindestens eines der beiden Volumen ist unendlich ausgedehnt. In dem gezeigten Beispiel ist dies V_1 . Damit in diesem Fall auch (8.1.41) gültig ist, muß das Feld φ_1 zusätzlich noch die Bedingung (8.1.29) erfüllen und im unendlichen mit $1/R$ abklingen.

Es sei ein Feld $\varphi_2(\vec{x})$ gegeben, welches überall im Volumen V_2 die Helmholtz-Gleichung erfüllt. Es läßt sich dann eine zu (8.1.41) analoge Beziehung für diese Lösung aufstellen. Der Punkt \vec{x}_0 liegt jedoch außerhalb des Volumens V_2 . Entsprechend folgt aus (8.1.21) einfach

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_2 \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = 0 \quad (8.1.42)$$

Das Oberflächenintegral über die Quellterme ergibt Null. Auf den linken Seiten von (8.1.41) und (8.1.42), treten jeweils zwei Oberflächenintegrale über S auf. Addiert man

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

die beiden Gleichungen können die Integrale zusammengefaßt werden. Dazu wird im zweiten Teilintegral von einer Bedingung zwischen den Normalableitungen Gebrauch gemacht. Da sich \vec{n}_1 und \vec{n}_2 genau gegenüberstehen, gilt

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial n_2} \quad (8.1.43)$$

Es ergibt sich durch Addition

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_S (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \varphi_1(\vec{x}_0) \quad (8.1.44)$$

Mit dieser Beziehung ist das Feld φ_1 im Volumen V_1 – genau wie durch (8.1.41) – durch ein Oberflächenintegral über S ausgedrückt. Das Integral stellt wieder eine Überlagerung von Monopol- und Dipolfeldern dar. Jedoch unterscheidet sich die Stärke der Felder von denen in (8.1.41). Die Verteilung der Monopol- und Dipolfelder auf der Oberfläche S , die überlagert die Lösung φ_1 ergeben, ist anscheinend nicht eindeutig. Es existieren mehrere Quellstärkeverteilungen auf S , die das gleiche Feld $\varphi_1(\vec{x})$ in V_1 erzeugen.

Ein besonders interessanter Fall ergibt sich, wenn die beiden Felder φ_1 und φ_2 an der Oberfläche S die gleichen Werte besitzen:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{auf } S \quad (8.1.45)$$

Dann verschwindet die Stärke der Dipolfelder im zweiten Integral. Die Beziehung (8.1.43) vereinfacht sich zu

$$\varphi_1(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \right) dS \quad (8.1.46)$$

Das bedeutet, die Lösung φ_1 ist allein durch eine Überlagerung von Monopolfeldern ausgedrückt worden. Die Stärke der Felder ist durch die Summe der Normalableitungen in der runden Klammer gegeben.

Ein ähnliches Resultat ergibt sich, wenn die beide Lösungen φ_1 und φ_2 die gleiche Normalableitung an der Oberfläche S besitzen. Das heißt, es soll

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \quad \text{auf } S \quad (8.1.47)$$

gelten. In diesem Fall erhält man

$$\varphi_1(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS \quad (8.1.48)$$

8 Schallfeld mit Berandung

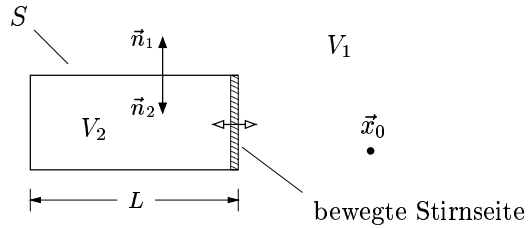


Abbildung 8.6: Rohr der Länge L mit bewegter Stirnseite.

Damit ist die Lösung φ_1 durch eine reine Überlagerung aus Dipolfeldern ohne Monopolfelder dargestellt. Die Stärke der Dipolfelder ist durch die Differenz $(\varphi_1 - \varphi_2)$ auf S gegeben.

Auf den ersten Blick scheinen die beiden Beziehungen (8.1.46) und (8.1.48) besonders für praktische Berechnungen interessant zu sein, da im Vergleich zu (8.1.41) der Integralausdruck weniger aufwendig ist. Jedoch muß für die Anwendung eine Lösung φ_2 in V_2 gefunden werden, die die Eigenschaft (8.1.45) beziehungsweise (8.1.47) besitzt. Im Allgemeinen ist dies nicht so einfach. Eine genauere Betrachtung zeigt sogar, daß eine solche Lösung φ_2 unter Umständen gar nicht existiert. Dies soll an einem Gegenbeispiel verdeutlicht werden. Es wird ein abgeschlossenes Rohr der Länge L mit einer bewegten Stirnseite betrachtet. Die Seitenwände sowie die zweite Stirnseite sind unbeweglich. Die Anordnung ist in Abbildung 8.6 in einem Schnitt dargestellt. Das Volumen V_1 ist der gesamte Außenbereich und V_2 entspricht dem Inneren des Rohrs. Die Oberfläche S stimmt mit der Rohroberfläche überein. Im Bereich der bewegten Stirnseite liegt S in der mittleren Position.

Es wird eine harmonische Bewegung der Stirnseite vorgegeben. Damit ist die Schnelle überall auf der Oberfläche S festgelegt. Auch der Druck auf der Rohroberfläche wird als bekannt vorausgesetzt. Ist φ_1 die komplexe Amplitude des akustischen Potentials im Außenbereich, so kann φ_1 und $\partial\varphi_1/\partial n_1$ auf der Oberfläche aus den komplexen Amplituden \hat{p} und \hat{v}_n bestimmt werden. Es soll die Lösung φ_1 im Außenbereich durch eine Dipolüberlagerung der Form (8.1.48) ausgedrückt werden. Dazu muß eine Lösung φ_2 im Innenbereich gefunden werden, die die Bedingung (8.1.47) erfüllt. In dem akustischen Beispiel bedeutet dies, es muß ein Schallfeld im Rohrinnen berechnet werden. Die Bedingung (8.1.47) besagt, daß die Normalkomponente der Schnelle der Schallfelder im Innen und Außenbereich übereinstimmt. Die feste Rohrwand und die bewegte Stirnseite legen die Normalkomponente der Schnelle fest. Für das innere Schallfeld ergibt sich eine quasi-eindimensionale Situation. Die Lösung im Inneren besteht aus einer geeigneten Überlagerung von hin- und herlaufenden ebenen Wellen. Die Stirnseite kann als Kolben angesehen werden, der stehende Wellen im Rohr anregt. Dabei können allerdings Resonanzen auftreten, wenn die Wellenlänge λ gerade einem vielfachen der halben Rohrlänge $L/2$ entspricht. In diesem Fall kommt es zu einer Resonanzkatastrophe und die innere Lösung "explodiert". Es läßt sich für die

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

vorgegebene Schnelle an der Oberfläche dann kein Schallfeld im Rohrinernen finden. Das bedeutet, es existiert keine Lösung φ_2 , welche die Bedingung (8.1.47) erfüllt.

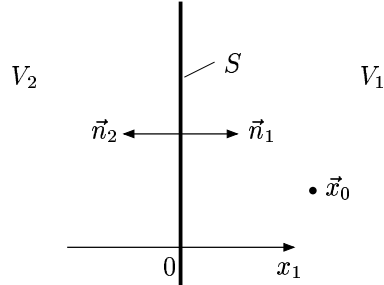


Abbildung 8.7: Die Ebene $x_1 = 0$ als Oberfläche S mit den Volumen V_1 und V_2 als Halbräume $x_1 > 0$ und $x_1 < 0$.

Auch wenn das Volumen V_2 keine so einfache Form wie in dem betrachteten Gegenbeispiel hat, kann es zu Resonanzen im Inneren kommen. Im Allgemeinen wird daher die Anwendung der vereinfachten Integration mit (8.1.46) oder (8.1.48) nicht immer möglich sein. Zudem muß die Lösung im Volumen V_2 auch berechnet werden, was unter Umständen sehr aufwendig ist. Es gibt jedoch Fälle in denen eine passende Lösung sozusagen automatisch gegeben ist. Ein solches Beispiel ist in Abbildung 8.7 skizziert. Die Oberfläche S entspricht der Ebene $x_1 = 0$. Die Volumen V_1 und V_2 stellen die Halbräume $x_1 > 0$ und $x_1 < 0$ dar. Die Normalenvektoren zeigen in beziehungsweise entgegen der x_1 -Richtung. Das Feld φ_1 sei eine Lösung der Helmholtz-Gleichung in dem Bereich $x_1 > 0$. Zusätzlich klingt es mit $1/R$ im Unendlichen ab und erfüllt die Bedingung (8.1.29). Für alle Punkt \vec{x}_0 , die – wie das Beispiel in Abbildung 8.6 – in dem Bereich V_1 liegen, gilt die Gleichung (8.1.41).

Die Lösung für den Halbraum $x_1 < 0$ wird aus der Lösung φ_1 durch Spiegelung an der Ebene $x_1 = 0$ konstruiert. Es wird

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \varphi_2(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.1.49)$$

gesetzt. Das Feld φ_2 ist dann im Bereich $x_1 < 0$ definiert, und es ist eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, da

$$\Delta\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \Delta\varphi_2(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.1.50)$$

gilt. An der Oberfläche bei $x_1 = 0$ ergibt sich

$$\varphi_1(0, x_2, x_3) = \varphi_2(0, x_2, x_3) \quad (8.1.51)$$

Damit ist die Bedingung (8.1.45) erfüllt, und die Lösung φ_1 kann in der Form (8.1.46)

8 Schallfeld mit Berandung

dargestellt werden. Wegen der Symmetrie gilt an der Oberfläche bei $x_1 = 0$ zusätzlich

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \quad \text{auf } S \quad (8.1.52)$$

Aus Gleichung (8.1.46) ergibt sich mit dieser Beziehung

$$\varphi_1(\vec{x}_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} dS \quad (8.1.53)$$

Die Lösung im Bereich $x_1 > 0$ ist damit als Überlagerung von Monopolfeldern ohne Dipole ausgedrückt. Die Stärke der Monopole ist durch die Anleitung $\partial \varphi_1 / \partial n_1$ gegeben. Der Wert φ_1 wird zur Berechnung des Feldes gar nicht mehr benötigt. Das hat insbesondere auch bei akustische Anwendungen entscheidende Vorteile. Bezeichnet φ_1 die komplexe Amplitude des akustischen Potentials, so ist die Normalkomponente der Schnelle

$$\hat{v}_n = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} \quad (8.1.54)$$

ausreichend, um das gesamte Schallfeld zu berechnen. Der Druck \hat{p} ist überhaupt nicht mehr notwendig. Das Schallfeld kann allein aus einer vorgegebenen Auslenkung der Oberfläche ermittelt werden. Das ist allerdings nur dann möglich, wenn S wie in dem Beispiel eine unendlich ausgedehnte Ebene ist.

Kolben in unendlich ausgedehnter Wand

Als akustische Anwendung für die Gleichung (8.1.53) wird ein runder Kolben in einer unendlich ausgedehnten Wand betrachtet. Der Kolben bewegt sich harmonisch. Die Bewegungsrichtung ist senkrecht zur Oberfläche. Ansonsten bewegt sich die Wand nicht. Zweckmäßigerweise wird wieder die Ebene $x_1 = 0$ als Wand angenommen. In der Ebene werden die Polarkoordinaten σ und μ mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \cos \mu \\ \sigma \sin \mu \end{pmatrix} \quad (8.1.55)$$

definiert. Die Ausrichtung der Koordinaten ist in Abbildung 8.8 veranschaulicht. Mit σ ist der Abstand vom Ursprung und mit β der Winkel relativ zu x_2 -Achse bezeichnet.

