

# 6 Schallquellen

## 6.1 Monopol

Im letzten Kapitel wurden einfache Lösungen der Wellengleichung für die Abstrahlung von Schall in den unendlich ausgedehnten Raum vorgestellt. Die Lösungen für die atmende und die vibrierende Kugel besitzen beide eine Singularität im Kugelmittelpunkt. Im folgenden soll diese Singularität genauer untersucht werden. Dazu wird die Lösung für die atmende Kugel betrachtet. Der Schalldruck ist durch

$$p' = \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.1)$$

und die radiale Schnelle durch

$$u'_R = \frac{A}{r} \left[ \frac{1}{\rho_0 c} - \frac{i}{\omega \rho_0 r} \right] e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.2)$$

gegeben. Die Stärke des Schallfeldes ist durch die komplexe Konstante  $A$  festgelegt. Sie muß so gewählt werden, daß die Randbedingung an der Kugeloberfläche erfüllt wird. Genaugenommen ist für die Stärke nur  $|A|$  entscheidend. Wird die Auslenkung der Kugeloberfläche verdoppelt, ergibt sich auch eine Verdopplung von  $|A|$ .

Es ist möglich mit verschieden großen Kugeln genau die gleiche Lösung zu erzeugen, wenn die Auslenkung der Oberflächen mit Phase und Amplitude angepaßt wird. Die kleinere Kugel müßte entsprechend mehr auslenken. Außerhalb der Kugeln kann man die Lösungen nicht unterscheiden. In einem Gedankenexperiment kann man sich sogar überlegen, wenn man immer kleinere Kugeln nimmt um das gleiche Feld zu erzeugen. Das bedeutet, der mittlere Kugelradius  $a$  wird immer kleiner und die Stärke  $|A|$  wird konstant gehalten, indem die Auslenkung der Kugeloberfläche immer weiter erhöht wird. Es ergibt sich folgendes Szenario

- Die Auslenkung der Kugeloberfläche wird größer als der mittlere Radius  $a$ . Eine solche Kugel ist damit praktisch gar nicht mehr denkbar.
- Die Druckamplitude und die Schnelleamplitude an der Oberfläche werden immer größer. Irgendwann ist die Druckamplitude größer als der Ruhedruck  $p_0$  und es ergibt sich zeitweise ein negativer Druck.
- Die Voraussetzungen für die linearen Gleichungen der Akustik sind wegen der großen Amplituden in Kugelnähe dort auch nicht mehr erfüllt.

Im Grenzfall

$$a \rightarrow 0 \quad (6.3)$$

ergibt sich schließlich eine unendlich kleine Kugel mit unendlicher großer Auslenkung der Oberfläche. Das Schallfeld geht scheinbar von einem Punkt aus. Man erhält eine Punktquelle, die Monopol genannt wird.

Obwohl mit den Punktquellen viele prinzipielle Probleme, wie die unendlich großen Amplituden und der negative Druck, verknüpft sind, ist das Konzept der Punktquellen durchaus ein nützliches Hilfsmittel in der Akustik. Es ist zu Vergleichen mit den Quellen und Senken in einer stationären Potentialströmung. In der Nähe der Quellen wird auch die Geschwindigkeit unendlich groß. Das gleiche gilt für das Zentrum eines Potentialwirbels. Die genannten Ansätze besitzen alle prinzipielle "Schwierigkeiten" wie der Monopol. Dennoch lassen sich mit der Potentialtheorie viele praktische Strömungsprobleme lösen.

Die Punktquellen in der Akustik lassen sich direkt mit den Quellen und Senken in einer stationären Potentialströmung vergleichen. Auch lassen sich beide Arten von Quellen in analoger Weise mathematisch beschreiben. Es wird daher im folgenden zunächst eine einfache Potentialströmung mit einer Quelle im Ursprung bei  $\vec{x} = 0$  betrachtet. Das Potential für eine solche Strömung ist mit

$$\phi = \frac{A}{r} \quad (6.4)$$

gegeben. Dabei ist  $A$  eine reelle Konstante, die die Stärke der Quelle festlegt. Das Vorzeichen von  $A$  bestimmt, ob es sich um eine Quelle oder eine Senke handelt. Mit  $r = |\vec{x}|$  ist der Abstand vom Ursprung gegeben. Das Feld (6.4) erfüllt die Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0 \quad (6.5)$$

überall, außer im Punkt  $\vec{x} = 0$  beziehungsweise  $r = 0$ . Dort besitzt die Lösung eine Singularität, und  $\Delta\phi$  ist dort nicht definiert.

Das Problem ist kugelsymmetrisch. Alle Größen hängen nur vom Abstand  $r$  zum Ursprung ab. Es ist zweckmäßig die radiale Geschwindigkeit

$$u_{\text{r}} = \vec{v} \frac{\vec{x}}{r} \quad (6.6)$$

einzuführen. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  entspricht dem Gradienten des Potentials. Es folgt

$$u_{\text{r}} = \text{grad}\phi \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (6.7)$$

Das gesamte Strömungsfeld wird von der Massenquelle am Punkt  $r = 0$  bestimmt. Die Lösung besitzt dort jedoch eine Singularität. Für ein anderen Faktor  $A$  ändert sich der Wert von  $\phi$  bei  $r = 0$  nicht: Er bleibt unendlich. Die Singularität muß sich aber irgendwie verändert haben, denn die Quellstärke hat sich verändert. Es soll im folgenden eine quantitative Beschreibung für die Singularität bei  $r = 0$  gefunden werden.

## 6 Schallquellen

Dazu betrachtet man zunächst die Masse pro Zeit, die von der Quelle ausgeht. Sie wird mit  $Q_M$  bezeichnet. Um ihren Wert zu berechnen wird ein Kugelvolumen mit Radius  $a$  um die Stelle  $r = 0$  konstruiert. Der Massenfluß ist durch ein Integral über die Oberfläche des Kugelvolumens  $S_K$  zu berechnen. Es gilt

$$Q_M = \int_{S_K} \rho_0 u_r \, dS_K \quad (6.8)$$

Das Produkt  $\rho_0 u_r$  ist die Massenflußdichte in radialer Richtung. Mit Gleichung (6.7) folgt

$$Q_M = \rho_0 \int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS_K \quad (6.9)$$

Für die Lösung (6.4) ergibt sich die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} \quad (6.10)$$

Auf der Kugeloberfläche ist überall  $r = a$ . Das Integral in (6.9) kann daher leicht berechnet werden, denn der Integrand konstant ist. Man erhält

$$Q_M = 4\pi a^2 \left(-\frac{A}{a^2}\right) \rho_0 \quad (6.11)$$

Dies kann in

$$Q_M = -4\pi A \rho_0 \quad (6.12)$$

umgeformt werden. Damit ist der Massenfluß bestimmt. Ein positives  $A$  ergibt eine negativen Massenfluß, also eine Senke.

Die Größe  $Q_M$  wurde durch Integration über die Kugeloberfläche gewonnen. In dem Oberflächenintegral "steckt" sozusagen Information über die Verhältnisse am Quellpunkt  $r = 0$ . Der Radius  $a$  der gedachten Kugel, über deren Oberfläche integriert wurde, kann jedoch frei gewählt werden. Das Ergebnis für  $Q_M$  muß immer das gleiche sein – unabhängig von  $a$ . In dem Oberflächenintegral scheint daher ausschließlich Information über den Punkt  $r = 0$  zu stecken. Dies wird deutlich wenn man das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral mit Hilfe des Satzes von Gauss umwandelt. Dazu wird der nach außen zeigende Normalenvektor auf der Kugeloberfläche mit

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r} \quad (6.13)$$

definiert. Damit kann auf der Oberfläche

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \vec{n} \operatorname{grad} \phi \quad (6.14)$$

geschrieben werden. Mit dem Satz von Gauss ergibt sich die Umformung

$$Q_M = \rho_0 \int_{S_K} \vec{n} \operatorname{grad} \phi \, dS_K = \rho_0 \int_{V_K} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) \, dV_K \quad (6.15)$$

Dabei ist mit  $V_K$  das Volumen der Kugel bezeichnet.

Zur Erinnerung sei hier nochmal der Satz von Gauss angegeben. Für ein Vektorfeld  $\vec{a}$  und ein Volumen  $V$  mit Oberfläche  $S$  gilt die Beziehung

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \int_S (\vec{n} \cdot \vec{a}) \, dS \quad (6.16)$$

In unserem speziellen Fall entspricht  $\operatorname{grad} \phi$  dem Vektorfeld  $\vec{a}$ .

In Gleichung (6.15) tritt die Kombination von  $\operatorname{div}$ - und  $\operatorname{grad}$ -Operator auf. Dafür gilt allgemein

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \Delta \phi \quad (6.17)$$

Damit ergibt sich aus (6.15) das Integral

$$Q_M = \rho_0 \int_{V_K} \Delta \phi \, dV_K \quad (6.18)$$

Für die Lösung (6.4) ist  $Q_M$  durch (6.12) gegeben. Setzt man dies in (6.18) ein und teilt durch  $\rho_0$  erhält man die Beziehung

$$\int_{V_K} \Delta \phi \, dV_K = \int_{V_K} \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} \, dV_K = -4\pi A \quad (6.19)$$

Interessanterweise gilt

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \quad (6.20)$$

Das bedeutet, der Integrand in (6.19) ist überall gleich Null außer im Punkt  $r = 0$  (beziehungsweise  $\vec{x} = 0$ ). Das Integral besitzt jedoch einen Wert ungleich Null. Dieser kann nur durch die Integration über die Singularität an der Stelle  $r = 0$  herrühren. Verschiebt man die gedachte Kugel, so daß ihr Mittelpunkt an der Position  $\vec{x}_0 \neq 0$  liegt, dann wird das Integral davon abhängig, ob der Punkt  $r = 0$  in der Kugel liegt. Wird der Radius  $a$  der verschobenen Kugel verkleinert bis  $r = 0$  außerhalb ist, ergibt sich Null. Es gilt daher

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K(\vec{x}_0)} \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} \, dV_K = 0 \quad (6.21)$$

## 6 Schallquellen

Dabei ist mit  $V_{\mathbf{k}}(\vec{x}_0)$  das Volumen der verschobenen Kugel bezeichnet. Nur für  $\vec{x}_0 = 0$  ist der Limes ungleich Null. Es gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_{\mathbf{k}}(0)} \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} dV_{\mathbf{k}} = -4\pi A \quad (6.22)$$

Anscheinend liefert nur die Stelle  $\vec{x} = 0$  einen Beitrag zum Integral. Dort ist jedoch eigentlich  $\Delta\phi$  für die singuläre Lösung (6.4) gar nicht definiert. Denn durch die Singularität der Lösung ist  $\Delta\phi$  selbst singulär. Diese Singularität kann jedoch durch ein Integral wie in (6.22) quantifiziert werden. Die Größe

$$\Delta\phi = \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} \quad (6.23)$$

verhält sich wie die Dirac'sche  $\delta$ -Funktion, die in Abschnitt 1.5 vorgestellt wurde. Die  $\delta$ -Funktion ist auch überall gleich Null bis auf den Punkt  $\vec{x} = 0$ , an dem sie singulär ist. Das Integral über die  $\delta$ -Funktion ist ebenfalls endlich. Es gilt

$$\int_V \delta(\vec{x}) dV = \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{x} = 0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.24)$$

Das bedeutet, man kann  $\Delta\phi$  für die Lösung (6.4) mit einer  $\delta$ -Funktion beschreiben. Dies kann mit

$$\Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} = -4\pi A \delta(\vec{x}) \quad (6.25)$$

dargestellt werden. Die Gleichung (6.25) gilt in dem erweiterten Funktionenraum, in dem die sogenannten Distributionen, wie die  $\delta$ -Funktion, zugelassen sind. Dort ist dann auch  $\Delta\phi$  an den Stellen definiert, an denen  $\phi$  eine Singularität besitzt.

Durch den Formalismus in (6.25) lassen sich ebenfalls Quellen an anderen Stellen ausdrücken. Die Gleichung

$$\Delta\phi = -4\pi A \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (6.26)$$

wird durch das Potential

$$\phi = \frac{A}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (6.27)$$

gelöst. Diese Lösung beschreibt eine Quelle an der Stelle  $\vec{x}_0$ . Gleichung (6.26) kann als Bestimmungsgleichung für diese Quellströmung angesehen werden. Im Gegensatz zur homogenen Laplace-Gleichung (6.5) gilt (6.26) im gesamten Raum, also auch in dem singulären Punkt. Gleichung (6.26) stellt damit eine Erweiterung von (6.5) dar. Die Eigenschaften der Quelle sind mit in der Differentialgleichung enthalten.