Die Geschwindigkeit des Kolbens $u_K(t)$ ist mit

$$u_K(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (8.1.56)$$

vorgegeben. Damit folgt für die Normalkomponente der Schnelleamplitude in der Wandebene

$$\hat{v}_n = \begin{cases} U_0 & \text{für } \sigma \leq a \\ 0 & \text{für } \sigma > a \end{cases} \quad (8.1.57)$$

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

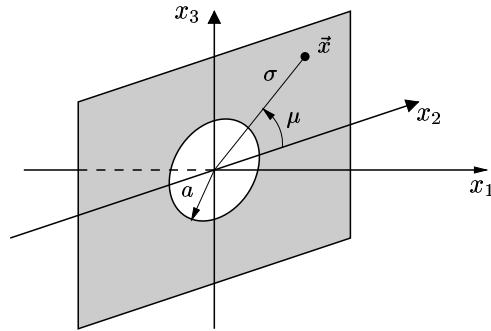


Abbildung 8.8: Kolben mit Radius a in der x_2, x_3 -Ebene, mit Polarkoordinaten σ und β .

Es soll das Druckfeld berechnet werden, welches von der Kolbenbewegung erzeugt wird. Zwischen der komplexen Amplitude des akustischen Potentials und der Druckamplitude gilt der Zusammenhang

$$\hat{p} = -i\omega\rho_0\varphi(\vec{x}_0) \quad (8.1.58)$$

Zusammen mit (8.1.53) folgt

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS \quad (8.1.59)$$

Die Integration kann auf die Kolbenoberfläche S_K beschränkt werden, da außerhalb $\hat{v}_n = \partial\varphi/\partial n$ verschwindet. Es ergibt sich

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} U_0 \int_{S_K} \frac{e^{-ikr}}{r} dS_K \quad (8.1.60)$$

Das Integral wird mit den Polarkoordinaten dargestellt. Man erhält

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} U_0 \int_0^a \left[\sigma \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} d\mu \right] d\sigma \quad (8.1.61)$$

Für das auftretende Integral läßt sich nicht ohne weiteres eine geschlossene Lösung angeben. In jedem Fall kann das Integral für eine gegebene Position \vec{x}_0 numerisch berechnet werden. Im folgenden soll jedoch eine approximative Lösung vorgestellt werden, die für Punkte im Fernfeld weit entfernt von dem Kolben gültig ist.

8 Schallfeld mit Berandung

Es wird angenommen, der Abstand vom Ursprung $R = |\vec{x}_0|$ ist groß im Sinne von $R \gg a$. Dann kann das Integral in zwei Schritten vereinfacht werden. Zuerst wird der Kehrwert des Abstands $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ betrachtet. Er kann im Fernfeld mit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \approx \frac{1}{|\vec{x}_0|} = \frac{1}{R} \quad (8.1.62)$$

angenähert werden. Setzt man dies in den Integranden ein, kann der $1/R$ -Term vor das Integral gezogen werden. Im zweiten Schritt wird auch der Abstand r im e^{-ikr} -Ausdruck angenähert. Im Fall einer kompakten Quelle mit $\lambda \gg a$ könnte man dort ebenfalls einfach r durch R ersetzen. Der entstehende Fehler wäre gering, denn die Phasenunterschiede in dem Bereich der Kolbenoberfläche sind vernachlässigbar. Ist die Quelle nicht kompakt, dann ist diese Vereinfachung zu grob und führt auf völlig falsche Ergebnisse. Es soll eine etwas genauere Approximation für den Abstand r gefunden werden. Dazu wird die Beobachtungsposition mit

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \cos \beta \\ R \sin \theta \sin \beta \end{pmatrix} \quad (8.1.63)$$

in Kugelkoordinaten ausgedrückt. Die Koordinaten sind in Abbildung 8.9 veranschaulicht. Mit θ ist der Winkel relativ zur x_1 -Achse gegeben. Die Größe β ist – wie μ – der Winkel in der x_2, x_3 -Ebene und R bezeichnet den Abstand zum Ursprung.

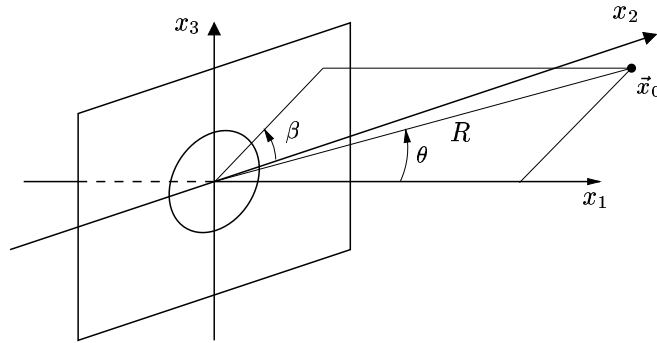


Abbildung 8.9: Kugelkoordinaten für den Punkt \vec{x}_0 .

Für den Abstand r zwischen einem Punkt \vec{x} in der Wandebene und dem Beobachtungspunkt \vec{x}_0 gilt

$$r = |\vec{x}_0 - \vec{x}| = \left[x_{0,1}^2 + (x_{0,2} - x_2)^2 + (x_{0,3} - x_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1.64)$$

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

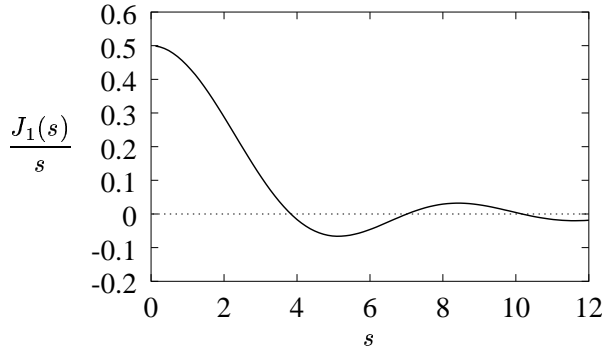


Abbildung 8.10: Verlauf des Ausdruck mit Besselfunktion erster Ordnung.

Dabei ist $x_{0,i}$ die i -te Komponente von \vec{x}_0 . Unter Berücksichtigung von (8.1.55) und (8.1.63) ergibt sich nach einigen Umformungen

$$r = \left[R^2 - 2R\sigma \sin \theta \cos(\beta - \mu) + \sigma^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1.65)$$

Für große Abstände gilt $R \gg \sigma$. Damit kann näherungsweise

$$r \approx R - \sigma \sin \theta \cos(\beta - \mu) \quad (8.1.66)$$

geschrieben werden. Diese Approximation berücksichtigt die Variation des Abstands r in der Kolbenoberfläche auf etwas einfachere Weise als die exakte Gleichung. Setzt man diesen Ausdruck in den e^{ikr} -Term ein, ergibt sich als Näherungslösung im Fernfeld

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0 U_0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \int_0^a \left[\sigma \int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma \sin \theta \cos(\beta-\mu)} d\mu \right] d\sigma \quad (8.1.67)$$

Das Integral in diesem Ausdruck kann geschlossen berechnet werden. Man erhält schließlich

$$\hat{p} = i\omega\rho_0 U_0 a^2 \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (8.1.68)$$

Das entstehende Druckfeld ist proportional zur Kolbengeschwindigkeit U_0 und zur Oberfläche des Kolbens ($\sim a^2$). Die Richtungsabhängigkeit wird durch den zweiten Quotienten ausgedrückt. Mit J_1 ist die Besselfunktion erster Ordnung bezeichnet. Der Verlauf des Quotienten ist in Abhängigkeit des Arguments $s = ka \sin \theta$ in Abbildung 8.10 dargestellt. In der x_1 -Richtung ist in jedem Fall die Abstrahlung maximal, da bei $\theta = 0$ auch $s = 0$ wird. Die Richtungsabhängigkeit wird im wesentlichen durch den Faktor

$$ka = \frac{\omega}{c} a = 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad (8.1.69)$$

8 Schallfeld mit Berandung

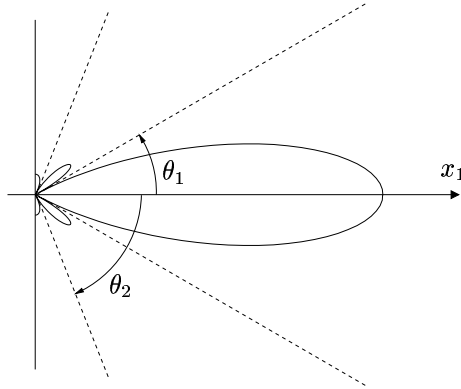


Abbildung 8.11: Fernfeld eines vibrierenden Kolbens in unendlich ausgedehnter Wand mit $ka = 8$; Entlang der durchgezogenen Linie gilt $|\hat{p}| = \text{const.}$

bestimmt. Dieser Faktor entspricht dem Quotienten

$$\frac{\text{typische Abmessung}}{\text{Wellenlänge}} \quad (8.1.70)$$

und gibt damit die Helmholtz-Zahl des Kolbens an.

Für einen kompakten Kolben gilt $\lambda \gg a$ beziehungsweise $ka \ll 1$. In diesem Fall ist unabhängig von dem Winkel θ immer $s \ll 1$. So strahlt die Quelle in alle Richtungen näherungsweise gleichstark ab. Für größere Helmholtz-Zahlen ergibt sich dagegen eine deutliche Abhängigkeit der Abstrahlung von der Richtung. In Abbildung 8.11 ist das Feld für den Fall $ka = 8$ dargestellt. Bei $\theta = 90^\circ$ ist dann gerade $s = 8$. Die Funktion $J_1(s)/s$ besitzt in dem Intervall $[0, 8]$ zwei Nullstellen. Entsprechend ergeben sich zwei Winkel θ_1 und θ_2 , für die $J_1(s)/s = 0$ wird. In diese Richtungen wird überhaupt kein Schall abgestrahlt. In den Zwischenbereichen ergibt sich eine gewisse Feldstärke. Diese Bereiche werden (nicht zuletzt wegen der Form der Konturlinien) auch als Keulen bezeichnet. Es ist hier zu bedenken, daß die Aufgabenstellung rotations-symmetrisch ist. Das bedeutet, durch die Winkel θ_1 und θ_2 werden Kegelflächen definiert, auf denen ein Beobachter im Fernfeld keinen Schall wahrnimmt.

Übergang auf den zeitabhängigen Fall

Bisher wurde die Lösung der Helmholtz-Gleichung betrachtet. Dies ist immer dann sinnvoll, wenn bestimmte Frequenzen oder Spektralbereiche von Interesse sind. Ist dagegen der konkrete Zeitverlauf an einer bestimmten Position gefragt, ist es günstiger die Lösung der Wellengleichung direkt zu betrachten.

Für die Lösungen der Helmholtz-Gleichung gilt die Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22). Aus ihr kann sich eine entsprechende Gleichung für den zeitabhängigen Fall

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

abgeleitet werden. Dazu wird die Fourier-Integralformel angewendet. Für ein Zeitsignal $h(t)$ lautet sie

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] d\omega \quad (8.1.71)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer entspricht zusammen mit dem Vorfaktor $1/(2\pi)$ der Fourier-Transformierten $\tilde{h}(\omega)$ des Zeitsignals. Diese ist von der Frequenz ω abhängig und wird mit

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (8.1.72)$$

gebildet. Die Fourier-Transformierten gibt die Phase und Amplitude des Signals bei der jeweiligen Frequenz an.