Im folgenden sollen die obigen Überlegungen zur Potentialströmung auf die Akustik übertragen werden. Betrachtet wird die Lösung für eine atmende Kugel. Das akustische Potential hat die Form

$$\phi = \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.28)$$

Es löst die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \Delta \phi = 0 \quad (6.29)$$

Wie oben gilt diese Gleichung nicht im Punkt  $\vec{x} = 0$ . Beides, die Lösung (6.28) und die Bestimmungsgleichung (6.29) besitzen jetzt eine kompliziertere Form als im Fall der Quellströmung. Dennoch kann auch hier die Singularität in formal gleicher Weise untersucht werden. Analog zu (6.19) wird das Integral der linken Seite von (6.29) über eine gedachte Kugel  $V_K$  um  $\vec{x} = 0$  gebildet. Das heißt, auch über die Stelle, an der die linke Seite zunächst nicht definiert ist, wird wieder integriert. Es ergibt sich

$$\int_{V_K} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \Delta \phi \right] dV_K = \int_{V_K} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi dV_K - \int_{V_K} \Delta \phi dV_K \quad (6.30)$$

Dabei wurde das Integral aufgeteilt. Zunächst wird der Term mit der Zeitableitung getrennt betrachtet. Setzt man die Lösung (6.28) ein, ergibt sich für den Zeitableitungsterm

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} = -k^2 \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.31)$$

Damit folgt für das erste Integral auf der rechten Seite von (6.30)

$$\begin{aligned} \int_{V_K} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} dV_K &= \int_0^a 4\pi r^2 \left( -k^2 \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right) dr \\ &= -4\pi k^2 A \int_0^a r e^{i\omega(t-r/c)} dr \end{aligned} \quad (6.32)$$

Die Umformungen ergeben sich dadurch, daß der Integrand nur von  $r$  abhängt. Innerhalb einer infinitesimalen Kugelschale mit dem Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  ist der Integrand konstant. Man braucht daher nur mit dem Volumen der Kugelschale  $4\pi r^2 dr$  zu multiplizieren und das Ergebnis über  $r$  zu integrieren.

Von Interesse ist der Wert des Integrales für unendliche kleine Kugelvolumen, die nur die singuläre Stelle umfassen. Analog zu (6.22) wird daher der Limes gebildet. Der Term  $e^{i\omega(t-r/c)}$  ist beschränkt. Daher gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a r e^{i\omega(t-r/c)} dr = 0 \quad (6.33)$$

## 6 Schallquellen

Damit folgt für das erste Teilintegral

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} dV_K = 0 \quad (6.34)$$

Der Zeitableitungsterm besitzt zwar eine Singularität an der Stelle  $\vec{x} = 0$ , jedoch ist diese Singularität zu schwach um einen endlichen Wert für das Integral über ein unendlich kleines Kugelvolumen zu ergeben.

Als nächstes wird das zweite Teilintegral auf der rechten Seite von (6.30) betrachtet. Dieses enthält den Laplace-Term. Das Volumenintegral über das Kugelvolumen  $V_K$  wird zunächst mit dem Satz von Gauss in ein Oberflächenintegral über  $S_K$  umgewandelt. Dieser Schritt entspricht der Umformung in (6.15) jedoch in umgekehrter Richtung. Es ergibt sich

$$\int_{V_K} \Delta \phi dV_K = \int_{S_K} \vec{n} \operatorname{grad} \phi dS_K = \int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS_K \quad (6.35)$$

Um das Integral für die betrachtete Lösung (6.28) zu ermitteln, ist die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} = -\frac{A}{r^2} e^{i\omega(t-r/c)} - i \frac{A\omega}{rc} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.36)$$

einzusetzen. Die Berechnung des Oberflächenintegrals ist einfach, da der Integrand nach (6.36) nur von  $r$  abhängt und damit auf der gesamten Oberfläche konstant ist. Die Integration liefert

$$\int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS_K = 4\pi a^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}(a) = -4\pi A e^{i\omega(t-a/c)} - i4\pi a \frac{A\omega}{c} e^{i\omega(t-a/c)} \quad (6.37)$$

Untersucht werden soll die singuläre Stelle bei  $r = 0$ . Es wird daher wieder der Grenzfall einer unendlich kleinen Kugel betrachtet. Der zweite Summand in (6.37) hängt für kleine Werte linear von  $a$  ab. Im Limes liefert daher nur der erste Summand einen Beitrag. Es folgt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \Delta \phi dV_K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS_K = -4\pi A e^{i\omega t} \quad (6.38)$$

Damit ergibt sich für das gesamte Integral

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi dV_K = +4\pi A e^{i\omega t} \quad (6.39)$$

Dies Ergebnis ist die Entsprechung zu Gleichung (6.22), die für den Fall einer einfachen Quellströmung abgeleitet wurde. Es folgen die gleichen Überlegungen. Der Integrand in (6.39) ist bis auf die Stelle  $r = 0$  überall gleich Null. Dort ist sein Wert singulär. Das

Integral über diese Singularität liefert einen endlichen Wert. Damit kann die Singularität quantifiziert werden. Dies kann formal mit der  $\delta$ -Funktion dargestellt werden. Für die Lösung (6.28) kann

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} = 4\pi A e^{i\omega t} \delta(\vec{x}) \quad (6.40)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung gilt nun überall auch in dem singulären Punkt bei  $r = 0$ .

Bisher wurde nur der harmonische Fall betrachtet. Die Überlegungen gelten jedoch auch für nichtharmonische Lösungen der Form

$$\phi = \frac{f(t-r/c)}{r} \quad (6.41)$$

Sie erfüllt die Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = 4\pi f(t) \delta(\vec{x}) \quad (6.42)$$

Die Herleitung dieser Beziehung wird hier nicht im Detail gezeigt. Zerlegt man die Zeitfunktion  $f(t)$  in ihre harmonischen Anteile, so gilt für die Anteile einzeln die Gleichung (6.40). Durch Aufsummieren beziehungsweise Integrieren der harmonischen Anteile läßt sich dann von (6.40) auf (6.42) schließen.

Um auf die Gleichung (6.40) zu gelangen wurde von der Lösung (6.28) ausgegangen. Analog ergibt sich für die Lösung (6.41) die Beziehung (6.42). Man kann sich aber auch umgekehrt (6.42) als Bestimmungsgleichung für die Lösung (6.41) vorstellen. Die Lösungen (6.28) beziehungsweise (6.41) wurden bisher als Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = 0 \quad (6.43)$$

betrachtet, die eine Randbedingung an der Oberfläche einer atmenden Kugel erfüllen. Das heißt, Gleichung (6.43) gilt überall außerhalb der atmenden Kugel. Im Grenzfall einer unendlich kleinen Kugel ist dies überall bis auf den Punkt  $r = 0$ . Dagegen gilt (6.42) auch in diesem Punkt. Es gibt keinen Rand mehr. Statt der Randbedingung bestimmt jetzt die rechte Seite der Differentialgleichung die Lösung. Im Fall von (6.42) beschreibt die rechte Seite eine punktförmige Monopolquelle. Man hat sozusagen die Randbedingung gegen den Quellterm auf der rechten Seite eingetauscht.

Zu Beginn dieses Abschnittes wurde das Gedankenexperiment mit der immer kleiner werdenden atmenden Kugel vorgestellt. Im Grenzfall ergab sich dann eine punktförmige Schallquelle. Man kann sich die Punktquelle jedoch auch noch anders veranschaulichen. Für das Integral über ein Kugelvolumen  $V_K$  mit Oberfläche  $S_K$  gilt nach (6.35) der Zusammenhang

$$\int_{V_K} \Delta \phi \, dV_K = \int_{S_K} \vec{n} \, \text{grad} \phi \, dS_K = \int_{S_K} \vec{n} \, \vec{v} \, dS_K \quad (6.44)$$



## 6 Schallquellen

Das Oberflächenintegral über  $\vec{n} \vec{v}$  ergibt den Volumenfluß über die Oberfläche. Multipliziert mit der Dichte  $\rho_0$  ergibt sich daraus die Masse, die pro Zeit durch die Oberfläche bewegt wird, denn es gilt

$$\text{Volumenfluß} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit} \times \text{Dichte}}$$

Für das Feld nach Gleichung (6.28) wurde gezeigt, das in Grenzfall eines unendlich kleinen Volumens

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \Delta \phi \, dV_K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \vec{n} \vec{v} \, dS_K = -4\pi A e^{i\omega t} \quad (6.45)$$

gilt. Das bedeutet, die Lösung (6.28) beschreibt an dem Punkt  $r = 0$  eine Massenquelle. Der Massenfluß (Masse pro Zeit) aus diesem Punkt ist mit

$$Q_M = -4\pi A e^{i\omega t} \rho_0 \quad (6.46)$$

gegeben. Man kann sich die akustische Monopolquelle – statt als kleine atmende Kugel – als eine periodisch schwankende Massenquelle vorstellen. Diese bewirkt auch ein entsprechendes Schallfeld.

Das Ergebnis (6.46) stimmt bis auf den  $e^{i\omega t}$ -Term mit der Formel für eine Punktquelle in einer stationäre Potentialströmung überein. Das bedeutet, in der Nähe der Singularität verhält sich die akustische Lösung anscheinend wie eine stationäre Potentialströmung. In einer kleinen Umgebung um die singuläre Stelle  $r = 0$  stimmt das Schnellefeld der Lösung (6.28) mit dem Geschwindigkeitsfeld einer angepaßten Potentialströmung überein. Allerdings schwankt das Schnellefeld und für jeden Zeitpunkt muß die Quellstärke der Potentialströmung entsprechend angepaßt werden. Das akustische Feld kann in der kleinen Umgebung als quasi-statisch betrachtet werden. Wie klein die Umgebung tatsächlich ist, hängt davon ab, wie schnell der Limes in (6.45) konvergiert. Eine genauere Untersuchung ergibt, daß der Abstand klein gegenüber der Wellenlänge sein muß ( $r \ll \lambda$ ).

## 6.2 Kontinuierliche Quellverteilung

Bisher wurde eine Punktquelle an der Stelle  $\vec{x} = 0$  betrachtet. Mit dem im letzten Abschnitt vorgestellten Formalismus ist auch die Beschreibung von Quellen an einer beliebigen Stelle einfach möglich. Die inhomogene Wellengleichung

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 4\pi f(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (6.47)$$

wird durch

$$\phi = \frac{f(t - |\vec{x} - \vec{x}_0|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (6.48)$$

## 6.2 Kontinuierliche Quellverteilung

gelöst. Die Lösung besitzt ihre Singularität an der Stelle  $\vec{x}_0$ . Sie stellt die Lösung für eine atmende Kugel dar, deren Mittelpunkt sich bei  $\vec{x}_0$  befindet.

Da die Wellengleichung (6.47) linear ist, lassen sich auch mehrere Punktquellen an verschiedenen Orten einfach überlagern. Auf der rechten Seite erscheint dabei eine Summe über mehrere  $\delta$ -Funktionen. Für  $N$  Punktquellen ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = 4\pi \sum_{n=1}^N f_n(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \quad (6.49)$$

Dabei ist  $f_n(t)$  die Stärke der Quelle  $n$  zur Zeit  $t$ . Mit  $\vec{x}_n$  ist der Ort der Quelle  $n$  bezeichnet. Als Lösung von (6.49) ergibt sich entsprechend auch eine Summe:

$$\phi = \sum_{n=1}^N \frac{f_n(t - |\vec{x} - \vec{x}_n|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}_n|} \quad (6.50)$$

Hier sei angemerkt, daß für jede Quelle ein andere Zeit

$$t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_n|}{c} \quad (6.51)$$

in die Funktion  $f_n$  eingesetzt werden muß. Diese Zeit wird retardierte Zeit genannt. Sie ist die Zeit, zu der das Signal, welches zur Zeit  $t$  am Beobachter  $\vec{x}$  ankommt, von der Quelle am Ort  $\vec{x}_n$  ausgesandt wurde. Wie in Abbildung 6.1 verdeutlicht, muß das Signal

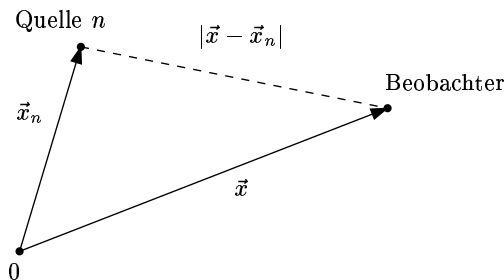


Abbildung 6.1: Zur Erklärung der retardierten Zeit

die Strecke  $|\vec{x} - \vec{x}_n|$  zurücklegen. Dabei vergeht die Zeitspanne  $|\vec{x} - \vec{x}_n|/c$ . Diese muß von der aktuellen Zeit  $t$  abgezogen werden, um die Quellzeit zu erhalten. Die retardierte Zeit hängt damit von dem Beobachtungsort, dem Quellort und der aktuellen Zeit ab. Im folgenden werden noch häufiger Ausdrücke der Form (6.51) vorkommen.

Die Lösung für mehrere Punktquellen (6.50) wird durch einfaches Aufsummieren der Lösungen für die einzelnen Quellen gebildet. Auf analoge Weise kann auch die Lösung für eine kontinuierliche Quellverteilung gewonnen werden. Die inhomogene

## 6 Schallquellen

Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = 4\pi q(\vec{x}, t) \quad (6.52)$$

enthält auf der rechten Seite eine Feldfunktion  $q(\vec{x}, t)$ , die die Quellen beschreibt. Damit kann übrigens auch die Quellverteilung aus (6.47) oder (6.49) dargestellt werden. Das Feld  $q(\vec{x}, t)$  muß nur entsprechend gewählt werden. Um nun ein beliebiges Feld  $q(\vec{x}, t)$  aus  $\delta$ -Funktionen zusammensetzen wird ein Integral statt einer Summe benötigt. Nach den Rechenregeln für  $\delta$ -Funktionen gilt

$$q(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} q(\vec{y}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (6.53)$$

Diese Regel wurde bereits im Abschnitt 1.5 vorgestellt. Mit der Schreibweise  $d^3\vec{y}$  wird verdeutlicht, daß die Integrationsvariable  $\vec{y}$  und nicht  $\vec{x}$  ist.

Die Quellverteilung  $q(\vec{x}, t)$  wird in Anteile zerlegt, die dem Integrand in (6.53) entsprechen. Diese Anteile sind Punktquellen, für die die Lösung bekannt ist. Der Integrand hängt sowohl von  $\vec{x}$  als auch von  $\vec{y}$  ab. Für einen Anteil, also für ein festes  $\vec{y}$ , ergibt sich die Wellengleichung der Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi_{\vec{y}} = 4\pi q(\vec{y}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.54)$$

Das Symbol  $\phi_{\vec{y}}$  soll deutlich machen, daß die Lösung jetzt auch von dem gewählten  $\vec{y}$  abhängt. Die Gleichung (6.54) entspricht der Form (6.47), wenn man

$$f(t) = q(\vec{y}, t) \quad (6.55)$$

setzt, und für  $\vec{x}_0$  einfach  $\vec{y}$  schreibt. Damit lautet die Lösung von (6.54)

$$\phi_{\vec{y}}(\vec{x}, t) = \frac{f(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.56)$$

Das ist das Feld, welches durch einen Anteil der Quellverteilung  $q(\vec{x}, t)$  erzeugt wird. Um das gesamte Feld – und damit die Lösung von (6.52) – zu erhalten, müssen alle Anteile aufsummiert beziehungsweise aufintegriert werden.

Dazu wird die Teillösung (6.56) in (6.54) eingesetzt und anschließend werden beide Seiten über alle möglichen Quellpunkte  $\vec{y}$  – also über den gesamten Raum – integriert. Es ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\vec{x}}\right) \phi_{\vec{y}}(\vec{x}, t) d^3\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^3} 4\pi q(\vec{y}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (6.57)$$

Das Symbol  $\Delta_{\vec{x}}$  soll verdeutlichen, daß die Ableitung nach der  $\vec{x}$ -Variablen und nicht nach  $\vec{y}$  gemeint ist. Die rechte Seite entspricht bis auf den Faktor  $4\pi$  dem Integral in

(6.52). Auf der linken Seite kann man den Wellenoperator mit den Ableitungen nach Ort und Zeit mit der Integration vertauschen. Dies ist ohne Probleme möglich, wenn die Integrationsgrenzen nicht von den Größen  $\vec{x}$  und  $t$  abhängen. Die Integrationsgrenzen liegen um Unendlichen. Es wird daher gefordert, daß das Feld  $q(\vec{y}, t)$  im Unendlichen verschwindet. Dies bedeutet keine wirkliche Einschränkung, da Quellen im Unendlichen sowieso nie betrachtet werden. In fast allen Fällen kann sogar der Bereich der Quellen mit einem Volumen endlicher Ausdehnung abgedeckt werden. Es ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\vec{x}}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} = 4\pi q(\vec{x}, t) \quad (6.58)$$

Diese Beziehung besitzt die Form der Gleichung (6.52). Das Integral auf der linken Seite entspricht der Lösung  $\phi$ .

In der Literatur hat es sich ergeben, daß der Faktor  $4\pi$  üblicherweise in die Lösung geschrieben wird. Um diese Darstellung zu erhalten, muß man Gleichung (6.58) nur durch  $4\pi$  dividieren. Das Feld

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.59)$$

erfüllt damit die inhomogene Wellengleichung der Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = q(\vec{x}, t) \quad (6.60)$$

Anzumerken ist, daß die Lösung (6.59) nur im unendlich ausgedehnten offenen Raum gilt. In Abbildung 6.2 ist in einem Schema zusammengefaßt, auf welchem Wege sich die Gleichung (6.60) ergeben hat. Ein Ausgangspunkt ist die einfache Lösung für eine Monopolquelle im offenen Raum. Entsprechend gilt die gesamte Überlegung nur für den Fall, daß keine Begrenzungen vorhanden sind.

### Greensche Funktion

In vielen theoretischen Arbeiten wird eine spezielle Darstellung der Lösung (6.59) verwendet. Diese soll im folgenden vorgestellt werden. Für eine stetige Funktion  $B(\tau)$  gilt

$$B(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \delta(\tau_0 - \tau) d\tau \quad (6.61)$$

Dabei kann  $\tau_0$  frei gewählt werden. Für die folgende Herleitung wird speziell

$$\tau_0 = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (6.62)$$

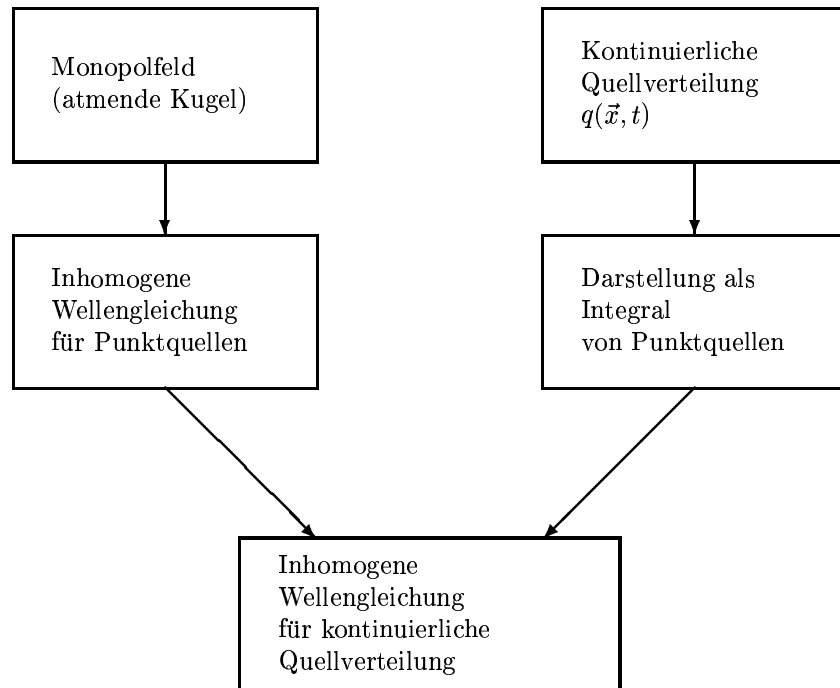


Abbildung 6.2: Zur Herleitung der inhomogenen Wellengleichung

gewählt und die Funktion  $B(\tau)$  mit

$$B(\tau) = \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.63)$$

für feste Werte von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  definiert. Setzt man beide Definitionen in (6.61) ein, folgt der Zusammenhang

$$\frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau) d\tau \quad (6.64)$$

Auf der linken Seite ergibt sich der Integrand aus Gleichung (6.59). Damit kann dieser durch die rechte Seite ersetzt werden. Man erhält für die Lösung den Ausdruck

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) q(\vec{y}, \tau) d\tau d^3\vec{y} \quad (6.65)$$

wobei die Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = \frac{\delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.66)$$

eingeführt wurde. Die Lösung ist nun als Integral über den Raum und die retardierte Zeit  $\tau$  gegeben. Dies scheint zunächst weniger praktisch als die ursprüngliche Form (6.59). Jedoch besitzt die Darstellung (6.66) einige Vorteile, die für theoretische Untersuchungen sehr nützlich sind.

Die Funktion  $G$  wird allgemein als Greensche Funktion bezeichnet. Das Konzept der Greenschen Funktionen geht weit über die Akustik hinaus. In vielen Fällen kann die Lösung einer inhomogenen partiellen Differentialgleichung als Integral über das Produkt von einem Quellterm mit einer geeigneten Greenschen Funktion angegeben werden.

### 6.3 Schallquellen durch Störung der Massen-, Impuls- oder Energieerhaltung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die inhomogene Wellengleichung mit Quelltermen auf der rechten Seite betrachtet. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich inhomogene Wellengleichungen dieser Art ergeben, wenn die Erhaltung von Masse, Impuls oder Energie nicht überall erfüllt ist.

#### Energieerhaltung

Zuerst wird die Energieerhaltung untersucht. Die Energieerhaltung "steckt" sozusagen in dem Zusammenhang

$$p' = c^2 \rho' \quad (6.67)$$

Diese Gleichung folgt aus einer Druck-Dichte-Beziehung

$$p = p(\rho) \quad (6.68)$$

deren Existenz bei der Ableitung der Wellengleichung vorausgesetzt wurde. Die Schallgeschwindigkeit  $c$  ist durch

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (6.69)$$

definiert. Damit bestimmt die Funktion  $p(\rho)$  die Schallgeschwindigkeit. Konkret hängt  $p(\rho)$  von dem Medium ab. Bei Gasen ist die Zustandsänderung in den Schallwellen adiabatisch, und  $p(\rho)$  ist eine Adiabatengleichung.

Bei vielen Vorgängen in der Praxis ist jedoch durch Energiezufuhr die Zustandsänderung nicht mehr adiabatisch. Ein Beispiel dafür ist die Verbrennung von Gasen. Dort wird Bindungsenergie in thermische Energie umgewandelt. Der Druck  $p$

## 6 Schallquellen

ist dann nicht nur von der Dichte sondern auch noch von der freigesetzten Energie abhängig.

Wird dem Gas irgendwie Energie zugeführt, so hängt der Druck zusätzlich von der zugeführten Energiemenge  $e_z$  ab. Es ergibt sich

$$p = p(\rho, e_z) \quad (6.70)$$

Durch diese Erweiterung verliert Gleichung (6.67) seine Gültigkeit. Eine entsprechende Gleichung wird jedoch bei der Herleitung der Wellengleichung benötigt. Die Wellengleichung wird aus der linearisierten Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \quad (6.71)$$

und der linearisierten Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0 \quad (6.72)$$

abgeleitet. Dazu differenziert man (6.71) nach der Zeit und bildet die Divergenz von (6.72). Anschließend subtrahiert man die entstehenden Gleichungen. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \Delta p' = 0 \quad (6.73)$$

Diese Beziehung stellt sozusagen die "Vorstufe" der Wellengleichung für den Druck dar. Um die Wellengleichung zu erhalten, wird normalerweise die Variable  $\rho'$  mit (6.67) durch  $p'$  ersetzt. Dies ist jedoch bei Energiezufuhr nicht möglich.

Um  $\rho'$  in (6.73) zu ersetzen, muß eine neue Beziehung zwischen  $\rho'$  und  $p'$  gefunden werden. Dazu wird das totale Differential von  $\rho$  bei Energiezufuhr betrachtet. Aus (6.70) folgt

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{e_z} dp + \left. \frac{\partial \rho}{\partial e_z} \right|_p de_z \quad (6.74)$$

Aus (6.69) ergibt sich für die partielle Ableitung bei konstanter Energie  $e_z$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{e_z} = \frac{1}{c^2} \quad (6.75)$$

Ist die zugeführte Energiemenge  $de_z$  gleich Null, so verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von (6.74), und man kann direkt (6.67) ableiten. Bei Energiezufuhr ist  $de_z$  ungleich Null, und es ergibt sich eine Abweichung. Um diese zu berechnen wird im folgenden von einem idealen Gas ausgegangen. Es gilt die Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (6.76)$$

### 6.3 Schallquellen durch Störung ...

Dabei ist  $R$  die spezifische Gaskonstante. Die Zustandsgleichung kann zu

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (6.77)$$

umgeformt werden. Es folgt für die partielle Ableitung bei konstanten Druck

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial e_z} \right|_p = -\frac{p}{RT^2} \left. \frac{\partial T}{\partial e_z} \right|_p \quad (6.78)$$

Damit wurde die Ableitung von  $\rho$  durch eine Ableitung von der Temperatur  $T$  ausgedrückt. Bei Zufuhr von Energie steigt die Temperatur. Das bedeutet, die Ableitung auf der rechten Seite von (6.78) ist positiv.

Üblicherweise wird in der Thermodynamik die inverse Funktion  $e_z(T)$  betrachtet. Es wird die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck mit

$$c_p = \left. \frac{\partial e_z}{\partial T} \right|_p \quad (6.79)$$

eingeführt. Daraus ergibt sich für die gesuchte Ableitung

$$\left. \frac{\partial T}{\partial e_z} \right|_p = \frac{1}{c_p} \quad (6.80)$$

Die Größen  $R$  und  $c_p$  sind über

$$R = c_p - c_v \quad (6.81)$$

miteinander verknüpft. Dabei ist  $c_v$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen. In der Akustik werden meistens – wie in der Strömungsmechanik – alle Größen spezifisch auf das Volumen bezogen. In diesem Fall entspricht ein konstantes Volumen eines Fluidelementes einer konstanten Dichte  $\rho$  in dem Fluidelement.

Für das ideale Gas läßt sich die Schallgeschwindigkeit direkt berechnen. Dies wurde bereits in Abschnitt 2.3 durchgeführt. Es gilt

$$c^2 = \varkappa \frac{p}{\rho} \quad (6.82)$$

Dabei ist der sogenannte Adiabatenexponent mit

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (6.83)$$

gegeben. Mit Hilfe der Beziehungen (6.79) bis (6.83) läßt sich nun Gleichung (6.78) auf eine "schönere" Form bringen. Mit (6.80) folgt

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial e_z} \right|_p = -\frac{p}{RT^2} \frac{1}{c_p} \quad (6.84)$$

Löst man (6.76) nach  $T$  auf und setzt in (6.84) ein, ergibt sich

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial e_z} \right|_p = -\frac{\rho^2 R}{p c_p} = -\frac{\varkappa}{c^2} \rho \frac{c_p - c_v}{c_p} \quad (6.85)$$



## 6 Schallquellen

Anschließend folgt

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial e_z} \right|_p = -\frac{\rho}{c^2} (\varkappa - 1) \quad (6.86)$$

Damit sind die beiden Ableitungen des totalen Differentials in (6.74) als Funktion der Zustandsgrößen ausgedrückt. Setzt man die Ausdrücke (6.75) und (6.86) in das totale Differential ein, erhält man

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp - \frac{\rho (\varkappa - 1)}{c^2} de_z \quad (6.87)$$

Dies kann nun verwendet werden, um die Ableitung von  $\rho'$  in (6.73) zu ersetzen. Dabei ist zu bemerken, daß für die Differentiale

$$dp = dp' \quad (6.88)$$

und

$$d\rho = d\rho' \quad (6.89)$$

gilt. Es ergibt sich für die zweite Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\rho_0 (\varkappa - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} \quad (6.90)$$

Dabei ist  $\rho$  durch  $\rho_0$  ersetzt worden. Das bedeutet, die Ableitungen in (6.74) werden für den Ausgangszustand mit  $p_0$  und  $\rho_0$  berechnet, genau wie die Schallgeschwindigkeit jetzt mit

$$c^2 = \varkappa \frac{p_0}{\rho_0} \quad (6.91)$$

gegeben ist. Eigentlich müßte man nun auch  $c_0$  statt  $c$  schreiben. Das gilt übrigens auch für Gleichung (6.67). Der Index 0 wurde jedoch von Anfang an weggelassen, da normalerweise keine Gefahr der Verwechslung besteht. Bei den thermodynamischen Überlegungen ist jedoch die Schallgeschwindigkeit nach (6.82) der tatsächliche Wert und nicht der Wert im Ausgangszustand. Das heißt, die Größe  $c$  schwankt dann auch zeitlich in einer Schallwelle. Im folgenden bedeutet  $c$  wieder die mittlere Schallgeschwindigkeit im akustischen Sinn nach Gleichung (6.91).