Mit einem harmonischen Ansatz der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.73)$$

wird lediglich eine Frequenz berücksichtigt. Sind mehrere Frequenzen beteiligt, so ergibt sich das Feld als Überlagerung aller spektralen Anteile. Bezeichnet man die Fourier-Transformierte von $\phi(\vec{x}, t)$ bezüglich der Zeit t an der festen Position \vec{x} mit $\varphi_\omega(\vec{x})$, so gilt nach (8.1.71) die Rücktransformation

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.74)$$

Eigentlich müßte man $\tilde{\phi}_{\vec{x}}(\omega)$ statt $\varphi_\omega(\vec{x})$ schreiben, um zu verdeutlichen, daß es sich um die Fourier-Transformierte der Funktion ϕ – und damit auch um eine Funktion von ω – handelt. Hier wird jedoch aus Kompatibilität zur bisherigen Darstellung φ_ω verwendet.

Zunächst werden einige einfache Zusammenhänge vorgestellt, die bei der folgenden Herleitung nützlich sind. Die Gleichung (8.1.74) gilt für alle Position \vec{x} . Differenziert man (8.1.74) nach dem Ort, so kann man auf der rechten Seite die Ableitung mit dem Integral vertauschen. Es folgt für die Ableitung in Normalenrichtung auf einer Oberfläche S die Beziehung

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial n}(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.75)$$

Wird in (8.1.74) die Zeit t durch $t + \Delta t$ ersetzt, erhält man

$$\phi(\vec{x}, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega(\vec{x}) e^{i\omega(t+\Delta t)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\Delta t} \varphi_\omega(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.76)$$

8 Schallfeld mit Berandung

Das bedeutet, bei Multiplikation der Fourier-Transformierten mit dem Faktor $e^{i\omega\Delta t}$ ergibt sich nach der Rücktransformation des Produkts ein um Δt verschobener Zeitverlauf (kurz: die Multiplikation mit $e^{i\omega\Delta t}$ im Frequenzbereich entspricht einer Verschiebung um Δt im Zeitbereich). Wird (8.1.74) nach der Zeit differenziert, ergibt sich

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \varphi_{\omega}(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.77)$$

Dies besagt, daß bei Multiplikation der Fourier-Transformierten mit dem Faktor $i\omega$ sich nach der Rücktransformation des Produktes die Zeitableitung des Signals ergibt (kurz: die Multiplikation mit $i\omega$ im Frequenzbereich entspricht der Differentiation im Zeitbereich).

Nach dieser Vorbereitung wird die Rücktransformation (8.1.74) an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ betrachtet. Ersetzt man in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) die Variable φ durch φ_{ω} , dann ergibt sich nach dem Einsetzen in die Rücktransformation

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}_0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega}(\vec{x}_0) e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_{\omega}}{\partial n} e^{i\omega t} d\omega dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) e^{i\omega t} d\omega dS \end{aligned} \quad (8.1.78)$$

Hier ist bereits auf der rechten Seite die Integration über ω mit den Oberflächenintegralen vertauscht worden. In nächsten Schritt werden die inneren Integrale betrachtet. Für das Integral im ersten Ausdruck ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_{\omega}}{\partial n} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi_{\omega}}{\partial n} e^{i\omega(t-r/c)} d\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial n} \left(\vec{x}, t - \frac{r}{c} \right) \quad (8.1.79)$$

Dabei wurde von den beiden Beziehungen (8.1.75) und (8.1.76) Gebrauch gemacht. Da in dem Integral die Ableitung $\partial\varphi_{\omega}/\partial n$ auftritt, ergibt sich auch die Ableitung $\partial\phi/\partial n$ nach Rücktransformation. Der Faktor e^{ikr} kann als ein $e^{i\omega\Delta t}$ mit $\Delta t = -r/c$ angesehen werden. Entsprechend ergibt die Rücktransformierte das Feld zur verschobenen Zeit $t - r/c$.

Um das Integral im zweiten Ausdruck zu bestimmen, wird zunächst die Normalableitung des Monopolfeldes berechnet. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \left[-\frac{1}{r^2} e^{-ikr} - \frac{i\omega}{cr} e^{-ikr} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (8.1.80)$$

Setzt man dies in (8.1.78) ein, dann kann das zweite innere Integral in zwei Teilintegrale aufgespalten werden. Die resultierenden Teile werden einzeln behandelt. Für den

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Ersten ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{r^2} e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (8.1.81)$$

Wieder wurde die Beziehung (8.1.76) verwendet. Für den zweiten Teil erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{i\omega}{cr} e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \varphi_{\omega} e^{i\omega(t-r/c)} d\omega = -\frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (8.1.82)$$

Jetzt wurde zusätzlich (8.1.77) angewendet. So ergibt sich aus der Rücktransformation die Zeitableitung $\partial\phi/\partial t$.

Setzt man die Ergebnisse für alle inneren Integrale in die Ausgangsgleichung (8.1.78) ein, folgt schließlich

$$\phi(\vec{x}_0, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] dS \quad (8.1.83)$$

Damit ist die Lösung $\phi(\vec{x}_0, t)$ durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt. Diese Darstellung wird üblicherweise als Kirchhoff-Integral bezeichnet. Im Gegensatz zum Kirchhoff-Helmholtz-Integral treten in der eckigen Klammer auf der rechten Seite drei statt zwei Quellterme auf. Dies liegt daran, daß durch die Umformung (8.1.80) der Dipolausdruck in einen Nah- und einen Fernfeldanteil aufgespalten wurden. In der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) ist dagegen der Dipolausdruck noch komplett. Der erste Summand in der eckigen Klammer stellt den Monopolanteil dar. Die Quellstärke ist durch die Normalableitung $\partial\phi/\partial n$ gegeben. Als nächstes kommt das Nahfeld des Dipolanteils. Dieser Term ist proportional zu $1/r^2$. Die Stärke ist durch ϕ gegeben. Der dritte Summand gibt das Fernfeld des Dipolanteils an. Die Stärke wird durch die Zeitableitung $\partial\phi/\partial t$ bestimmt. Alle Werte auf der Oberfläche sind zur retardierten Zeit $t - r/c$ zu nehmen.

In dem zweiten und dritten Summand tritt der Faktor $\partial r/\partial n$ auf. Dieser beinhaltet die Richtungsabhängigkeit der Dipolfelder. Es gilt

$$r = |\vec{x}_0 - \vec{x}| \quad (8.1.84)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad}(r) = n_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}_0 - \vec{x}| = -n_i \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x})_i}{|\vec{x}_0 - \vec{x}|} \quad (8.1.85)$$

Dabei bezeichnet $(\vec{x}_0 - \vec{x})_i$ die i -te Komponente des Vektors $(\vec{x}_0 - \vec{x})$. Dieser entspricht der Beobachtungsrichtung. Somit stellt der Quotient auf der rechten Seite von (8.1.85)

8 Schallfeld mit Berandung

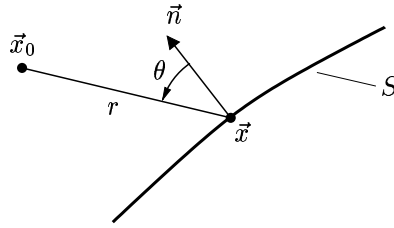


Abbildung 8.12: Winkel θ zwischen Beobachtungsrichtung $(\vec{x}_0 - \vec{x})$ und der Normalenrichtung \vec{n} .

den Einheitsvektor in Beobachtungsrichtung dar. Die Situation ist in Abbildung 8.12 skizziert. Der Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Normalenrichtung wird mit θ bezeichnet. Das Skalarprodukt in (8.1.85) ergibt gerade den Cosinus dieses Winkels. Damit kann einfach

$$\frac{\partial r}{\partial n} = -\cos \theta \quad (8.1.86)$$

geschrieben werden. So steckt in dem $\partial r / \partial n$ -Ausdruck die bekannte Richtungsabhängigkeit der Dipolfelder mit \cos -Funktion.

Die bisherigen Überlegungen gelten für alle Größen ϕ , die die Wellengleichung erfüllen. Im folgenden soll das Kirchhoff-Integral (8.1.83) auf den akustischen Fall angewendet werden. Es sei ϕ das akustische Potential. Berechnet werden soll das Druckfeld. Der Druck ergibt sich durch

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (8.1.87)$$

Differenziert man (8.1.83) nach der Zeit und multipliziert mit $-\rho_0$ folgt

$$p'(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\rho_0}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] dS \quad (8.1.88)$$

Dabei wurde die Zeitableitung mit der Integration vertauscht und auch der Faktor $-\rho_0$ in das Integral hineingezogen.

In dem Integranden treten verschiedene Ableitungen des akustischen Potentials auf. Die Normalableitung von ϕ entspricht der Normalkomponente der Schnelle:

$$v'_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (8.1.89)$$

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

Die Zeitableitungen können zusammen mit dem Vorfaktor $-\rho_0$ durch den Druck p' ersetzt werden. Man erhält schließlich die Gleichung

$$p'(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\rho_0}{r} \frac{\partial v'_n}{\partial t} - \frac{p'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right]_{t-\frac{r}{c}} dS \quad (8.1.90)$$

Dabei sind alle Größen in der eckigen Klammer zur retardierten Zeit $t-r/c$ zu nehmen.

Gleichung (8.1.90) stellt die akustische Version des Kirchhoff-Integrals dar. Es erlaubt die Berechnung der Druckfeldes in einem Volumen V , wenn auf der Oberfläche S des Volumens die Normalkomponente der Schnelle v'_n , der Druck p' und die Zeitableitung des Drucks $\partial p'/\partial t$ bekannt sind. Die Gleichung wird oft im Zusammenhang mit numerischen Lösungen eingesetzt. Dabei wird in einem Rechengebiet ein Strömungsfeld numerisch simuliert. In dem Gebiet wird eine geschlossene Oberfläche S festgelegt. Außerhalb der Oberfläche sind nur kleine Störungen vorhanden und das Fluid ist näherungsweise in Ruhe. In inneren Bereich können dagegen nichtlineare Effekte auftreten, die Schall erzeugen (zum Beispiel die Wechselwirkung von Wirbeln mit Körpern). Mit der numerischen Simulation wird die Ausbreitung der Wellen im inneren von der Quelle bis zur Oberfläche S simuliert. Die berechneten Größen können in das Integral (8.1.90) eingesetzt werden, um den erzeugten Schall bis in das Fernfeld zu ermitteln.

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

In vorherigen Abschnitt wurde das Kirchhoff-Helmholtz-Integral behandelt. Es erlaubt die Berechnung des Schallfeldes in einem Volumen, wenn die Schnelle und der Druck auf der Oberfläche des Volumens gegeben sind. Jedoch ist bei vielen praktischen Problemstellungen nur die Schnelle und nicht der Druck bekannt. Beispiel dafür ist die Berechnung des Schallfeldes eines vibrierenden Körpers, bei dem nur die Bewegung der Körperoberfläche vorgegeben ist. Dabei kann es sich um eine atmende Kugel, um einen Lautsprecher oder um eine vibrierende Maschine handeln. Nur in Ausnahmesituationen – wie bei dem Kolben in einer unendlich ausgedehnten Wand – ist die Schnelle allein ausreichend um das Schallfeld zu ermitteln. Normalerweise wird jedoch auch der Druck benötigt. Dann ist die Berechnung des Schallfeldes nur auf numerischen Wege möglich. Im folgenden werden die Grundlagen einiger wichtiger numerischer Methoden vorgestellt.

Randelementemethode

Die Randelementemethode oder auch Boundary Element Method (BEM) basiert auf dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral (8.1.22). Dies wurde bereits im vorigen Abschnitt ausführlich vorgestellt. Allerdings muß hier noch eine kleine Ergänzung gegeben werden. Bisher wurde der Fall ausgeschlossen, daß der Beobachtungspunkt \vec{x}_0 direkt auf der Oberfläche S liegt. Im Zusammenhang mit der Randelementemethode ist jedoch auch dieser Fall von Bedeutung.

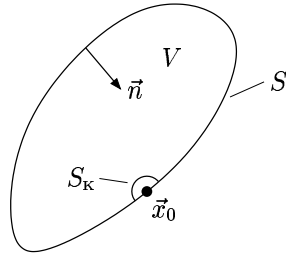


Abbildung 8.13: Volumen V mit Punkt \vec{x}_0 genau auf der Oberfläche S .

Es wird vorausgesetzt, daß die Oberfläche S an der Position \vec{x}_0 glatt ist. Das bedeutet, die Oberfläche besitzt dort keinen Knick, und der Normalenvektor ist definiert. In Abbildung 8.13 ist die Situation dargestellt. Das Vorgehen ist analog zu den Überlegungen im Abschnitt 8.1 (vergleiche auch mit Abbildung 8.2). Gleichung (8.1.12) ist gültig, wenn der Punkt \vec{x}_0 außerhalb des Volumens V liegt. Um dies in dem gegebenen Fall zu erreichen, wird wieder eine kleine Kugel um den Punkt \vec{x}_0 gelegt. Dann wird ein neues Volumen konstruiert, indem die in V liegende Hälfte der Kugel herausgeschnitten wird. Die neue Oberfläche besteht aus der Oberfläche S plus der Oberfläche der halben Kugel. Dieser Teil wird wieder mit S_k bezeichnet. Damit ist auch in dem Fall $\vec{x}_0 \in S$ die Gleichung (8.1.15) gültig. Das Integral über die neue Oberfläche kann im Grenzfall eines unendlich kleinen Kugelradius berechnet werden. Allerdings ergibt sich im Vergleich zur Gleichung (8.1.21) ein um den Faktor Zwei geringeres Resultat, da jetzt nur ein Teil der Kugel herausgeschnitten wurde. Bei einer glatten Oberfläche und im Grenzfall eines unendlich kleinen Radius ist dieser Teil exakt die Hälfte.

Die Überlegungen führen auf eine Erweiterung der Gleichung (8.1.21) für Punkte $\vec{x}_0 \in S$. Es gilt

$$\int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{x}_0 \notin V \\ -2\pi\varphi(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in S \\ -4\pi\varphi(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in V \end{cases} \quad (8.2.1)$$

mit

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0| \quad (8.2.2)$$

Die Formel kann auf den akustischen Fall übertragen werden. Es soll φ die komplexe Amplitude des akustischen Potentials sein. Die Druckamplitude ist mit dieser über

$$\hat{p} = -i\omega\rho_0\varphi \quad (8.2.3)$$

verknüpft. Zusätzlich ist die Amplitude der Schnelle senkrecht zur Oberfläche

$$\hat{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (8.2.4)$$

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

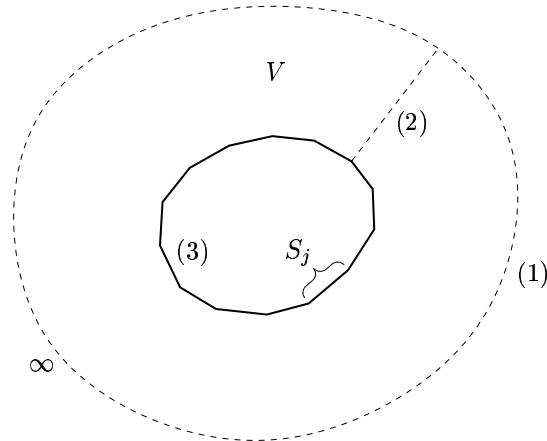


Abbildung 8.14: Diskretisierung der Kirchhoff-Helmholtz-Formel. Die Oberfläche S besteht aus (1) Teil der Oberfläche im Unendlichen, (2) Vernachlässigbare Verbindungsfläche und (3) aus Elementen S_j zusammengesetzter innerer Teil.

von Bedeutung. Sie ergibt die Quellstärke im ersten Integral auf der linken Seite. Ersetzt man mit diesen Beziehungen die Größe φ in (8.2.1), ergibt sich

$$\frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{v}_n \, dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \hat{p} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \, dS = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{x}_0 \notin V \\ \frac{1}{2}\hat{p}(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in S \\ \hat{p}(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in V \end{cases} \quad (8.2.5)$$

Ist die Schnelle und der Druck auf S bekannt, kann überall in V und auch auf S der Druck mit (8.2.5) berechnet werden. Ist lediglich die Schnelle gegeben, dann stellt (8.2.5) eine implizite Beziehung für den unbekanntenen Druck auf der Oberfläche dar. Theoretisch ist es damit möglich, bei vorgegebener Schnelle \hat{v}_n zunächst den Oberflächendruck und dann das gesamte Feld zu berechnen.

Nur in Ausnahmefällen bei besonders einfachen Geometrien ist eine geschlossene Lösung der Aufgabe möglich. Im allgemeinen muß das Problem numerisch behandelt werden. Dazu wird Gleichung (8.2.5) diskretisiert. Die Oberfläche S wird aus Elementen S_j aufgebaut. Das können zum Beispiel Drei- oder Vierecke sein. Die Oberfläche muß das Volumen V komplett umschließen. Ist das Volumen V nicht beschränkt, kann man sich die Oberfläche ins Unendliche fortgesetzt vorstellen. Die Situation ist in Abbildung 8.14 skizziert. In diesem Fall muß vorausgesetzt werden, daß die Lösung im Unendlichen mit $1/R$ abfällt und sich asymptotisch wie (8.1.29) verhält. Teil (1) der Oberfläche liegt im Unendlichen. Er liefert keinen Beitrag zum Integral. Die Verbindungsfläche (2) ist vernachlässigbar klein, so daß nur der aus den Elementen S_j zusammengesetzte Teil (3) berücksichtigt werden muß.

8 Schallfeld mit Berandung

Die Lösung auf der Oberfläche wird ebenfalls diskretisiert. Die einfachste Möglichkeit ist es, die Größen \hat{v}_n und \hat{p} auf den Elementen S_j als konstant anzunehmen. Es existiert dann für jedes Element ein Druck- und ein Schnellewert, die mit \bar{p}_j und $\bar{v}_{n,j}$ bezeichnet werden. Man kann sich vorstellen, dass die diskreten Werte die mittleren wahren Wert auf den Elementen repräsentieren. Natürlich ist es auch möglich, kompliziertere Ansätze zu verwenden. Zum Beispiel kann bei dreieckigen Elementen ein linearer Verlauf der Größen in jedem Element angenommen werden. Die Verteilung ist dann durch die diskreten Werte in den Eckpunkten der Dreiecke festgelegt. Bei gleicher Anzahl der Elemente ist im Vergleich zum Ansatz mit stückweise konstanten Werten eine genauere Approximation möglich. Allerdings ist die Berechnung der Oberflächenintegrale auch komplizierter. Hier soll das Grundprinzip der Methode anhand des einfachen Ansatzes vorgestellt werden.

Die Integrale in (8.2.5) werden durch Summen approximiert. Für das erste Integral ergibt sich

$$\frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{v}_n \, dS \approx \frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \bar{v}_{n,j} \int_{S_j} \frac{e^{-ikr}}{r} \, dS_j \quad (8.2.6)$$

Dabei ist N die Anzahl der Elemente. Für das zweite Integral erhält man die diskrete Näherung

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \hat{p} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \, dS \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \bar{p}_j \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \, dS_j \quad (8.2.7)$$

In den Summen treten die Integrale

$$\int_{S_j} \frac{e^{-ikr}}{r} \, dS_j \quad \text{und} \quad \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \, dS_j \quad (8.2.8)$$

über die einzelnen Elemente S_j auf. Sie sind nur von der Geometrie der Oberfläche und der Beobachtungsposition \vec{x}_0 abhängig. Aus Platzgründen kann hier nicht auf weitere Details bei der Berechnung dieser Integrale eingegangen werden. In der Praxis reicht eine approximative Berechnung meist aus, um hinreichend genaue Ergebnisse zu erhalten. Bei einfachen Geometrien kann näherungsweise sogar eine geschlossene Lösung für die Integrale angegeben werden.

Eine Ausnahme liegt vor, wenn der Beobachtungspunkt \vec{x}_0 auf der Oberfläche sitzt. Dann gilt für ein Element $\vec{x}_0 \in S_j$. Bei der Integration wird eine Singularität in dem Punkt $\vec{x} = \vec{x}_0$ erreicht. Dort wird der Abstand $r = 0$. Bei Annäherung an diese Stelle wachsen die Integranden in (8.2.8) immer weiter an. Jedoch wird gleichzeitig die beteiligte Fläche immer kleiner. So ergibt sich trotz der Singularitäten für die Integrale jeweils einen endlichen Wert. Zur numerischen Berechnung der Integrale muß ein geeignetes Verfahren verwendet werden, welches die Singularität berücksichtigt.

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

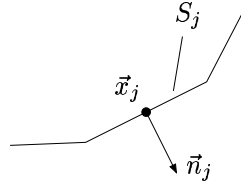


Abbildung 8.15: Element S_j der diskretisierten Oberfläche mit Kontrollpunkt \vec{x}_j und Normalenvektor \vec{n}_j .

Mit dieser Vorbereitung kann schließlich eine diskrete Gleichung aus (8.2.5) abgeleitet werden. Der Druck an einer Stelle \vec{x}_0 berechnet sich näherungsweise mit

$$\hat{p}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^N A_j(\vec{x}_0) \bar{v}_{n,j} + \sum_{j=1}^N B_j(\vec{x}_0) \bar{p}_j \quad (8.2.9)$$

Dabei sind zur Abkürzung die Koeffizienten

$$A_j(\vec{x}_0) = \alpha \frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_{S_j} \frac{e^{-ikr}}{r} dS_j \quad (8.2.10)$$

und

$$B_j(\vec{x}_0) = \alpha \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS_j \quad (8.2.11)$$

eingeführt worden. Der Vorfaktor α hängt von der Position \vec{x}_0 ab. Es ist

$$\alpha = \begin{cases} 2 & \text{bei } \vec{x}_0 \in S \\ 1 & \text{bei } \vec{x}_0 \notin S \end{cases} \quad (8.2.12)$$

Wenn eine Position $\vec{x}_0 \notin V$ eingesetzt wird, müßte Gleichung (8.2.9) theoretisch $\hat{p}(\vec{x}_0) = 0$ liefern. In der Praxis wird sich jedoch immer eine kleine Abweichung ergeben, da die diskrete Formel nur eine Näherungslösung darstellt. Die Lösung an inneren Punkten kann zum Testen der Genauigkeit verwendet werden. Damit kann auch überprüft werden, ob die Druckwerte \bar{p}_j an den Oberflächenelementen vernünftig berechnet wurden. Wie man diese Werte bestimmt, wird im folgenden erläutert.