Schließlich kann (6.90) in die "Vorstufe" der Wellengleichung (6.73) eingesetzt werden. Es wird so umgeformt, daß die linken Seite der homogenen Wellengleichung entspricht. Der zusätzliche Term wird auf die rechte Seite gebracht. Man erhält

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \Delta p' = \frac{\rho_0 (\varkappa - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} \quad (6.92)$$

Diese Gleichung stellt nun tatsächlich eine inhomogene Wellengleichung dar, wie sie im letzten Abschnitt besprochen wurde. Dort wurde zwar die Wellengleichung für das

Potential  $\phi$  betrachtet, aber alle Ergebnisse lassen sich auch auf die Wellengleichung für den Schalldruck übertragen. Die Gleichung (6.92) entspricht der allgemeinen Form

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \Delta p' = q(\vec{x}, t) \quad (6.93)$$

mit der Quellstärkeverteilung

$$q(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0 (\kappa - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} \quad (6.94)$$

Die Quellstärke hängt von der zweiten Ableitung der zugeführten Energiemenge nach der Zeit ab. Dies Ergebnis scheint plausibel zu sein. Zum Beispiel brennt eine Kerze ohne Geräusche. Zweifellos wird bei der Verbrennung Energie freigesetzt, jedoch ist bei gleichmäßiger Verbrennung die zweite Ableitung gleich Null. Eine instationäre Verbrennung – wie zum Beispiel das Zünden eines Feuerzeugs – ist dagegen hörbar. Ein extremes Beispiel ist der Blitz bei einem Gewitter. Dort ist  $e_z$  relativ hoch und zudem ist der Vorgang extrem instationär. Dies ergibt eine relativ starke zweite Ableitung und damit ein lautes Geräusche, den Donner.

Für den freien Raum läßt sich die Lösung von (6.93) als Integral darstellen. Es gilt

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.95)$$

Für die spezielle Quellstärke (6.94) ergibt sich als Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0 (\kappa - 1)}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e_z(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.96)$$

Dabei wurde die Zeitableitung aus dem Integral herausgezogen. In der Praxis sind natürlich immer irgendwo Begrenzungen vorhanden, und die Lösung für den freien Raum ist nicht gültig. Die Lösung beinhaltet nicht die Reflexionen, die von vorhandenen Rändern ausgehen. Dennoch kann sie für viele Abschätzungen, bei denen diese Reflexionen keine Rolle spielen, verwendet werden. Am Schluß sei nochmal darauf hingewiesen, daß diese Ergebnisse bei Energiezufuhr nur für ein ideales Gas gelten.

### Massenerhaltung

Bisher wurde nur die Störung der Energieerhaltung betrachtet. Analog kann auch die Verletzung der Massenerhaltung untersucht werden. Jedoch lassen sich für die Massenzuführung im Raum nicht so einfach praktische Beispiele nennen, denn Masse kann nicht einfach im Raum entstehen oder verschwinden. Natürlich kann Gas irgendwo ausströmen. Dazu ist aber immer eine Leitung also eine Berandung notwendig. Nur wenn die Berandung vernachlässigt werden kann, wird sich eine Massenquelle im freien Raum näherungsweise realisieren lassen.

## 6 Schallquellen

Die Massenerhaltung wird durch die linearisierte Kontinuitätsgleichung (6.71) beschrieben. Durch Massenzufuhr ändert sich die Dichte, selbst wenn die Divergenz von  $\vec{v}'$  gleich Null ist. Dies kann durch

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = \frac{\partial m_z}{\partial t} \quad (6.97)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist  $m_z$  die zugeführte Masse pro Volumen. Im Gegensatz zu (6.71) ist die neue Kontinuitätsgleichung (6.97) inhomogen. Die linearisierte Euler-Gleichung (6.72) gilt weiterhin auch bei Massenzufuhr. Um eine Wellengleichung für den Druck zu erhalten wird wie bisher die Zeitableitung der Kontinuitätsgleichung gebildet. Davon wird die Divergenz von Gleichung (6.72) subtrahiert. Es ergibt sich eine "Vorstufe" zur Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} \quad (6.98)$$

Diese ist jedoch im Gegensatz zu (6.73) bereits inhomogen. Um eine Wellengleichung für den Druck zu erhalten muß noch  $\rho'$  in (6.98) ersetzt werden. Dazu ist jedoch eine weitere Annahme notwendig. Es wird vorausgesetzt, daß die zugeführte Masse die gleiche Dichte  $\rho_0$  wie die bereits vorhandene Masse besitzt. Dies kann man sich so vorstellen, daß Gas mit den gleichen Eigenschaften und der gleichen Temperatur zugeführt wird. In diesem Fall gilt weiterhin die Beziehung (6.67) und  $\rho'$  kann einfach durch  $p'$  ersetzt werden. Es ergibt sich

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} \quad (6.99)$$

Dies ist wieder eine inhomogene Wellengleichung der Form (6.93) mit der Quellverteilung

$$q(\vec{x}, t) = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} \quad (6.100)$$

Es zeigt sich, daß instationäres Zuführen von Masse Schall bewirkt.

Hat die zugeführte Masse andere Eigenschaften als die vorhandene Masse – zum Beispiel es wird Helium in Luft zugeführt oder Luft mit anderer Temperatur – gilt  $p' = c^2 \rho'$  nicht mehr. Um  $\rho'$  in (6.98) zu ersetzen, muß die Abhängigkeit der Dichte von der zugeführten Masse berücksichtigt werden. Zweckmäßigerweise führt man folgende Bezeichnungen ein:

- $\rho_z$ : Dichte der zugeführten Masse
- $\rho_u$ : Dichte der ursprünglich vorhandenen Masse
- $\beta$ : Volumenanteil der zugeführten Masse

Für die gesamte Masse pro Volumen  $\rho$  gilt damit

$$\rho = \beta \rho_z + (1 - \beta) \rho_u \quad (6.101)$$

### 6.3 Schallquellen durch Störung ...

Der erste Summand auf der rechten Seite entspricht gerade der zugeführten Masse pro Volumen

$$m_z = \beta \rho_z \quad (6.102)$$

Damit kann (6.101) in der Form

$$\rho = m_z + \rho_u - \beta \rho_u \quad (6.103)$$

geschrieben werden. Die Größen  $\rho_z$  und  $\rho_u$  hängen von dem Druck  $p$  ab. Die Dichte  $\rho$  der vorhandenen Mischung hängt damit von  $p$  und  $\beta$  ab

$$\rho = \rho(p, \beta) \quad (6.104)$$

Die zeitlichen Schwankungen von  $\rho'$  lassen sich entsprechend durch Schwankungen von  $p$  und  $\beta$  ausdrücken. Um den Zusammenhang zu berechnen, wird (6.103) zweimal nach  $t$  differenziert. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \rho_u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\beta \rho_u) \quad (6.105)$$

Um die rechte Seite weiter zu vereinfachen, wird vorausgesetzt, daß für den Volumenanteil

$$\beta \ll 1 \quad (6.106)$$

gilt. Damit können im Sinne einer Linearisierung Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Man führt die Zerlegung in Gleich- und Schwankungsanteil

$$\rho_u = \rho_0 + \rho'_u \quad (6.107)$$

für das ursprüngliche Gas ein. Mit  $\rho_0$  ist die Dichte im Ausgangszustand ohne zugeführte Masse bezeichnet. Die Dichteschwankungen sind über die Schallgeschwindigkeit mit den Druckschwankungen verknüpft. Wird mit  $c$  die Schallgeschwindigkeit in der ursprünglichen Masse bezeichnet, so gilt für infinitesimale Schwankungen

$$c^2 d\rho_u = dp \quad (6.108)$$

Eine analoge Beziehung mit einer zweiten Schallgeschwindigkeit gilt für die zugeführte Masse. Diese Beziehung wird hier jedoch gar nicht benötigt. Mit (6.107) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho'_u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' \quad (6.109)$$

Damit kann der zweite Summand auf der rechten Seite von (6.105) ersetzt werden. Für den Ausdruck im dritten Summand auf der rechten Seite ergibt sich

$$\beta \rho_u = \beta \rho_0 + \beta \rho'_u \quad (6.110)$$

## 6 Schallquellen

Das Produkt  $\beta \rho'_{\mathbf{u}}$  zweier kleiner Größen kann gegenüber  $\beta \rho_0$  vernachlässigt werden. Im Sinne dieser Linearisierung folgt die Näherung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\beta \rho_{\mathbf{u}}) \approx \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\beta \rho_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (6.111)$$

Somit ergibt sich aus (6.105) die linearisierte Beziehung

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (6.112)$$

Damit sind die Schwankungen von  $\rho'$  durch Schwankungen von  $m_z$ ,  $p'$  und  $\beta$  ausgedrückt. Beim Einsetzen von (6.112) in (6.98) hebt sich der Term mit  $m_z$  gerade auf. Es ergibt sich die inhomogene Wellengleichung für den Druck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_0 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (6.113)$$

Die rechte Seite repräsentiert wieder die Quellstärkeverteilung. Das Produkt  $\rho_0 \beta$  ist die Masse pro Volumen, die von der zugeführten Masse verdrängt wurde. Es ergibt sich, daß zeitliche Schwankungen des verdrängten Volumens die Quellstärke bestimmen. Instationäres Verdrängen von Masse ergibt Schall. Es kommt damit gar nicht auf die zugeführte Masse selbst an. Die Dichte der zugeführten Masse spielt überhaupt keine Rolle! Lediglich das verdrängte Volumen und die Dichte des verdrängten Mediums ist wichtig.

Im freien Raum ohne feste Wände kann die Lösung von (6.113) wieder als Integral angegeben werden. Es gilt

$$p'(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\beta(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.114)$$

Dabei wurde die Zeitableitung vor das Integral gezogen.

### Impulserhaltung

Als drittes soll noch die Störung der Impulserhaltung betrachtet werden. Die Impulserhaltung wird durch die linearisierte Euler-Gleichung ausgedrückt. Wird irgendwo Impuls zugeführt ergibt sich folgende Form dieser Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \text{grad } p' = \vec{g}(\vec{x}, t) \quad (6.115)$$

Dabei ist  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  der Impuls, der pro Volumen und pro Zeiteinheit am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  zugeführt wird. Dies kann auch als eine äußere Kraft pro Volumen, die auf das Medium wirkt, interpretiert werden. Die linearisierte Kontinuitätsgleichung bleibt durch die Impulszufuhr unverändert. Es gilt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v}' = 0 \quad (6.116)$$

Weiterhin wird durch die Impulszufuhr die Druck-Dichte-Beziehung nicht beeinträchtigt. Damit gilt der einfache Zusammenhang  $p' = c^2 \rho'$ . Um eine Wellengleichung für den Druck zu erhalten, wird wie gewohnt (6.116) nach der Zeit abgeleitet und die Divergenz von (6.115) gebildet. Die resultierenden Gleichungen werden voneinander subtrahiert und die Größe  $\rho'$  durch  $p'$  ersetzt. Man erhält die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = -\operatorname{div} \vec{g} \quad (6.117)$$

Diesmal ergibt sich für die Quellstärke kein Zeitableitungsterm, sondern ein Ausdruck mit Divergenz-Operator. Das bedeutet, die Schallentstehung hängt von dem räumlichen Gradient der Impulszufuhr ab. Analog zu (6.114) kann auch für (6.117) die Lösung im freien Raum ohne Wände als Integral angegeben werden. Sie lautet

$$p'(\vec{x}, t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\{\operatorname{div} \vec{g}\}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.118)$$

Dabei ist zu beachten, daß sich der Ausdruck

$$\{\operatorname{div} \vec{g}\}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) \quad (6.119)$$

von

$$\operatorname{div} \{\vec{g}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)\} \quad (6.120)$$

unterscheidet. Um dies deutlich zu machen, wurden in (6.118) die geschweiften Klammern um den Divergenzterm verwendet. Mit (6.119) ist die Divergenz von  $\vec{g}$  an der Stelle  $\vec{y}$  zur retardierten Zeit  $t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$  gemeint. Dagegen ist bei (6.120) gar nicht eindeutig klar, auf welche Koordinaten sich die Divergenzbildung bezieht. Der Ausdruck in den geschweiften Klammern in (6.120) hängt von  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  und  $t$  ab. Das heißt, die räumliche Divergenz könnte bezüglich  $\vec{x}$  oder  $\vec{y}$  gemeint sein. Zu beachten ist, daß in den vorliegenden Integralen fast immer nur Ausdrücke der Form (6.119) auftreten.