Auf jedem Element wird ein Testpunkt \vec{x}_j festgelegt. Üblicherweise wird der geometrische Mittelpunkt des Elements genommen. In Abbildung 8.15 ist die Situation veranschaulicht. Es wird gefordert, daß der an den Testpunkten \vec{x}_j mit (8.2.9) berechnete Druck mit dem Wert \bar{p}_j übereinstimmt. Das bedeutet, es soll für alle Testpunkte

$$\hat{p}(\vec{x}_j) = \bar{p}_j \quad (8.2.13)$$

8 Schallfeld mit Berandung

gelten. Diese Beziehung stellt ein System mit N linearen Gleichungen für gleichviele unbekannte Werte \bar{p}_j dar. Damit erfordert die Berechnung des diskreten Oberflächen-drucks lediglich die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Sind die Druckwerte \bar{p}_j ermittelt, dann kann an allen anderen Stellen die Lösung bestimmt werden.

Einer der wesentlichsten Nachteile der Randlelementemethode besteht darin, daß das Gleichungssystem (8.2.13) unter Umständen nicht lösbar ist. Die auftretende Matrix kann singulär werden, wenn die Wellenlänge kleiner als die Ausdehnung des inneren Bereichs $\mathbb{R}^3 - V$ ist. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß dies mit der Lösung der Helmholtz-Gleichung in dem inneren Bereich verknüpft ist. Besitzt eine solche Lösung bei vorgegebener Schnelle an der Oberfläche eine Resonanz, so ist das Gleichungssystem (8.2.13) nicht lösbar. Die Problematik zeigte sich bereits im vorigen Abschnitt bei der Berechnung einer Lösung φ_2 in einem abgeschlossenen Volumen, die die Bedingungen (8.1.47) erfüllen soll. Um dieses Defizit der Randlelementemethode zu beheben wurden verschiedenste Erweiterungen vorgeschlagen. Auf sie soll hier nicht weiter eingegangen werden. In jedem Fall kann die Methode ohne Erweiterungen bei Wellenlängen größer als die Abmessung des inneren Bereichs angewendet werden.

Ersatzquellenmethode

Das Schallfeld eines abstrahlenden Körpers kann mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral berechnet werden. Dabei wird die Lösung durch Quellen auf der Körperoberfläche dargestellt. Das Schallfeld einer atmenden Kugel läßt sich aber auch durch einen Monopol im Mittelpunkt erzeugen. Das Feld einer vibrierenden Kugel erfordert lediglich einen Dipol. In diesen Fällen ist es anscheinend viel zweckmäßiger eine Quelle im Mittelpunkt statt eine Quellverteilung auf der Oberfläche zu verwenden. Es ergeben sich dann viel einfachere Gleichungen.

In jedem Fall kann eine Quellverteilung auf der Oberfläche mit Hilfe einer Multipolentwicklung durch Punktquellen an einer einzigen Stelle ausgedrückt werden. Üblicherweise wird der geometrische Mittelpunkt dafür ausgewählt. Bei der atmenden Kugel ergibt sich eine sehr einfache Quellverteilung auf der Oberfläche, so daß das erste Glied der Multipolentwicklung ausreicht, um diese exakt zu repräsentieren. Ist die Geometrie der Oberfläche oder deren Bewegung komplizierter, so resultiert auch eine entsprechend kompliziertere Quellverteilung. Folglich sind mehr Glieder in der Multipolentwicklung notwendig, um eine genaue Approximation der Quellverteilung zu erhalten.

Die Ersatzquellenmethode kann man sich als ein Verfahren zur numerischen Berechnung der Glieder einer Multipolentwicklung vorstellen. Es muß die Normalkomponente der Schnelle \hat{v}_n an der Oberfläche bekannt sein. Zuerst wird ein Mittelpunkt \vec{x}_M bestimmt, an dem die Punktquellen liegen sollen. Die komplexe Amplitude des akustischen Potentials wird durch die Summe

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i(\vec{x}) \quad (8.2.14)$$

ausgedrückt. Dabei ist φ_i das normierte Feld einer einzelnen Punktquelle, und der Faktor Q_i legt deren Stärke fest. Die Anzahl der verwendeten Punktquellen ist mit

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

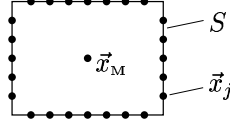


Abbildung 8.16: Mittelpunkt \vec{x}_M und Kontrollpunkte \vec{x}_j auf der Oberfläche S .

N bezeichnet. Die Quellen werden geeignet numeriert. Typischerweise wird in der Reihenfolge Monopol, Dipole, Quadrupole usw. vorgegangen. Es ist dann

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(\vec{x}) &= \frac{e^{-ikr}}{r} \\
 \varphi_1(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
 &\vdots \\
 \varphi_4(\vec{x}) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

mit

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_M| \tag{8.2.16}$$

als Abstand zum Mittelpunkt. Werden alle Quelltypen bis zum Quadrupol mit berücksichtigt, ergibt sich $N = 10$. Ein Monopol, drei Dipole und sechs Quadrupole bilden zusammen die Ersatzquellen. Damit sind für den jeweiligen Quelltyp alle Konstellationen abgedeckt.

Um die Quellstärken Q_i zu ermitteln, werden auf der Oberfläche Testpunkte \vec{x}_j definiert. Die Situation ist in Abbildung 8.16 dargestellt. Es wird gefordert, daß die Normalkomponente der Schnelle, die sich aus der Lösung (8.2.14) ergibt, in den Testpunkten mit einem vorgegebenen Wert $\hat{v}_{n,j}$ übereinstimmt. Für die Schnelle gilt

$$\hat{v} = \text{grad } \varphi = \text{grad} \left\{ \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i \right\} = \sum_{i=1}^N Q_i \text{grad } \varphi_i \tag{8.2.17}$$

Von Interesse ist die Normalkomponente der Schnelle. Für sie folgt

$$\hat{v}_n = \vec{n} \text{grad } \varphi = \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \tag{8.2.18}$$

8 Schallfeld mit Berandung

Dabei ist mit $\partial\varphi_i/\partial n$ die Normalableitung des Feldes einer einzelnen Punktquelle gegeben. Es soll für alle Testpunkte die Bedingung

$$\hat{v}_n(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}(\vec{x}_j) = \hat{v}_{n,j} \quad (8.2.19)$$

erfüllt sein. Sind gerade gleich viele Testpunkte wie Punktquellen vorhanden, dann stellt (8.2.19) ein System aus N linearen Gleichungen für N unbekannte Quellstärken Q_i dar. Dieses Gleichungssystem ist im Allgemeinen gut lösbar, falls nicht die Testpunkte ungeschickt verteilt wurden. Sind die Stärken Q_i der Ersatzquellen bekannt, kann mit

$$\hat{p}(\vec{x}) = -i\omega\rho_0 \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i(\vec{x}) \quad (8.2.20)$$

das Druckfeld berechnet werden.

Häufig wird eine Anzahl K von Testpunkten verwendet, die viel größer als die Anzahl der Punktquellen ist ($K > N$). Das System ist dann überbestimmt, und die Gleichung (8.2.19) kann im Allgemeinen nicht mehr für alle Punkte gleichzeitig erfüllt werden. Stattdessen wird ein Funktional

$$G = \sum_{j=1}^K \{ \hat{v}_n(\vec{x}_j) - \hat{v}_{n,j} \}^2 = \sum_{j=1}^K \left\{ \left[\sum_{i=1}^N Q_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}(\vec{x}_j) \right] - \hat{v}_{n,j} \right\}^2 \quad (8.2.21)$$

definiert. Es stellt die Quadratsumme der Abweichungen dar. Die Quellstärken werden so gewählt, daß das Funktional G minimal ist. Das führt auf eine quadratische Optimierungsaufgabe, die mit Standardmethoden leicht gelöst werden kann. Ein Vorteil der Variante mit $K > N$ ist es, das die Anzahl N verändert werden kann, ohne eine neue Verteilung der Testpunkte vorzunehmen.

Verteilte Ersatzquellenmethode

Eine weitere Variante der Ersatzquellenmethode arbeitet nicht mit Quellen in einem Punkt, sondern die Ersatzquellen sind auf mehrere Stellen im inneren des Körpers verteilt. Dies bietet sich besonders bei komplizierten Körpergeometrien an. Denn bei der in einem Punkt zentrierten Ersatzquellenmethode hängt die Anzahl der benötigten Quelltypen nicht nur von der Komplexität der Oberflächenauslenkung sondern auch von der Geometrie des Körpers ab. Selbst eine relative einfache Bewegung der Oberfläche kann bei einem flachen Körper – wie zum Beispiel einem Balken oder einer Platte – ein sehr große Anzahl N erfordern. Die Erfahrung zeigt, daß man mit viel weniger Punktquellen auskommt, wenn man die Quellpunkte verteilt. In Abbildung 8.17 ist ein Beispiel skizziert. Der dargestellte Körper besitzt in einer Richtung eine größere Ausdehnung. Entsprechend sind die Quellpunkte in dieser Richtung verteilt angeordnet. Formal unterscheiden sich die Variante mit verteilten Quellen von der ursprünglichen Methode nur geringfügig. Für die einzelnen Quellen in Gleichung (8.2.15)

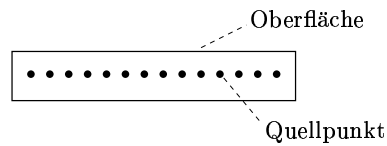


Abbildung 8.17: Flacher Körper mit einer Reihe von Quellpunkten.

muß statt dem Abstand zum Mittelpunkt gemäß (8.2.16) der Abstand zum jeweiligen Quellpunkt eingesetzt werden.

Ein Vorteil der verteilten Quellpunkte ist es, daß man im Allgemeinen mit den beiden einfachsten Quelltypen Monopol und Dipol auskommt. Das vereinfacht die praktische Realisierung des Verfahrens. Jedoch hängt die Genauigkeit der Methode entscheidend von der Verteilung der Quellpunkte ab. Die optimale Verteilung hängt von sehr vielen Parametern – wie der Geometrie der Oberfläche, der Frequenz und der Oberflächenbewegung – ab. Es bleibt letztlich dem Geschick und der Erfahrung des Anwenders überlassen, die Quell- und Testpunkte geeignet zu wählen.

8.3 Schallquellen und Reziprozität

Schallquelle in der Nähe einer Oberfläche

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Schallabstrahlung von Oberflächen betrachtet. Die Oberfläche war dabei sozusagen aktiv an der Schallerzeugung beteiligt. Im folgenden Abschnitt sollen Fälle untersucht werden, in denen die Oberfläche eine passive Rolle spielt. Befindet sich zum Beispiel eine Schallquelle in der Nähe eines festen Körpers, so werden die von ihr ausgesandten Schallwellen an der Körperoberfläche reflektiert. Die Situation ist in Abbildung 8.18 skizziert. Das durch die Quelle erzeugte Schallfeld muß die Randbedingung und der Oberfläche S des Körpers erfüllen. Zum Beispiel bei einem festen Körper muß die Normalkomponente der Schnelle verschwinden: $v'_n = 0$.