Im folgenden wird eine Umformung des Integrals in (6.118) vorgestellt, die später noch öfters benutzt werden wird. Die Divergenz kann in einer anderen Schreibweise mit Summationskonvention als

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \quad (6.121)$$

dargestellt werden. Damit kann das in (6.118) auftretende Integral als Summe einzelner Integrale geschrieben werden. Es ergibt sich nach einigen Umformungen die Beziehung

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\{\operatorname{div} \vec{g}\}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_i(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.122)$$

Die räumliche Ableitung nach  $x_i$  ist scheinbar einfach aus dem Integral herausgezogen worden. Dies ist allerdings nur durch die spezielle Form des Integranden möglich. Die Details der Herleitung von (6.122) sind im Anhang dargestellt.

## 6.4 Dipol und Quadrupol

Im Abschnitt 6.1 wird der punktförmige Monopol untersucht. Diesen kann man sich als punktförmige Massenquelle vorstellen, die zeitlich schwankt. Durch eine räumlich verteilte Zufuhr von Masse ergibt sich eine kontinuierliche Quellverteilung. Entsprechend kann diese als verteilte Monopolquelle angesehen werden. Eine besondere Quellverteilung ergibt sich – wie im vorherigen Abschnitt gezeigt – durch Impulszufuhr. Sie hat die Form

$$q(\vec{x}, t) = -\operatorname{div} \vec{g}(\vec{x}, t) \quad (6.123)$$

Es tritt eine räumliche Ableitung im Quellterm auf. Eine solche Quellverteilung wird als Dipolverteilung bezeichnet. Im folgenden wird erklärt, was man unter einem Dipol versteht, und es soll verdeutlicht werden, wie die Quellverteilung (6.123) mit einem Dipol zusammenhängt.

Zunächst wird ein einfaches Beispiel betrachtet. Es wird das spezielle Feld

$$\vec{g}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} f(t) \delta(\vec{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.124)$$

in (6.123) eingesetzt. Es beschreibt eine punktförmige Zufuhr von Impuls in  $x_1$ -Richtung mit der Stärke  $f(t)$  an der Stelle  $\vec{x} = 0$ . Es ergibt sich

$$q(\vec{x}, t) = -f(t) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(\vec{x}) \quad (6.125)$$

Da  $g_2$  und  $g_3$  überall gleich Null sind erhält man unter Verwendung der Beziehung (6.122) als Lösung im freien Raum ohne Berandungen das Integral

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_1(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.126)$$

Mit der konkreten Gestalt von  $g_1$  folgt

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) \delta(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.127)$$

Das Integral kann einfach berechnet werden, da im Integrand das Produkt der Funktion  $\delta(\vec{y})$  mit einem Faktor auftritt. Als Resultat ergibt sich der Wert des Faktors bei  $\vec{y} = 0$ . Man erhält

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} \right\} \quad (6.128)$$

Eine Lösung dieser Form wurde bereits ausführlich in Abschnitt 5.5 behandelt. Die Lösung entspricht dem Schallfeld einer vibrierenden Kugel, deren Mittelpunkt sich bei

$\vec{x} = 0$  befindet. Im Abschnitt 5.5 werden Kugelkoordinaten zur Darstellung verwendet. Der Abstand vom Ursprung wird mit

$$r = |\vec{x}| \quad (6.129)$$

bezeichnet. Der Ausdruck in den geschweiften Klammern lautet dann

$$\frac{f(t - r/c)}{r} \quad (6.130)$$

Setzt man für  $f(t)$  eine harmonische Funktion der Form

$$f(t) = A e^{i\omega t} \quad (6.131)$$

ein, ergibt sich die Lösung für die harmonisch vibrierende Kugel:

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{A}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \right\} \quad (6.132)$$

Die Kugel bewegt sich dabei in  $x_1$ -Richtung. Zur Bewegung der Kugel ist eine Kraft notwendig. Es wird daher auch Impuls auf das Medium übertragen. Die Impulsübertragung der endlichen Kugel auf das Medium entspricht anscheinend einer punktförmigen Impulsquelle im Kugelmittelpunkt.

Führt man die Differentiation in (6.132) aus, erhält man die Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{A}{4\pi} \cos \theta \left[ \frac{i\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right] e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.133)$$

Diese Gleichung stimmt bis auf einen konstanten Vorfaktor mit (5.140) überein. Die Koordinate  $\theta$  gibt den Winkel zwischen dem Beobachtungsvektor  $\vec{x}$  und der  $x_1$ -Achse an. Daraus wird die Richtungsabhängigkeit des erzeugten Schalls deutlich. Senkrecht zur Richtung des zugeführten Impulses – beziehungsweise zur Bewegungsrichtung der Kugel – ist  $\cos \theta = 0$  und es ergibt sich keine Druckschwankung. Die maximale Amplitude wird in Richtung des zugeführten Impulses beobachtet. Durch den  $\cos \theta$ -Term ergibt sich die typische Verteilung für ein Dipolfeld.

Es stellt sich jedoch die Frage, warum eine Verteilung nach (6.133) mit dem Ausdruck "Dipolfeld" beziehungsweise "Dipol" bezeichnet wird. Dies beruht auf der Möglichkeit, daß man ein solches Feld als Überlagerung von zwei Monopolfeldern ansehen kann. Um dies zu verdeutlichen, wird zunächst ganz allgemein eine beliebige Lösung  $p' = a(\vec{x}, t)$  der inhomogenen Wellengleichung für eine gegebene Quellverteilung  $q(\vec{x}, t)$  betrachtet. Es soll gelten

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) a(\vec{x}, t) = q(\vec{x}, t) \quad (6.134)$$

Diese Gleichung wird nach  $x_1$  differenziert. Vertauscht man die Ableitungen auf der linken Seite ergibt sich

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{\partial a}{\partial x_1}(\vec{x}, t) = \frac{\partial q}{\partial x_1}(\vec{x}, t) \quad (6.135)$$



## 6 Schallquellen

Das bedeutet, das Feld  $\partial a / \partial x_1$  ist die Lösung für die Quellverteilung  $\partial q / \partial x_1$ . Kennt man die Lösung zu einer bestimmten Quellverteilung, dann lassen sich auch die Lösungen für Ableitungen der Quellverteilung einfach durch Differenzieren ermitteln.

Für die weiteren Überlegungen wird die Ableitung des Feldes  $a(\vec{x}, t)$  nach  $x_1$  betrachtet. Es gilt allgemein

$$\frac{\partial}{\partial x_1} a(\vec{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a(\vec{x}, t) - a(\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1, t)}{\varepsilon} \quad (6.136)$$

Dabei ist mit

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.137)$$

der Einheitsvektor in  $x_1$ -Richtung bezeichnet. Die Darstellung (6.136) erlaubt es, die Ableitung von  $a(\vec{x}, t)$  als Überlagerung zweier Felder zu betrachten. Definiert man die zwei Verteilungen  $b_1$  und  $b_2$  mit

$$\begin{aligned} b_1(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon} a(\vec{x}, t) \\ b_2(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\varepsilon} a(\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1, t) \end{aligned} \quad (6.138)$$

dann kann

$$\frac{\partial}{\partial x_1} a(\vec{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [b_1(\vec{x}, t) + b_2(\vec{x}, t)] \quad (6.139)$$

geschrieben werden. Die Felder  $b_1$  und  $b_2$  besitzen die Form von  $a$  jedoch sind sie mit  $1/\varepsilon$  skaliert. Zusätzlich ist  $b_2$  gespiegelt und um die Strecke  $\varepsilon$  in  $x_1$ -Richtung verschoben. Zur Veranschaulichung wird ein Beispiel betrachtet, in dem  $a(\vec{x}, t)$  einen Puls mit Maximum an der Stelle  $\vec{x} = 0$  beschreibt. In der Abbildung 6.3 sind die Verteilungen von  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_1 + b_2$  entlang der  $x_1$ -Achse dargestellt. Wird der Parameter  $\varepsilon$  verringert, so wird auch die Verschiebung von  $b_2$  immer kleiner. Ohne die Skalierung mit  $1/\varepsilon$  würde im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$  eine komplette Auslöschung eintreten. Mit der Skalierung wachsen  $b_1$  und  $b_2$  immer weiter an. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  werden die beiden Felder unendlich groß, und die Überlagerung ergibt die Ableitung von  $a$ . So kann die Ableitung eines Feldes nach einer Ortskoordinate immer als Überlagerung von zwei Feldern mit gleicher Form und unendlicher Stärke interpretieren werden.

Der Sinn dieser Vorüberlegungen wird deutlich, wenn man ein konkretes Feld für  $a(\vec{x}, t)$  einsetzt. Mit

$$a(\vec{x}, t) = \frac{f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} \quad (6.140)$$

wird das Feld eines Monopols am Ort  $\vec{x} = 0$  und der Stärke  $f(t)$  ausgewählt. Es beschreibt Kugelwellen, die nach außen laufen und mit  $1/r$  abfallen. Einsetzen in

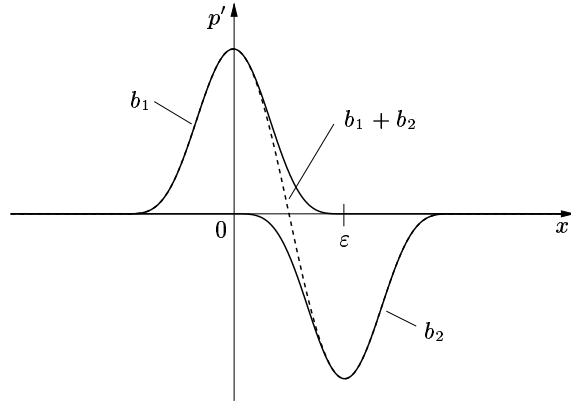


Abbildung 6.3: Zur Überlagerung zweier Felder

Gleichung (6.136) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{1}{\varepsilon} f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} + \frac{-\frac{1}{\varepsilon} f(t - |\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1|/c)}{|\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1|} \right] \quad (6.141)$$

Auf der linken Seite steht das Feld einer punktförmigen Impulsquelle, die sich bei  $\vec{x} = 0$  befindet und in  $x_1$ -Richtung orientiert ist. Die Stärke der Quelle entspricht  $f(t)$ . In der eckigen Klammer auf der rechten Seite steht die Summe aus zwei Monopolfeldern. Der erste Monopol befindet sich am Ort  $\vec{x} = 0$  und hat die Stärke  $f(t)/\varepsilon$ . Der zweite Monopol sitzt bei  $\vec{x} = \varepsilon \vec{e}_1$ . Das heißt, er ist auf der  $x_1$  Achse um  $\varepsilon$  verschoben. Er hat die Stärke  $-f(t)/\varepsilon$ . Die beiden Monopole sind damit gegenphasig.

Noch klarer wird die gesamte Konstellation, wenn man die dazugehörigen Quellverteilungen betrachtet. Die zum Monopolfeld (6.140) gehörende Quellverteilung ist durch

$$q(\vec{x}, t) = 4\pi f(t) \delta(\vec{x}) \quad (6.142)$$

gegeben. Die zur Lösung (6.141) passende Quellverteilung ergibt sich daraus durch Differentiation nach  $x_1$ . Es können für die Ableitung von  $q$  die obigen Überlegungen angewendet werden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{ f(t) \delta(\vec{x}) \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\varepsilon} f(t) \delta(\vec{x}) - \frac{1}{\varepsilon} f(t) \delta(\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1) \right] \quad (6.143)$$

Zur besseren Übersichtlichkeit wurde der Faktor  $4\pi$  weggelassen. Auf der linken Seite ergibt sich eine Quellverteilung, die bis auf das Vorzeichen mit (6.125) übereinstimmt. Sie beschreibt eine punktförmige Impulsquelle. In der eckigen Klammer auf der rechten Seite steht die Überlagerung von zwei Quellverteilungen, die eine punktförmige Massenquelle – einen Monopol – beschreiben. Im Grenzfall  $\varepsilon$  gegen Null rücken die