Ein Schallfeld mit Quellen wird durch die inhomogene Wellengleichung beschrieben. Für das akustische Potential gilt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = q(\vec{x}, t) \quad (8.3.1)$$

Dabei ist $q(\vec{x}, t)$ die Quellstärkeverteilung. Die Lösung muß die Randbedingung

$$v'_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (8.3.2)$$

8 Schallfeld mit Berandung

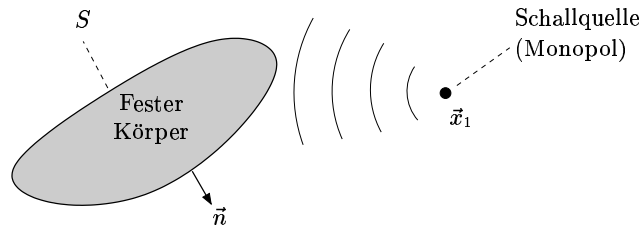


Abbildung 8.18: Schallquelle in der Nähe eines festen Körpers.

an der Körperoberfläche S erfüllen. Es wird zunächst der rein harmonische Fall bei einer Frequenz ω betrachtet. Die Lösung hat damit die Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.3.3)$$

und für die Quellstärke gilt

$$q(\vec{x}, t) = \hat{q}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.3.4)$$

Dabei bezeichnet \hat{q} die komplexe Amplitude der Quellstärkeverteilung. Die Größe φ ist wie gewohnt die komplexe Amplitude des akustischen Potentials. Nach dem Einsetzen der harmonischen Ansätze in die Wellengleichung folgt

$$-k^2 \varphi e^{i\omega t} - \Delta \varphi e^{i\omega t} = \hat{q}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.3.5)$$

Kürzt man durch den $e^{i\omega t}$ -Faktor ergibt sich mit

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -\hat{q}(\vec{x}) \quad (8.3.6)$$

eine inhomogene Variante der Helmholtz-Gleichung.

In Abbildung 8.18 besteht die Quellverteilung lediglich aus einer Punktquelle. Die Quellstärkeverteilung kann in diesem Fall durch

$$q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.7)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist $Q(t)$ das von der Quelle an der Stelle \vec{x}_1 ausgesandte Signal. Im harmonischen Fall ist die Zeitfunktion durch

$$Q(t) = A e^{i\omega t} \quad (8.3.8)$$

gegeben. Der konstante Faktor A legt die Stärke und Phase der Quelle fest. Es ergibt sich die komplexe Amplitude der Quellstärkeverteilung mit

$$\hat{q}(\vec{x}) = A \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.9)$$

8.3 Schallquellen und Reziprozität

Um die Lösung für die harmonische Punktquelle zu Berechnen muß also die inhomogene Gleichung

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -A\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.10)$$

gelöst werden. An der festen Körperoberfläche muß die Lösung die Randbedingung

$$\hat{v}_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (8.3.11)$$

erfüllen. Dabei ist \hat{v}_n die komplexe Amplitude der Schnellekomponente in Normalenrichtung \vec{n} .

Bevor ein Weg zur Behandlung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung bei den gegebenen Randbedingungen vorgestellt wird, soll zuerst die Lösung der Gleichung ohne Berandung auf den harmonischen Fall übertragen werden. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung (8.3.1) kann im Fall ohne Berandungen als Integral in der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - r/c)}{4\pi r} d^3\vec{y} \quad (8.3.12)$$

dargestellt werden. Dabei ist der Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (8.3.13)$$

zwischen dem Beobachtungspunkt \vec{x} und alle möglichen Quellpunkte \vec{y} definiert. In dem Integral taucht die Quellstärke zur retardierten Zeit auf. Aus dem harmonischen Ansatz (8.3.4) folgt für diesen Term

$$q(\vec{y}, t - r/c) = \hat{q}(\vec{y}) e^{-ikr} e^{i\omega t} \quad (8.3.14)$$

Setzt man dies in das Integral ein und kürzt durch den $e^{i\omega t}$ -Faktor, erhält man einen Ausdruck für die komplexe Amplitude mit

$$\varphi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{q}(\vec{y}) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} d^3\vec{y} \quad (8.3.15)$$

Das bedeutet, auch im harmonischen Fall kann die Lösung als Integral dargestellt werden.

Im Falle einer Punktquelle kann die Lösung weiter vereinfacht werden. In dem Integranden tritt die Quellstärkeverteilung $\hat{q}(\vec{y})$ auf. Für die Punktquelle ist diese durch Gleichung (8.3.9) gegeben. Es muß nur \vec{x} durch \vec{y} ersetzt werden. In dem Integral tritt dann der Faktor $\delta(\vec{y} - \vec{x}_1)$ auf. Die Integration liefert daher einfach die übrigen Faktoren an der Stelle $\vec{y} = \vec{x}_1$. Man erhält

$$\varphi(\vec{x}) = A \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x} - \vec{x}_1| \quad (8.3.16)$$

8 Schallfeld mit Berandung

Das Ergebnis entspricht – wie erwartet – dem einfachen Monopolfeld.

Als nächstes soll der feste Körper mit einbezogen werden. Das durch (8.3.16) gegebene Feld erfüllt selbstverständlich nicht die Randbedingung an der Oberfläche. Man kann sich das Feld dennoch als ein Teil der Lösung vorstellen. Durch den Körper ergibt sich noch ein zweiter Teil, der die Reflexionen und alle anderen durch den Körper hervorgerufenen Abweichungen beinhaltet. Entsprechend wird die Lösung als Summe

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_{\text{E}}(\vec{x}) + \varphi_{\text{R}}(\vec{x}) \quad (8.3.17)$$

dargestellt. Es soll $\varphi_{\text{E}}(\vec{x})$ das Feld der Quelle ohne Körper sein, und mit $\varphi_{\text{R}}(\vec{x})$ ist der Anteil durch die Reflexionen am Körper bezeichnet. Das Feld $\varphi_{\text{E}}(\vec{x})$ hat die Form (8.3.16). Dagegen ist über $\varphi_{\text{R}}(\vec{x})$ zunächst nichts bekannt. Es kann jedoch aus der Randbedingung (8.3.11) eine Randbedingung für $\varphi_{\text{R}}(\vec{x})$ abgeleitet werden. Damit die Gesamtlösung wirklich (8.3.11) erfüllt, müssen für die beiden Anteile auf der Oberfläche

$$\frac{\partial \varphi_{\text{E}}}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_{\text{R}}}{\partial n} \quad (8.3.18)$$

gelten. Die Ableitung von φ_{E} kann überall ermittelt werden. Damit ist die Randbedingung an der Oberfläche S für das Feld φ_{R} vorgegeben. Das Feld φ_{R} kann dann berechnet werden. An der Oberfläche ist die Normalkomponente der Schnelle durch (8.3.18) vorgegeben. Es können die Methoden aus dem vorherigen Abschnitt angewendet werden. Das bedeutet, die Lösung für eine Quelle in der Nähe einer Oberfläche läßt sich auf die Berechnung der Abstrahlung von einer Oberfläche reduzieren.

Das Ganze läßt sich auch anschaulich interpretieren. Die Teillösung φ_{E} ist einfach zu berechnen. Sie verletzt jedoch die Randbedingung. Das Feld φ_{R} entspricht der Lösung, die ein gedachter Körper mit bewegter Oberfläche erzeugt. Dieser gedachte Körper befindet sich an der Position des starren Körpers und seine Oberfläche bewegt sich gerade so, daß die Bewegung des Mediums durch die Teillösung φ_{E} kompensiert wird. Die Überlagerung der beiden Teillösungen erfüllt dann die Randbedingung am starren Körper.

Quelle neben einer unendlich ausgedehnten Wand

Im Allgemeinen ist die Berechnung der Teillösung φ_{R} nicht analytisch möglich. Es muß auf eine numerisches Verfahren – wie die Randelemente- oder Ersatzquellenmethode – zurückgegriffen werden. In einigen Spezialfällen kann jedoch die Teillösung φ_{R} ohne komplizierte Berechnung sofort angegeben werden. Dafür soll ein Beispiel im folgenden gegeben werden.

Betrachtet wird der Fall, daß sich eine Punktequelle neben einer ebenen Wand mit fester Oberfläche befindet. Die Wand ist unendlich ausgedehnt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird das Koordinatensystem so gewählt, daß die Wand mit der Ebene $x_1 = 0$ übereinstimmt. Der Normalenvektor \vec{n} zeigt in x_1 -Richtung. Die geometrische Situation ist in Abbildung 8.19 dargestellt. Die Position der Quelle wird mit

8.3 Schallquellen und Reziprozität

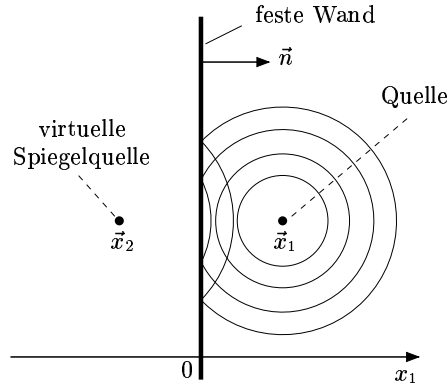


Abbildung 8.19: Schallquelle an der Position \vec{x}_1 neben einer ebenen Wand und Spiegelquelle bei \vec{x}_2 auf der anderen Seite.

\vec{x}_1 bezeichnet. Das Feld der Quelle ohne die Wand ist mit

$$\varphi_E = A \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x} - \vec{x}_1| \quad (8.3.19)$$

gegeben. Es wird eine Lösung φ_R gesucht, die die Bedingung (8.3.18) erfüllt. Dazu wird ein Feld mit

$$\varphi_R(x_1, x_2, x_3) = \varphi_E(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.3.20)$$

konstruiert. Anschaulich stellt damit φ_R eine Spiegelung der Lösung φ_E an der Ebene $x_1 = 0$ dar. Diese Spiegelung erfüllt selbstverständlich in dem Halbraum $x_1 > 0$ die Helmholtz-Gleichung. Aus der Definition (8.3.20) folgt direkt

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial x_1} = -\frac{\partial \varphi_R}{\partial x_1} \quad (8.3.21)$$

Da \vec{n} in x_1 -Richtung zeigt, ist auch automatisch die Bedingung (8.3.18) erfüllt.

Rein formal entspricht die Gesamtlösung $\varphi = \varphi_E + \varphi_R$ einer Überlagerung zweier Monopolfelder. Das erste Monopolfeld geht von der eigentlichen Quelle aus. Das Zweite entspringt einer virtuellen Spiegelquelle auf der anderen Seite der Wand bei \vec{x}_2 . Für die beiden Quellpositionen gilt

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} \quad (8.3.22)$$

Die Gesamtlösung kann als

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{A}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} r_1 &= |\vec{x} - \vec{x}_1| \\ r_2 &= |\vec{x} - \vec{x}_2| \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

8 Schallfeld mit Berandung

geschrieben werden. Somit kann in diesem Spezialfall ohne numerische Berechnung die Lösung angegeben werden.

Bisher wurde eine feste undurchlässige Wand angenommen. Die Oberfläche ist damit schallhart. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwindet, was durch die Randbedingung (8.3.11) ausgedrückt wird. Bei einer nachgiebigen Wand ist die formale Beschreibung der Oberfläche nicht so einfach. In einem der vorangegangenen Kapitel wurde der Begriff der Wandimpedanz eingeführt. Es beschreibt den Zusammenhang der Druck- und Schnelleamplitude an der Wand. Die gegebene Definition ist allerdings auf die ein-dimensionale Wellenausbreitung beschränkt. Bevor der Begriff der Wandimpedanz auf den drei-dimensionalen Fall verallgemeinert wird, soll ein weiterer Spezialfall betrachtet werden.

Die feste undurchlässige Wand wird als schallhart bezeichnet. Sie bewegt sich überhaupt nicht: $v'_n = 0$. An der sogenannten schallweichen Wand verschwinden dagegen die Druckschwankungen: $p' = 0$. Ebenso wie der Fall mit schallharter Wand läßt sich auch der mit schallweicher Wand noch relativ einfach behandeln. Es ist ebenfalls möglich, die Lösung für die Quelle neben einer schallweichen Wand direkt anzugeben. Betrachtet wird eine Situation wie in Abbildung 8.19 nur mit schallweicher statt schallharter Wand. Für die komplexe Amplitude gilt in diesem Fall

$$\hat{p}(\vec{x}) = 0 \quad \text{bei} \quad x_1 = 0 \quad (8.3.24)$$

Mit (8.3.17) folgt daraus

$$\varphi_E(\vec{x}) = -\varphi_R(\vec{x}) \quad \text{bei} \quad x_1 = 0 \quad (8.3.25)$$

Es kann wie oben ein Feld φ_R konstruiert werden, so daß diese Bedingung erfüllt ist. Im Gegensatz zu (8.3.20) wird jetzt

$$\varphi_R(x_1, x_2, x_3) = -\varphi_E(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.3.26)$$

gesetzt. Das Feld φ_R entsteht also aus der Lösung φ_E durch eine Spiegelung mit Vorzeichenwechsel. Dies kann man sich wieder so vorstellen, daß man an der Position \vec{x}_2 eine virtuelle Spiegelquelle einsetzt. Jedoch besitzt jetzt die Spiegelquelle ein negatives Vorzeichen. Sie strahlt gegenphasig zur eigentlichen Quelle ab. Dadurch ergibt sich in der Ebene $x_1 = 0$ gerade eine Überlagerung, die (8.3.24) erfüllt. Diese Überlagerung läßt sich auch formal ausdrücken. Man erhält

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{A}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} r_1 &= |\vec{x} - \vec{x}_1| \\ r_2 &= |\vec{x} - \vec{x}_2| \end{aligned} \quad (8.3.27)$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von (8.3.23) nur durch das Vorzeichen des Feldes der virtuellen Spiegelquelle.

Lokal reagierende Wand

Im Fall der schallharten oder schallweichen Wand ist die Darstellung relativ einfach. Um auch den allgemeinen Fall zu behandeln, wird der Begriff der Wandimpedanz

8.3 Schallquellen und Reziprozität

verwendet. Die Wandimpedanz Z_w wurde bereits für eine eindimensionale Wellenausbreitung in einem durch eine bewegliche Wand abgeschlossenen Rohr definiert. Im harmonischen Fall wird an der abschließenden Wand

$$\frac{\hat{p}_w}{\hat{u}_w} = Z_w \quad (8.3.28)$$

gesetzt. Dabei sind \hat{p}_w und \hat{u}_w die komplexen Amplituden des Drucks und der Geschwindigkeit an der Wand. Im eindimensionalen Fall kann die bewegliche Wand als federnd gelagerter Kolben mit Masse M , Reibungskoeffizient F und Federkonstante D angesehen werden. Die Wandimpedanz kann dann aus den mechanischen Größen berechnet werden. Es gilt

$$Z_w = i\omega \frac{M}{Q} + \frac{F}{Q} - \frac{i}{\omega} \frac{D}{Q} \quad (8.3.29)$$

wobei Q die Querschnittsfläche des Kolbens ist.

Im drei-dimensionalen Fall ist die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe. Daher kann die Definition (8.3.28) nicht einfach übernommen werden. Bewegt sich eine undurchlässige Wand, so werden die Fluidteilchen an der Wand entsprechend verschoben. Im reibungsfreien Fall können die Fluidteilchen an der Wand entlang gleiten. In der Richtung senkrecht zur Oberfläche stimmt jedoch die Geschwindigkeit der Fluidteilchen mit der Wandgeschwindigkeit überein. Das bedeutet, die Normalkomponente der Schnelle v'_n an der Wand ist mit der Dynamik der Wand verknüpft. Entsprechend wird die Wandimpedanz mit

$$Z_w = \frac{\hat{p}}{\hat{v}_n} \quad (8.3.30)$$

auf den drei-dimensionalen Fall erweitert. Die komplexe Amplitude der Normalkomponente der Geschwindigkeit \hat{v}_n stimmt in dem eindimensionalen Fall auch mit \hat{u}_w überein. Der Ansatz (8.3.30) ist mit der bisherigen Definition (8.3.28) konsistent.

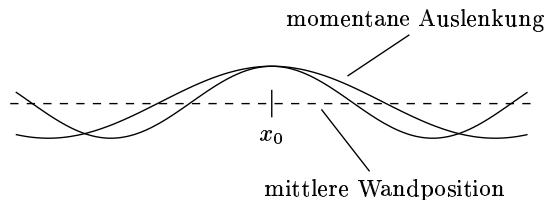


Abbildung 8.20: Auslenkung einer elastischen Wand.

Im dreidimensionalen Fall ist die Berechnung der Wandimpedanz nicht so einfach, wie bei dem mit einer beweglichen Wand abgeschlossenen Rohr. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Die Abbildung 8.20 zeigt eine Gummi-Membran, die flexibel nachgeben kann. Ein Schallfeld vor der Membran bewirkt eine Auslenkung. Die

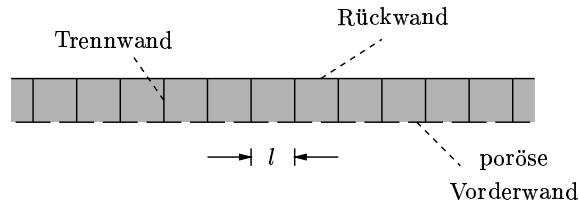


Abbildung 8.21: Praktische Ausführung einer lokal reagierenden Wand.

Ausgangsposition der Membran ist gestrichelt eingezeichnet. Die durchgezogenen Linien zeigen zwei mögliche Zustände. Die Rückstellkraft an der Stelle x_0 ist proportional zur Auslenkung. Die Kraft ergibt sich durch die Dehnung des Gummis. Die Dehnung hängt jedoch auch von der Krümmung ab. Ist die Membran stärker gekrümmt ergibt sich bei gleicher Auslenkung eine größere Dehnung des Gummis und eine entsprechend größere Rückstellkraft. Damit hängt die Rückstellkraft der Membran nicht nur von der lokalen Auslenkung ab.

Die formelmäßige Beschreibung der Dynamik einer solchen Gummi-Membran ist sehr aufwendig. Für die Bewegung der Membran muß eine eigene Differentialgleichung aufgestellt werden. Diese ist dann mit den akustischen Gleichungen gekoppelt. Im Allgemeinen ist die Lösung des entstehenden Gleichungssystems sehr aufwendig. Unter Umständen ist nur eine numerische Behandlung möglich. Es soll daher im folgenden immer von einer sogenannten "lokal reagierenden" Wand ausgegangen werden. Lokal reagierend bedeutet, daß die Wandimpedanz nur von der Frequenz ω und dem Ort – jedoch nicht von der Lösung – abhängt. Die räumliche Verteilung des Drucks spielt keine Rolle. Man kann sich die lokal reagierende Wand als ein Feld von vielen kleinen Kolben vorstellen, die sich unabhängig voneinander bewegen können. Jeder der kleinen Kolben besitzt seine eigenen mechanischen Parameter, und die auftretenden Kräfte hängen nicht von der Position oder der Bewegung der benachbarten Kolben ab. Bei der Einschränkung auf lokal reagierende Wände kann das dynamische Verhalten einer Wand durch eine nur von der Frequenz abhängigen Wandimpedanz beschrieben werden.

Die Gummi-Membran ist mit Sicherheit keine lokal reagierende Wand. In der Praxis gibt es jedoch viele Beispiele bei denen die Wände als lokal reagierend angenommen werden können. Gerade die zur Dämmung eingesetzten Absorberplatten sind oft entsprechend aufgebaut. Die Abbildung 8.21 zeigt ein Beispiel für eine Absorberplatte. Vor einer geschlossenen Rückwand befinden sich kleine Kammern, in die durch eine poröse Vorderwand das Medium eindringen kann. Durch die Trennwände wird verhindert, daß sich Wellen in der Platte ausbreiten können. Jede kleine Kammer arbeitet daher unabhängig voneinander. Sie stellt einen kleinen Helmholtz-Resonator dar, der eine gewisse Dämpfung besitzt. Diese Dämpfung ergibt sich zum Beispiel durch Reibungseffekte beim Durchströmen der porösen Wand. Oft sind auch Fasermaterialien in den Kammern, die zu weiteren Reibungsverlusten bei der Bewegung des Mediums

führt. Sind die Kammern klein gegenüber der Wellenlänge ($l \ll \lambda$), so kann die so aufgebaute Wand sehr gut als lokal reagierend beschrieben werden.

Prinzip der Reziprozität

Bisher wurde betrachtet, wie das Schallfeld einer Quelle bei einer vorhandenen Berandung berechnet werden kann. Im folgenden soll ein wichtiges Grundprinzip vorgestellt werden, das die Berechnung der Schallfelder vereinfachen kann. Ausgangspunkt ist die zweite Greensche Integralformel. Gegeben ist ein von der Oberfläche S umschlossenes Volumen V und die beiden Felder φ_1 und φ_2 . Es gilt der Zusammenhang

$$\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS = \int_V (\varphi_1 \Delta \varphi_2 - \varphi_2 \Delta \varphi_1) dV \quad (8.3.31)$$

Diese Beziehung war auch die Basis zur Herleitung der Kirchhoff-Helmholtz-Formel in Abschnitt 8.1. Dort wurde zusätzlich angenommen, daß die Felder φ_1 und φ_2 im Volumen V die Helmholtz-Gleichung (8.1.3) erfüllen.

Jetzt wird die Situation untersucht, wenn eine Schallquelle in dem Volumen V vorhanden ist. φ_1 und φ_2 sollen die Lösung der Helmholtz-Gleichung bei einer Punktquelle darstellen. Damit müssen die Felder eine inhomogene Gleichung der Form (8.3.10) erfüllen. Es soll gelten

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 + k^2 \varphi_1 &= -A_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \\ \Delta \varphi_2 + k^2 \varphi_2 &= -A_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \end{aligned} \quad (8.3.32)$$

Dabei ist A_1 die Stärke der Quelle an dem Ort \vec{x}_1 , welche das Feld φ_1 erzeugt. Entsprechend ist A_2 die Stärke der Quelle bei \vec{x}_2 , die für das Feld φ_2 verantwortlich ist. Es werden also zwei verschiedene Lösungen φ_1 und φ_2 für zwei verschiedene Quellpositionen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 betrachtet. Die Situation ist in Abbildung 8.22 illustriert. Im ersten Beispiel (a) handelt es sich um ein beschränktes Volumen V und in Zweiten (b) ist V unbeschränkt. Die Betrachtung ist in beiden Fällen gültig. Im zweiten Fall kann man sich wieder vorstellen, daß die Oberfläche S im Unendlichen geschlossen ist. Dies ist in der Abbildung mit der gestrichelten Linie angedeutet. Die Lösungen müssen im Unendlichen asymptotisch die Form (8.1.29) annehmen.