6 Schallquellen

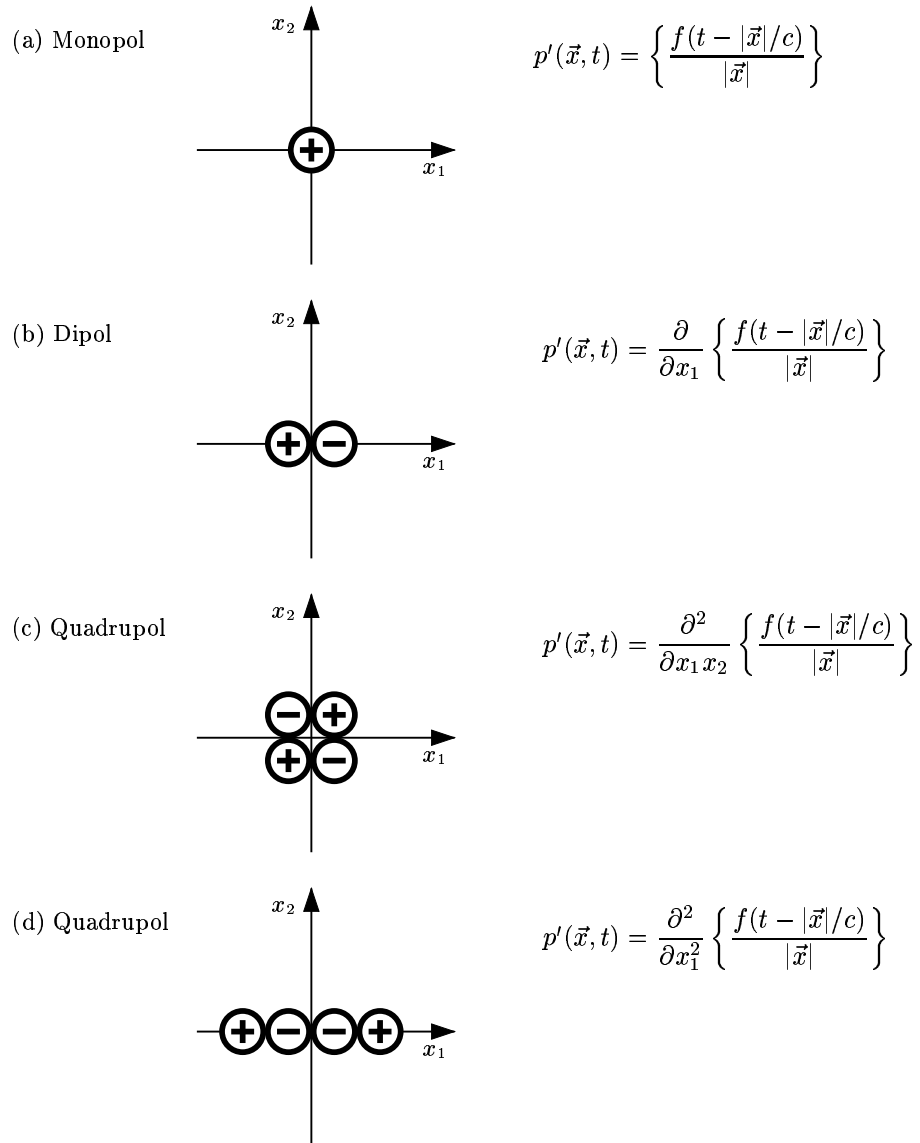


Abbildung 6.4: Schematische Darstellung der Punktquellen für die verschiedenen Quelltypen

überlagerten Monopole auf einem Punkt zusammen und werden dabei unendlich stark. So kann man sich die punktförmige Impulsquelle anschaulich als die Überlagerung von zwei Monopolen vorstellen. Entsprechend wird eine solche Quelle als "Dipol" bezeichnet.

Die Überlagerung von Feldern läßt sich noch weiter fortsetzen. Es können auch zwei Dipolfelder überlagert werden, so daß die neue Lösung der Ableitung des Dipolfeldes entspricht. Im folgenden soll ein Überblick über die Möglichkeiten gegeben werden. Der Ausgangspunkt ist das Monopolfeld. In der Abbildung 6.4(a) ist die Position des Monopols mit einem (+)-Zeichen markiert. Durch Ableiten nach  $x_1$  erhält man aus dem Monopolfeld ein Dipolfeld. Das (-)-Zeichen in der Abbildung 6.4(b) stellt den gegenphasigen Monopol dar. Wird nun die Dipollösung nach  $x_2$  differenziert ergibt sich ein sogenannter Quadrupol. Wie in der Abbildung 6.4(c) deutlich wird, kann der Quadrupol als Überlagerung von vier Monopolen oder von zwei Dipolen angesehen werden. Die Monopole liegen alle bei  $\vec{x} = 0$  und sind unendlich stark. Für den Quadrupol ergibt sich aber noch eine zweite Konfiguration. Leitet man das nach der  $x_1$ -Richtung orientierte Dipolfeld ein zweites mal nach  $x_1$  ab, ergibt sich die Konstellation in der Abbildung 6.4(d).

Dieses "Spiel" läßt sich noch beliebig fortführen, jedoch sind in der Akustik meistens nur Monopole, Dipole und Quadrupole von Interesse. Dipolfelder ergeben sich als Lösung der inhomogenen Wellengleichung, wenn die Quellverteilung als räumliche Ableitung dargestellt werden kann. Dies ist zum Beispiel bei Impulszufuhr mit (6.123) der Fall. Entsprechend ergeben sich Quadrupollösungen, wenn auf der rechten Seite in der Quellverteilung zweite Ableitungen nach dem Ort vorkommen. Beispiele dafür werden später noch ausführlich behandelt.

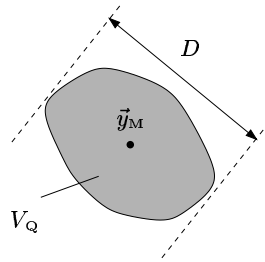
## 6.5 Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung im freien Raum ohne Berandungen läßt sich als Integral in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.144)$$

darstellen. Damit kennt man im Prinzip die Lösung, wenn die Quellstärkeverteilung  $q(\vec{x}, t)$  vorgegeben ist. Jedoch ist es selbst bei relativ einfachen Funktionen  $q(\vec{x}, t)$  meist nicht möglich, das Integral auf der rechten Seite wirklich geschlossen zu lösen. Dies ist fast immer nur numerisch berechenbar. Häufig sind solche numerischen Lösungen aber sehr aufwendig.

In einigen Fällen ist es jedoch möglich das Integral durch eine einfacheren Form zu approximieren. Dabei beginnt man mit der Ausdehnung des Integrationsgebiets. In fast allen Fällen braucht nicht über den gesamten Raum integriert zu werden, da die Quellverteilung irgendwie begrenzt ist. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß ein endliches Volumen  $V_Q$  existiert, welches alle Punkte mit  $q(\vec{x}, t) \neq 0$  umfaßt. Außerhalb dieses Volumens ist die Quellstärke gleich Null. Damit kann das Integral auf das Volumen  $V_Q$  begrenzt werden. Es wird die Ausdehnung  $D$  des Volumen  $V_Q$  eingeführt. Die

Abbildung 6.5: Zur Ausdehnung  $D$  und dem Mittelpunkt  $\vec{y}_M$  des Quellvolumens  $V_Q$ 

Größe  $D$  entspricht dem Durchmesser der kleinsten Kugel, das gesamte Volumen  $V_Q$  gerade umschließt. In Abbildung 6.5 ist die geometrische Situation dargestellt. Weiterhin wird ein Mittelpunkt des Volumens  $V_Q$  definiert. Dieser wird mit  $\vec{y}_M$  bezeichnet. Er kann zum Beispiel als geometrischer Schwerpunkt des Volumens gewählt werden. Der Abstand aller Punkte in  $V_Q$  ist in jedem Fall kleiner oder gleich  $D$ .

Es sind zwei Approximationen von besonderem praktischem Nutzen, da die benötigten Voraussetzungen in vielen Fällen erfüllt sind. Das sind die sogenannte "Fernfeldapproximation" und die "kompakte Quelle". In beiden Fällen muß die Abmessung  $D$  bestimmte Bedingungen erfüllen, damit die Approximation angewendet werden kann. Die beiden Approximationen werden zunächst einzeln vorgestellt.

### Fernfeldapproximation

Der Beobachter befindet sich weit entfernt von dem Quellvolumen, so daß der Abstand zu Mittelpunkt

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| \quad (6.145)$$

groß gegenüber der Ausdehnung

$$R \gg D \quad (6.146)$$

ist. Der Beobachter nimmt zu einer bestimmten Zeit Signale aus dem gesamten Quellvolumen  $V_Q$  wahr. Die Signale von verschiedenen Punkten legen jedoch auch unterschiedliche Entfernungen zurück bis sie den Beobachter erreichen. Vergleicht man den Weg von dem Quellpunkt  $\vec{y}$  zum Beobachter  $\vec{x}$ , mit der Entfernung des Beobachters zu Mittelpunkt des Volumens ergibt sich die Abweichung  $d$ . Es gilt

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x} - \vec{y}_M| + d = R + d \quad (6.147)$$

In jedem Fall ist die Abweichung kleiner als die Ausdehnung:

$$|d| \leq D \quad (6.148)$$

## 6.5 Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

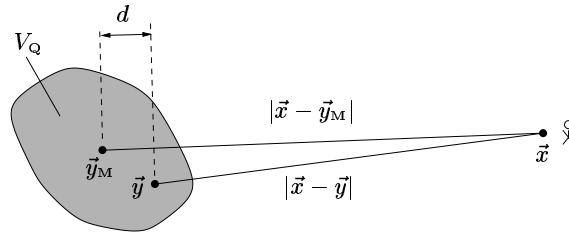


Abbildung 6.6: Zur Abweichung  $d$  der Entfernung zwischen Quellpunkt und Beobachter

Aus der Annahme (6.146) folgt damit

$$|d| \ll R \quad (6.149)$$

Die Entfernung zwischen Quellposition  $\vec{y}$  und Beobachter  $\vec{x}$  taucht in dem Integral in Gleichung (6.144) zweimal auf. Einmal in der retardierten Zeit im Zähler und einmal im Nenner. Durch letzteres wird die Abschwächung der Signale mit dem Abstand vom Quellpunkt ausgedrückt. Die Stärke nimmt mit dem Kehrwert des Abstands ab. Wird der Abstand  $R$  des Beobachters zur Quelle immer größer und die Ausdehnung  $D$  bleibt gleich, so ergibt sich im Grenzfall

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{R + d} \longrightarrow \frac{1}{R} \quad \text{für} \quad \frac{R}{|d|} \rightarrow \infty \quad (6.150)$$

Das bedeutet, für einen hinreichend großen Abstand  $R$  kann der Kehrwert des Abstands durch

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}_M|} \quad (6.151)$$

angenähert werden. Der Fehler, der dabei gemacht wird, nimmt mit der Entfernung von der Quelle immer weiter ab. Diese Approximation kann nun in die Lösung (6.144) eingesetzt werden. Es ergibt sich die Näherungslösung

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi} \int_{V_Q} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}_M|} d^3\vec{y} \quad (6.152)$$

Der Nenner hängt damit nicht mehr von der Integrationsvariablen  $\vec{y}$  ab und kann vor das Integral gezogen werden. Es ergibt sich die Vereinfachung

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi R} \int_{V_Q} q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) d^3\vec{y} \quad (6.153)$$

Diese Lösung gilt approximativ für weite entfernte Beobachter im Sinne von (6.146). Das Integral in (6.153) hat eine etwas einfachere Form im Vergleich zu (6.144). Jedoch ist oft noch eine weitere Vereinfachung möglich, wie anschließend gezeigt wird.

### Kompakte Quelle

Es wird angenommen, daß die Ausdehnung der Quelle klein gegenüber den auftretenden Wellenlängen ist. Dazu muß die Quelle ein begrenzten Frequenzbereich besitzen. Die höchste Frequenz, die im Spektrum auftritt, ist entscheidend für die Abschätzung. Ist die Wellenlänge  $\lambda$ , die der höchsten Frequenz entspricht, groß gegenüber der Ausdehnung  $D$ , wird von einer kompakten Quelle gesprochen. Im folgenden wird die Betrachtung nur für eine feste Frequenz  $\omega$  durchgeführt. Eine Quelle mit einem ausgedehnten Spektrum kann als Überlagerung der einzelnen Spektralanteile angesehen werden. Es ist daher ausreichend nur eine Frequenz zu betrachten. Es wird angenommen, die Quellverteilung besitzt die Form

$$q(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (6.154)$$

Das Feld  $Q(\vec{x})$  gibt die räumliche Verteilung der Quellstärke vor. Setzt man (6.154) in (6.144) ein, ergibt sich für die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \int_{V_Q} \frac{Q(\vec{y}) e^{i\omega(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c)}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.155)$$

Im Integral tritt die retardierte Zeit

$$\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (6.156)$$

auf. Sie ist die Zeit, zu der ein Signal am Ort  $\vec{y}$  ausgesandt wurde, welches zur Zeit  $t$  den Beobachter am Ort  $\vec{x}$  erreicht. Das bedeutet, den Beobachter erreichen gleichzeitig Signale, die zu unterschiedlichen Zeiten ausgesandt wurden. Die empfangenen Signale sind dann nicht mehr in Phase, auch wenn die Quelle in Phase abstrahlt.

Es stellt sich die Frage, wie groß ist die Abweichung von  $\tau$  innerhalb des Quellvolumens, und wie wirkt sich diese Abweichung auf die beobachteten Signale aus. Zunächst wird eine mittlere retardierte Zeit mit

$$\tau_M = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}_M|}{c} = t - \frac{R}{c} \quad (6.157)$$

definiert. Sie stellt die Zeit dar, zu der ein Signal am Mittelpunkt des Quellvolumens ausgesandt wurde, welches zur Zeit  $t$  den Beobachter erreicht. Durch die unterschiedlichen Wegstrecken ergeben sich unterschiedliche Werte für  $\tau$ . Für die Abweichungen gilt

$$\Delta\tau = \tau - \tau_M = \frac{d}{c} \quad (6.158)$$

wobei mit  $d$  wieder der Unterschied im Abstand zum Quellpunkt bezeichnet ist. Ist nun die Schwankung von  $\tau$  so klein, daß für das Produkt  $\omega \Delta\tau$  die Abschätzung

$$|\omega \Delta\tau| \ll 2\pi \quad (6.159)$$

## 6.5 Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

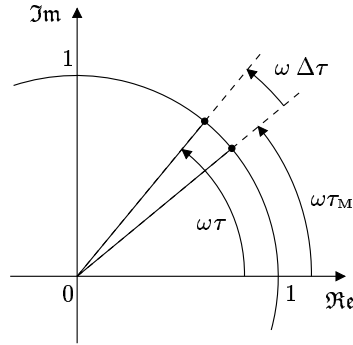


Abbildung 6.7: Veranschaulichung der Abweichung des Phasenfaktors  $e^{i\omega\tau}$  in der komplexen Ebene

gilt, so ergibt sich keine nennenswerte Abweichung bei dem Faktor  $e^{i\omega\tau}$ . Es gilt dann

$$|e^{i\omega\tau} - e^{i\omega\tau_M}| \ll 1 \quad (6.160)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.7 veranschaulicht. Der Faktor  $e^{i\omega\tau}$  kann als ein Punkt in der komplexen Ebene, der auf dem Einheitskreis liegt, angesehen werden. Das Produkt  $\omega\tau$  entspricht dem Winkel, unter dem sich der Punkt relativ zur reellen Achse befindet. Durch eine Variation von  $\omega\tau$  wandert der Punkt entlang der Einheitskreises. Eine Veränderung um  $2\pi$  entspricht einem kompletten Umlauf. Gilt die Abschätzung (6.159), dann ist der Punkt nur um eine relativ kurze Distanz verschoben und die Bedingung (6.160) ist erfüllt.