In Abschnitt 8.1 wurde gezeigt, daß die rechte Seite von (8.3.31) verschwindet, wenn φ_1 und φ_2 Lösungen der Helmholtz-Gleichung sind. Jetzt sind die inhomogenen Gleichungen (8.3.32) gültig. Löst man diese jeweils nach dem Laplace-Term auf, können damit die Laplace-Terme in dem Integral auf der rechten Seite von (8.3.31) ersetzt werden. Für den Ausdruck im Integral erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2 &= \varphi_2 \left[-k^2 \varphi_1 - A_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \right] - \varphi_1 \left[-k^2 \varphi_2 - A_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \right] \\ &= -\varphi_2 A_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + \varphi_1 A_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \end{aligned} \quad (8.3.33)$$

8 Schallfeld mit Berandung

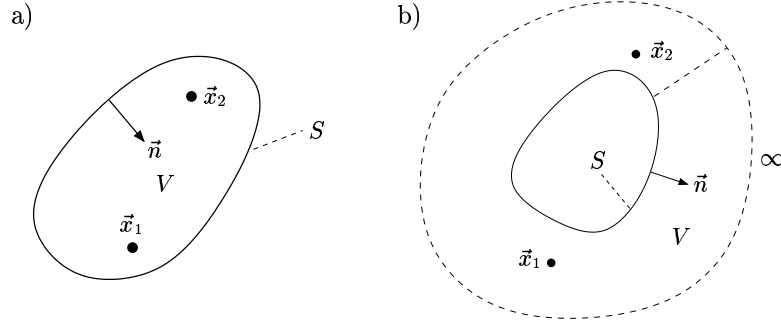


Abbildung 8.22: Zwei Quellen an den Positionen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 in dem Volumen V ; a) Volumen abgeschlossen, b) Volumen offen.

Es ergeben sich zwei Produkte in denen jeweils eine δ -Funktion auftritt. Das Ergebnis kann daher leicht über das Volumen V integriert werden. Aus (8.3.31) folgt

$$\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS = -\varphi_2(\vec{x}_1)A_1 + \varphi_1(\vec{x}_2)A_2 \quad (8.3.34)$$

Durch die beiden Punktquellen ist die rechte Seite jetzt nicht mehr gleich Null.

Im nächsten Schritt wird das Oberflächenintegral auf der linken Seite betrachtet. Stimmt die Oberfläche S mit einer festen undurchlässigen Wand überein, so gilt $\hat{v}_n = 0$ überall auf der Oberfläche. Die Normalkomponente der Schnelleamplitude ist durch

$$\hat{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (8.3.35)$$

mit der Normalableitung der Lösung φ verknüpft. Das bedeutet, daß in diesem Fall die Normalableitungen der Lösungen φ_1 und φ_2 auf S verschwinden. Damit ist die gesamte linke Seite von (8.3.34) gleich Null.

Es läßt sich zeigen, daß die linke Seite immer dann verschwindet, wenn die Oberfläche S mit einer lokal reagierenden Wand übereinstimmt. Die feste Wand ist lediglich ein spezielles Beispiel dafür. Bei einer bewegten Wand wird die Dynamik durch die Wandimpedanz (8.3.30) beschrieben. Setzt man (8.3.35) in (8.3.30) ein und ersetzt zusätzlich noch die Druckamplitude mit

$$\hat{p} = i\omega\rho_0\varphi \quad (8.3.36)$$

ergibt sich

$$\varphi = \frac{Z_w}{i\omega\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (8.3.37)$$

8.3 Schallquellen und Reziprozität

Zur Abkürzung wird der Faktor

$$C = \frac{Z_w}{i\omega\rho_0} \quad (8.3.38)$$

eingeführt. Er hängt von der Frequenz und von dem Ort, aber nicht von der Lösung ab: $C = C(\omega, \vec{x})$. Somit folgt an allen Punkten auf der Oberfläche S die Beziehung

$$\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = C \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - C \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (8.3.39)$$

Damit verschwindet tatsächlich die linke Seite von (8.3.34).

Im folgenden wird immer davon ausgegangen, daß die Oberfläche S mit einer lokal reagierenden Wand übereinstimmt. Die Beziehung (8.3.34) vereinfacht sich dann zu

$$\varphi_2(\vec{x}_1)A_1 = \varphi_1(\vec{x}_2)A_2 \quad (8.3.40)$$

Nimmt man zusätzlich an, daß die beiden Quellen gleichstark sind, erhält man die einfache Relation

$$\varphi_2(\vec{x}_1) = \varphi_1(\vec{x}_2) \quad (8.3.41)$$

Diese Beziehung drückt das sogenannte Reziprozitätsprinzip aus. Eine Quelle am Ort \vec{x}_1 erzeugt ein bestimmtes Signal an der Position \vec{x}_2 . Die Stärke des Signals hängt von der zurückgelegten Strecke ab, und eventuell sind auch Reflexionen von der Oberfläche S beteiligt. Das Reziprozitätsprinzip besagt, daß eine gleichstarke Quelle am Ort \vec{x}_2 ein identisches Signal an der Position \vec{x}_1 bewirkt.

Im Fall der Schallausbreitung ohne Berandung ist das Reziprozitätsprinzip offensichtlich. Es hängt lediglich vom Abstand zwischen einer Quelle und dem Beobachter ab, welches Signal dieser empfängt. Die Quelle und der Beobachter können vertauscht werden, und nichts ändert sich. Ist eine Berandung vorhanden, dann ist die Gültigkeit des Reziprozitätsprinzip nicht so ohne weiteres klar. Die obige Herleitung zeigt, daß es immer dann gilt, wenn die Berandung durch eine lokal reagierende Oberfläche beschrieben werden kann.

Das Reziprozitätsprinzip kann bei der praktischen Berechnung von Schallfeldern ausgenutzt werden. Um dies zu verdeutlichen, werden nochmal zwei spezielle Felder φ_1 und φ_2 betrachtet. Das erste Feld φ_1 soll durch eine Punktquelle am Ort \vec{x}_1 erzeugt werden. Die Stärke der Quelle wird auf Eins festgelegt. Es gilt die inhomogene Gleichung

$$\Delta\varphi_1 + k^2\varphi_1 = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.42)$$

Das zweite Feld stellt die Lösung für eine verteilte Quelle dar. Es erfüllt eine inhomogene Gleichung der Form (8.3.6). Die komplexe Amplitude der Quellstärke wird hier mit $\hat{q} = Q_2(\vec{x})$ geschrieben. Entsprechend erhält man

$$\Delta\varphi_2 + k^2\varphi_2 = -Q_2(\vec{x}) \quad (8.3.43)$$

8 Schallfeld mit Berandung

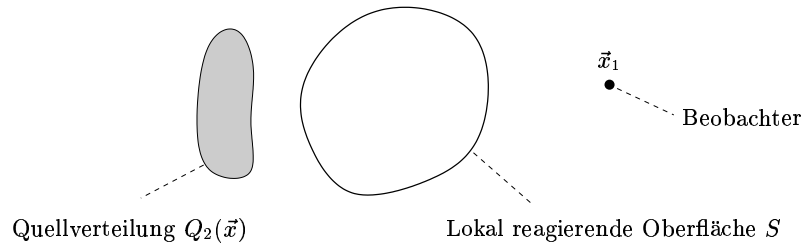


Abbildung 8.23: Zur Berechnung des Schallfeldes einer verteilten Quelle neben einer lokal reagierenden Oberfläche.

Für die beiden Felder gilt der zweite Greensche Integralsatz (8.3.31). Analog zur Gleichung (8.3.33) ergibt sich für den Ausdruck im Volumenintegral auf der rechten Seite

$$\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2 = -\varphi_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + \varphi_1 Q_2(\vec{x}) \quad (8.3.44)$$

Für das Volumenintegral folgt

$$\int_V (\varphi_1 \Delta \varphi_2 - \varphi_2 \Delta \varphi_1) dV = -\varphi_2(\vec{x}_1) + \int_V \varphi_1(\vec{x}) Q_2(\vec{x}) dV \quad (8.3.45)$$

Stimmt die Oberfläche mit einer lokal reagierenden Wand überein, so verschwindet das Oberflächenintegral auf der linken Seite von (8.3.31). Das bedeutet, daß Volumenintegral auf der rechten Seite ist ebenfalls gleich Null. Nach (8.3.45) muß damit

$$\varphi_2(\vec{x}_1) = \int_V \varphi_1(\vec{x}) Q_2(\vec{x}) dV \quad (8.3.46)$$

gelten. Diese Beziehung kann bei der Berechnung der Lösung φ_2 ausgenutzt werden. Die Situation ist in Abbildung 8.23 illustriert. Die Quellverteilung erzeugt das Schallfeld φ_2 . Das Feld ist nicht ohne weiteres zu bestimmen, da eine Berandung – zum Beispiel ein fester Körper mit schallharter Oberfläche – vorhanden ist.

Ein Lösungsweg ist es, die Quellverteilung in einzelne Elemente zu zerlegen, und diese als Punktquellen zu behandeln. Dann könnten deren jeweilige Schallfelder ermittelt werden. Die Überlagerung dieser Felder ergibt schließlich die gesuchte Lösung an einer bestimmten Beobachtersposition – zum Beispiel in \vec{x}_1 . Es ist jedoch zweckmäßiger sich eine Quelle in der Beobachtersposition \vec{x}_1 zu denken, und deren Schallfeld φ_1 zu berechnen. Ist φ_1 an allen Punkten \vec{x} – und insbesondere an den Orten der Quellverteilung – bekannt, dann kann mit (8.3.46) die gesuchte Lösung durch Überlagerung der verschiedenen Anteile von $Q_2(\vec{x})$ ermittelt werden. Der Aufwand beim zweiten Weg ist deutlich geringer. In Abschnitt 8.2 wurden Methoden vorgestellt, wie das Schallfeld einer Punktquelle neben einer Berandung numerisch berechnet werden kann. Zur Bestimmung der Lösung an einer Beobachtersposition ist nur die Berechnung des Feldes

8.3 Schallquellen und Reziprozität

einer Punktquelle erforderlich, obwohl es sich eigentlich um eine verteilte Quelle handelt. Auch bei vielen Abschätzungen kann die Beziehung (8.3.46) ausgenutzt werden. Oftmals ist es viel einfacher eine Abschätzung für einen Beobachter in der Nähe einer Oberfläche und eine weit entfernte Quelle zu geben als für den umgekehrten Fall. Mit dem Reziprozitätsprinzip kann immer die günstigere Konstellation betrachtet werden.

Die angegebene Gleichung (8.3.46) kann in einem umfassenderen mathematischen Zusammenhang gesehen werden. Sie kann in der Form

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{y}) Q(\vec{y}) d^3\vec{y} \quad (8.3.47)$$

geschrieben werden. Dabei ist die Integrationsvariable \vec{x} mit \vec{y} ersetzt worden, und der Index an dem Feld φ_2 und der Quellverteilung Q_2 wurden fortgelassen. Die Beobachtungsposition ist jetzt mit \vec{x} statt \vec{x}_1 bezeichnet. Zusätzlich ist die Lösung φ_1 durch den Ausdruck $G(\vec{x}, \vec{y})$ ersetzt worden. Entsprechend bedeutet die Funktion $G(\vec{x}, \vec{y})$ die Lösung an der Beobachtungsposition \vec{x} für eine Punktquelle der Stärke Eins in der Quellposition \vec{y} . Diese spezielle Lösung muß natürlich auch die Randbedingung an der Oberfläche erfüllen. Damit ist das zu berechnende Feld φ als Integral über das Produkt einer speziellen Lösung mit der Quellstärkeverteilung dargestellt. Die spezielle Lösung wird dann als Greensche Funktion bezeichnet. Im Fall ohne Berandungen konnte die Lösung mit (8.3.13) ebenfalls als ein Integral in einer vergleichbaren Form angegeben werden. Jedoch wird dort mit einer anderen speziellen Lösung – einem einfachen Monopolfeld – multipliziert. Das Monopolfeld ist die Lösung für eine Punktquelle am Ort des Beobachters, wenn keine Berandung vorhanden ist. Dagegen ist die Existenz der speziellen Lösung – beziehungsweise der Greenschen Funktion – im Fall mit Berandung nur gesichert, wenn die Berandung durch eine lokal reagierende Wand gegeben ist.