Wenn die Abweichung des  $e^{i\omega\tau}$ -Faktors klein bleibt, kann der exakte  $\tau$ -Wert durch den mittleren Wert  $\tau_M$  näherungsweise ersetzt werden. Voraussetzung dafür ist, daß die Ungleichung (6.159) ist erfüllt. Durch Umformen erhält man die Bedingung

$$|\omega\Delta\tau| = \left| \omega \frac{d}{c} \right| = 2\pi \frac{|d|}{\lambda} \ll 2\pi \quad (6.161)$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$|d| \ll \lambda \quad (6.162)$$

Für die kompakte Quelle gilt

$$D \ll \lambda \quad (6.163)$$

Wegen der Bedingung (6.148) ist damit auch (6.162) erfüllt. Es kann tatsächlich die Abweichung der retardierten Zeit in dem Quellbereich vernachlässigt werden. Für die



## 6 Schallquellen

Lösung ergibt sich die Approximation

$$p'(\vec{x}, t) \approx \int_{V_Q} \frac{Q(\vec{y}) e^{i\omega(t-R/c)}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.164)$$

Der von der Laufzeit abhängige Term ist damit für eine bestimmte Beobachtungszeit  $t$  eine Konstante und kann vor das Integral gezogen werden. Man erhält

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{4\pi} \int_{V_Q} \frac{Q(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.165)$$

Diese Approximation gilt für den Fall, daß (6.163) erfüllt ist.

Das Integral in (6.165) ist genau wie im Fall der approximativen Lösung (6.153) etwas einfacher zu berechnen als die exakte Form (6.144). Eine deutliche Vereinfachung wird üblicherweise jedoch erst erreicht, wenn beide Approximationen zusammen angewendet werden. Für eine Kompakte Quelle im Sinne von  $D \ll \lambda$  ergibt sich im Fernfeld für weit entfernte Beobachter mit  $D \ll R$  näherungsweise die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{4\pi R} \int_{V_Q} Q(\vec{y}) d^3\vec{y} \quad (6.166)$$

Damit wird die Integration auf ein einfaches Integral über die Quellstärke reduziert.

Die vorgestellte Approximation hat allerdings eine prinzipielle Schwäche. Selbst wenn die beiden Bedingungen  $D \ll \lambda$  und  $D \ll R$  erfüllt sind, kann sich in ungünstigen Fällen dennoch eine relativ große Ungenauigkeit ergeben. Dies soll anhand eines speziellen Beispiels verdeutlicht werden. Es soll von einer harmonischen Quelle nach (6.154) ausgegangen werden. Die räumliche Verteilung der Quellstärke ist mit

$$Q(\vec{y}) = \delta(\vec{y} - \vec{y}_1) - \delta(\vec{y} - \vec{y}_2) \quad (6.167)$$

gegeben. Diese Verteilung beschreibt zwei Monopole an den Stellen  $\vec{y}_1$  und  $\vec{y}_2$ , die gegenphasig überlagert sind. Die Situation ist in Abbildung 6.8 dargestellt.

Für das Integral in Gleichung (6.166) gilt in dem betrachteten Beispiel

$$\int_{V_Q} Q(\vec{y}) d^3\vec{y} = 0 \quad (6.168)$$

wird. Die Näherungslösung ergibt dann Schalldruck gleich Null, und (6.166) bedeutet praktisch

$$p'(\vec{x}, t) \approx 0 \quad (6.169)$$

Die Monopole erzeugen am Ort des Beobachters jedoch Schall. Dieser Schall hebt sich größtenteils gegenseitig auf, da die Signale gegenphasig sind. Sind die Abstände von den beiden Monopolen zum Beobachter nicht exakt gleich, so kann eine vollständige

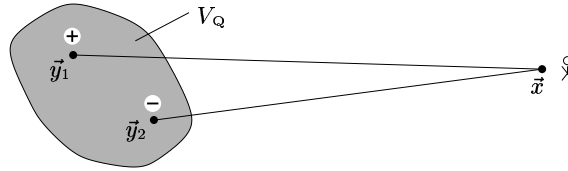


Abbildung 6.8: Veranschaulichung der Quellverteilung nach (6.167).

Auslöschung nicht eintreten. Am Beobachtungsort ist damit ein Signal  $p' \neq 0$  zu registrieren, selbst wenn die Voraussetzungen  $D \ll \lambda$  und  $D \ll R$  erfüllt sind. Dies bedeutet, die Approximation (6.166) liefert ein 100 % falsches Ergebnis. Gemessen an der Amplitude, die ein Einzelner der beiden Monopole am Beobachtungsort erzeugen würde, ist der Fehler zwar gering. Jedoch ist die Vorhersage von Null schlecht, wenn tatsächlich etwas vorhanden ist. In diesem Spezialfall ist der relative Fehler maximal.

### Multipolentwicklung

Anscheinend ist bei der Herleitung der Approximation an einer Stelle etwas übersehen worden. Sonst dürfte sich ein derartig großer relativer Fehler niemals ergeben. Um das Versagen der Abschätzungen zu erklären, wird die exakte Lösung nochmal genauer betrachtet. Die Lösung kann in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \frac{e^{i\omega(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c)}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.170)$$

geschrieben werden. Der Quotient im Integral wird als Funktion von  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  und  $t$  mit

$$F(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{e^{i\omega(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c)}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \quad (6.171)$$

dargestellt. Die obigen Abschätzungen liefert eine Näherung für die Funktion  $F$ , mit der sich die Berechnung des Integrals vereinfacht. Um den auftretenden Fehler quantitativ zu beschreiben, wird die Funktion  $F$  bezüglich der Variablen  $\vec{y}$  in eine Reihe um die Stelle  $\vec{y}_M$  entwickelt. Dazu wird die Abweichung des Quellortes vom Mittelpunkt

$$\Delta\vec{y} = \vec{y} - \vec{y}_M \quad (6.172)$$

und entsprechend die  $i$ -te Komponente dieses Vektors

$$\Delta y_i = y_i - y_{M,i} \quad (6.173)$$

## 6 Schallquellen

eingeführt. Eine Entwicklung ergibt eine Darstellung als Reihe in der Form

$$\begin{aligned}
 F(\vec{x}, \vec{y}, t) &= F(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \\
 &+ \frac{\partial F}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \Delta y_i \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \Delta y_i \Delta y_j \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{6.174}$$

Dies kann nun in die Lösung (6.170) eingesetzt werden. Damit kann die Lösung als Reihe von Integralen dargestellt werden. Die nicht von der Integrationsvariablen  $\vec{y}$  abhängigen Terme werden vor die Teilintegrale geschrieben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 p'(\vec{x}, t) &= F(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) d^3 \vec{y} \\
 &+ \frac{\partial F}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i d^3 \vec{y} \\
 &+ \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i \Delta y_j d^3 \vec{y} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{6.175}$$

Zur weiteren Umformung wird die Symmetrie von  $F$  bezüglich der Variablen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  ausgenutzt. Die Koordinaten  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  können vertauscht werden, ohne daß sich der Wert von  $F$  ändert. Entsprechend gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{6.176}$$

Anschaulich bedeutet dies, daß es keinen Unterschied macht, ob man einem Monopol auf den Beobachter zu verschiebt, oder ob sich der Beobachter dem Monopol nähert. In beiden Fällen ändert sich der Wert von  $F$  in gleicher Weise. Einsetzen von (6.171) ergibt schließlich mit der Regel (6.176) die Darstellung

$$\begin{aligned}
 p'(\vec{x}, t) &= \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right\} A_0 && \text{(Monopol)} \\
 &- \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right\} B_i && \text{(Dipol)} \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right\} C_{ij} && \text{(Quadrupol)} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{6.177}$$

## 6.5 Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

Dabei wurden die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \, d^3\vec{y} \\
 B_i &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i \, d^3\vec{y} \\
 C_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i \Delta y_j \, d^3\vec{y}
 \end{aligned} \tag{6.178}$$

eingeführt.

Die Darstellung der Lösung als eine Reihe in der Form (6.177) wird Multipolentwicklung genannt. Der erste Term auf der rechten Seite entspricht einem Monopol. Der zweite Term stellt einen Dipol und der dritte einen Quadrupol dar. Die Stärke der Quellen wird durch die Koeffizienten  $A_0$ ,  $B_i$  und  $C_{ij}$  festgelegt. Das Feld für eine gegebene Quellverteilung läßt sich immer als Überlagerung von Monopol, Dipol, Quadrupol und Punktquellen höherer Ordnung ansehen, die sich alle am festgelegten Mittelpunkt  $\vec{y}_M$  befinden.

Das erste Glied der Reihenentwicklung – der Monopolanteil – stimmt übrigens exakt mit der oben abgeleiteten approximativen Lösung nach (6.166) überein. Das bedeutet, diese Approximation nach (6.166) ist dann gut, wenn die Summe der restlichen Glieder klein gegenüber dem ersten Glied ist. Es stellt sich damit die Frage nach der Konvergenz der Reihe. Um dies zu beantworten werden zunächst die Ableitungen der Funktion  $F$  betrachtet. Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right\} = \left[ -\frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R^2} - \frac{i\omega}{c} \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right] \frac{\partial R}{\partial x_i} \tag{6.179}$$

Dies stellt ein Dipolfeld dar. Schreibt man (6.145) aus, erhält man

$$R = [(x_1 - y_{M,1})^2 + (x_2 - y_{M,2})^2 + (x_3 - y_{M,3})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{6.180}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{x_i - y_{M,i}}{R} \tag{6.181}$$

Das bedeutet, die Ableitung  $\partial R/\partial x_i$  hängt ausschließlich von dem Beobachtungswinkel ab. Sie ist unabhängig vom Abstand  $R$  selbst. In jedem Fall gilt

$$|x_i - y_{M,i}| \leq R \tag{6.182}$$

Für bestimmte Beobachtungswinkel wird  $\partial R/\partial x_i = \pm 1$ . Dies tritt ein, wenn  $x_1 = y_{M,1}$  und  $x_2 = y_{M,2}$  ist. Betrachte ich alle möglichen Beobachtungswinkel, dann nimmt  $\partial R/\partial x_i$  auch alle Werte im Intervall  $[-1, 1]$  an.

## 6 Schallquellen

Die Ableitung  $\partial F/\partial x_i$  enthält somit einen  $1/R^2$  und einen  $1/R$ -Anteil. Vor dem  $1/R$ -Term tritt der Faktor  $\omega/c = 2\pi/\lambda$  auf. Im Fernfeld, wo  $R \gg \lambda$  gilt, dominiert damit der  $1/R$ -Anteil, und der  $1/R^2$ -Term kann vernachlässigt werden. Im folgenden wird ausschließlich die Konvergenz der Reihe für den Fall  $R \gg \lambda$  betrachtet. Gleichung (6.179) kann kürzer mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = - \left[ \frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right] \frac{\partial R}{\partial x_i} F \quad (6.183)$$

dargestellt werden. Daraus folgt im Fernfeld

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{R \gg \lambda} = -i \frac{\omega}{c} \frac{\partial R}{\partial x_i} F \quad (6.184)$$

Eine solche Abschätzung kann auch für die höheren Ableitungen durchgeführt werden. Differenzieren von (6.183) nach  $x_j$  ergibt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x_j} \frac{\partial R}{\partial x_i} F - \left[ \frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right] \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} F - \left[ \frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right] \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \quad (6.185)$$

Hieraus ist ersichtlich, welche kompliziert Form bereits ein einfaches Quadrupolfeld besitzt. Der erste Summand auf der rechten Seite fällt mit  $1/R^3$  ab. Um den zweiten Term abzuschätzen wird (6.181) nach  $x_j$  differenziert. Man erhält

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{(x_i - y_{M,i})(x_j - y_{M,j})}{R^3} + \frac{\delta_{ij}}{R} \quad (6.186)$$

Das bedeutet, die zweite Ableitung von  $R$  fällt mit  $1/R$  ab. Da auch  $F$  proportional zu  $1/R$  ist, skaliert der zweite Summand in (6.185) insgesamt mit  $1/R^2$  im Fernfeld. Damit dominiert der dritte Summand den Verlauf bei großen Abständen, denn  $\partial F/\partial x_j$  enthält einen  $1/R$ -Anteil. Für diesen Ausdruck gilt

$$- \left[ \frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right] \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \left[ \frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right]^2 \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial x_j} F \quad (6.187)$$

Im Fernfeld ergibt sich

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{R \gg \lambda} = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial x_j} F \quad (6.188)$$

Die  $n$ -te Ableitungen des Feldes  $F$  skalieren im Fernfeld mit dem Faktor  $(\omega/c)^n$ . Durch weiteres Differenzieren kann dies leicht auch für die höheren Ableitungen überprüft werden.

Um die Konvergenzfrage zu klären, muß noch das Verhalten der Koeffizienten in (6.178) betrachtet werden. Es wird davon ausgegangen, daß das Quellgebiet beschränkt ist, und außerhalb des abgeschlossenen Volumens  $V_Q$  gilt überall  $Q(\vec{x}) = 0$ . Die Ausdehnung der Volumens im Sinne von Abbildung 6.5 ist mit  $D$  gegeben. Die in (6.178)

## 6.5 Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

auftretenden Abweichungen  $\Delta y_i$  sind in jedem Fall betragsmäßig kleiner als  $D$ . Zur Abschätzung der Koeffizienten wird die Größe

$$A_{\max} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_Q} |Q(\vec{y})| d^3\vec{y} \quad (6.189)$$

definiert. Der Betrag des Koeffizienten  $A_0$  kann nicht größer als  $A_{\max}$  werden. Gilt überall  $Q(\vec{x}) \geq 0$  ergibt sich gerade  $A_0 = A_{\max}$ . In jedem Fall gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |A_0| &\leq A_{\max} \\ |B_i| &\leq D A_{\max} \\ |C_{ij}| &\leq D^2 A_{\max} \end{aligned} \quad (6.190)$$

Dies läßt sich auch für alle weiteren Koeffizienten der Reihe fortsetzen. Es zeigt sich, daß die Reihe (6.177) dann schnell konvergiert, wenn

$$\left| \frac{\omega}{c} D \right| \ll 1 \quad (6.191)$$

gilt. Diese Aussage gilt allerdings nur für Beobachter im Fernfeld, da nur der  $1/R$ -Anteil der Quellen berücksichtigt wurde.

Die Bedingung (6.191) ist für eine kompakte Quelle mit  $D \ll \lambda$  erfüllt. Dann ist für einen Beobachter im Fernfeld die Quelle bereits sehr gut durch das erste Glied der Reihenentwicklung approximiert. Die ausgedehnte Quelle erscheint dem entfernten Beobachter wie ein punktförmiger Monopol. Das Ganze gilt jedoch nur, wenn der Koeffizient  $A_0$  nicht verschwindet. Für eine Quellverteilung nach (6.167) ist aber exakt  $A_0 = 0$ . In diesem Fall dominiert der Dipolterm die Lösung im Fernfeld und die Koeffizienten  $B_i$  sind entscheidend. Falls auch diese alle gleich Null sind, ergibt sich eine Quadrupolverteilung im Fernfeld, usw. Bei einer kompakten Quelle konvergiert die Reihenentwicklung in jedem Fall. Ist die Quelle nicht kompakt und damit die Abschätzung (6.191) nicht gültig, kann auch keine Aussage über die Konvergenz der Reihe angegeben werden.

Dieses Ergebnis läßt nun die Approximation nach Beziehung (6.166) besser einordnen. Diese Approximation berücksichtigt nur den Monopolanteil. Sie entspricht dem ersten Glied in der Reihenentwicklung.

Die gesamte Betrachtung wurde nur für eine feste Frequenz durchgeführt. Ist eine nichtharmonische Quellverteilungen gegeben, so kann eine spektrale Zerlegung vorgenommen werden. Für die Abschätzung (6.191) ist die höchste auftretende Frequenz (beziehungsweise kürzeste Wellenlänge) entscheidend. Die einzelnen Spektralkomponenten können in Reihen der Form entwickelt werden. Die Glieder der Reihen lassen sich dann anschließend wieder überlagern. So erhält man die entsprechende Multipoldarstellung für nichtharmonische Quellverteilungen.

## 6.6 Zweidimensionale Schallquellen

In Abschnitt 4.1 wurde die Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen betrachtet. Die Überlegungen wurden nur für zwei Dimensionen durchgeführt, da die Darstellung der Lösungen einfacher ist und die wesentlichen physikalischen Effekte auch in der zweidimensionalen Lösung enthalten sind. Bei der Schallabstrahlung im offenen Raum wurde mit der atmenden Kugel gleich ein dreidimensionales Beispiel untersucht. Auch dort könnte man vermuten, daß die Behandlung des zweidimensionalen Analogons – des atmenden Zylinders – etwas einfacher ist. In der Strömungsmechanik wird ebenfalls im Rahmen der Potentialströmung meistens die Zylinderumströmung ausführlicher behandelt als die umströmte Kugel. In der Akustik ergibt sich jedoch für den zweidimensionalen Fall eine wesentlich kompliziertere Lösung als für den Dreidimensionalen. Dies wird im folgenden näher betrachtet.

Das akustische Potential  $\phi$  soll die inhomogene Wellengleichung

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = q(\vec{x}, t) \quad (6.192)$$

erfüllen. Ohne Berandungen kann die Lösung in der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.193)$$

angegeben werde, In Abschnitt 6.2 wurde eine etwas andere Darstellung vorgestellt. Es kann auch

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) q(\vec{y}, \tau) d^3\vec{y} d\tau \quad (6.194)$$

geschrieben werden, wenn man die Greensche Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = \frac{\delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.195)$$

eingführt. Gleichung (6.194) unterscheidet sich von (6.65) durch die vertauschten Integrationen. Eine Vertauschung ist ohne weiteres möglich, das die Integrationsvariablen  $\vec{y}$  und  $\tau$  sowie die Integrationsgrenzen nicht voneinander abhängen. Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßiger, wenn die innere Integration die Räumliche ist.

Eine zweidimensionale Quellverteilung ist durch

$$q = Q(x_1, x_2, t) \quad (6.196)$$

gegeben. Dabei bestimmt die Funktion  $Q(x_1, x_2, t)$  die Quellstärke in Abhängigkeit von der Position in der  $x_1, x_2$ -Ebene. In  $x_3$ -Richtung ist die Quellstärke konstant. Die Lösung für die zweidimensionale Quellverteilung kann durch Einsetzen von (6.196) in

(6.194) berechnet werden. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(y_1, y_2, \tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) dy_3 \right\} dy_1 dy_2 d\tau \quad (6.197)$$

Das räumliche Integral wurde aufgespalten. Da  $Q$  nicht von  $y_3$  abhängt, kann die Größe vor das Integral über  $y_3$  gezogen werden. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer kann als neue Greensche Funktion  $G_{2d}$  für den zweidimensionalen Fall aufgefaßt werden. Damit kann die zweidimensionale Lösung in der zu (6.194) analogen Form

$$\phi(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{2d} Q(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2 d\tau \quad (6.198)$$

dargestellt werden. Die neue Greensche Funktion hängt nun nicht mehr von  $x_3$  und  $y_3$  ab. Es kann

$$G_{2d} = G_{2d}(x_1, x_2, t, y_1, y_2, \tau) \quad (6.199)$$

geschrieben werden. Die Funktion ist durch das Integral

$$G_{2d} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) dy_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} dy_3 \quad (6.200)$$

gegeben.

Um eine für praktische Berechnungen geeignete Form der Funktion  $G_{2d}$  zu erhalten, wird das Integral in (6.200) berechnet. Dazu werden die Abkürzungen

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| = \left[ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.201)$$

für den Abstand im dreidimensionalen Raum und

$$R = \left[ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.202)$$

für den im zweidimensionalen Raum eingeführt. zur Integration wird das Argument der  $\delta$ -Funktion mit  $\sigma$  substituiert. Es gilt

$$\sigma = t - \frac{r}{c} - \tau \quad (6.203)$$

Daraus folgt

$$d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial y_3} dy_3 \quad (6.204)$$



## 6 Schallquellen

Durch Ableiten von (6.201) ergibt sich

$$\frac{\partial r}{\partial y_3} = \frac{y_3 - x_3}{r} \quad (6.205)$$

Damit erhält man die Beziehung zwischen den Differentialen

$$dy_3 = \frac{cr}{x_3 - y_3} d\sigma \quad (6.206)$$

Für  $y_3 = \pm\infty$  ist  $\sigma = -\infty$ . Wenn  $y_3$  von  $-\infty$  nach  $\infty$  läuft, dann wächst  $\sigma$  zunächst an, um nach dem Erreichen eines Maximums wieder abzufallen. Es gilt

$$\sigma \leq t - \frac{R}{c} - \tau \equiv \sigma_{\max} \quad (6.207)$$

Die Gleichheit in (6.207) wird erreicht, wenn  $r = R$  ist. Die ist gerade bei  $x_3 = y_3$  der Fall. Dort besitzt  $\sigma$  das Maximum.

Es bietet sich an das Integral in zwei Teilintegrale aufzuspalten. In der erste Integration läuft  $y_3$  von  $-\infty$  bis  $x_3$ . Die zweite Integration erstreckt sich von  $x_3$  bis  $+\infty$ . Für die neue Variable  $\sigma$  ergibt sich entsprechend ein Integral von  $-\infty$  bis  $\sigma_{\max}$  und eins in entgegengesetzter Richtung. Man erhält

$$G_{2d} = \int_{-\infty}^{t-R/c-\tau} \frac{\delta(\sigma)}{4\pi r} \frac{cr}{x_3 - y_3} d\sigma + \int_{t-R/c-\tau}^{-\infty} \frac{\delta(\sigma)}{4\pi r} \frac{cr}{x_3 - y_3} d\sigma \quad (6.208)$$

Im ersten Integral gilt  $x_3 - y_3 > 0$ , und im zweiten ist  $x_3 - y_3 < 0$ . Ersetzt man überall  $x_3 - x_3$  durch  $|x_3 - x_3|$ , so ergibt sich im zweiten Integral ein Faktor  $-1$ . Dieser kann durch Vertauschen der Integrationsgrenzen kompensiert werden. Es ergibt sich

$$G_{2d} = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-R/c-\tau} \frac{1}{|x_3 - y_3|} \delta(\sigma) d\sigma \quad (6.209)$$

Das verbleibende Integral kann einfach berechnet werden. Falls die obere Integrationsgrenze  $(t - R/c - \tau)$  kleiner Null ist, dann ist der Wert des Integrals gleich Null. Andernfalls ergibt sich der Wert des Quotienten an der Stelle  $\sigma = 0$ . Dieser Wert kann angegeben werden. Bei  $\sigma = 0$  gilt

$$0 \equiv t - \frac{r}{c} - \tau = t - \frac{\sqrt{R^2 + |x_3 - y_3|^2}}{c} - \tau \quad (6.210)$$

Dies kann zu

$$|x_3 - y_3| = \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2} \quad (6.211)$$

umgeformt werden. Damit erhält man schließlich die Greensche Funktion für den zweidimensionalen Fall mit

$$G_{2d} = \begin{cases} \frac{c}{2\pi\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} & \text{für } t - \frac{R}{c} - \tau > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.212)$$

Die Greensche Funktion hängt nur von dem Abstand  $R$  und der Zeitdifferenz  $t - \tau$  ab. Dies ist analog zu der Funktion  $G$  aus (6.195), jedoch ist die Form (6.212) auf den ersten Blick nicht mit dem Ausdruck für  $G$  vergleichbar. In der Tat besitzen im zweidimensionalen Fall die Greensche Funktion und damit auch die Lösungen einige Besonderheiten.

### Einfache Punktquelle

Am Beispiel einfachster Punktquellen sollen die wesentlichen Unterschiede zwischen zwei- und dreidimensionalen Schallquellen verdeutlicht werden. Zunächst wird der dreidimensionale Fall betrachtet. Eine Punktquelle bei  $\vec{x} = 0$ , die bei  $t = 0$  einen unendlich kurzen Puls mit endlicher Stärke – einen  $\delta$ -Puls – aussendet, ist durch

$$q(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}) \delta(t) \quad (6.213)$$

gegeben. Setzt man diese spezielle Quellverteilung in die Gleichung (6.194) ein, ergibt sich als Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = G(\vec{x}, 0, t, 0) = \frac{\delta(t - r/c)}{r} \quad (6.214)$$

Dabei bezeichnet  $r$  jetzt den Abstand vom Ursprung:

$$r = |\vec{x}| \quad (6.215)$$

Es zeigt sich, daß die Greensche Funktion selbst eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung darstellt, wenn die Quellverteilung einer Punktquelle entspricht, die einen  $\delta$ -Puls aussendet. Die Funktion  $G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$  gibt an, welches Signal am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  durch das Aussenden eines  $\delta$ -Pulses am Ort  $\vec{y}$  zur Zeit  $\tau$  bewirkt wird. Die Greensche Funktion beschreibt sozusagen Elementarwellen, aus denen sich alle Lösungen zusammensetzen lassen. Wird ein kontinuierliches Signal ausgesendet und ist die Quelle räumlich verteilt, dann müssen die einzelnen Elementarwellen entsprechend aufsummiert werden. Genau dieses wird bei der Integration in (6.194) durchgeführt.

Die obigen Überlegungen lassen sich auch für zweidimensionale Schallquellen durchführen. Eine einfache zweidimensionale Punktquelle, die vom Ursprung einen  $\delta$ -Puls aussendet, ist durch

$$Q(x_1, x_2, t) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(t) \quad (6.216)$$

## 6 Schallquellen

gegeben. Als Lösung ergibt sich analog zu (6.214)

$$\phi(x_1, x_2, t) = G_{2d}(x_1, x_2, t, 0, 0, 0) \quad (6.217)$$

Dies stellt eine zweidimensionale Elementarwelle dar. Mit (6.212) folgt

$$\phi(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \frac{c}{2\pi\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{für } t - \frac{R}{c} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.218)$$

Dabei ist die Größe  $R$  jetzt der Abstand vom Ursprung in 2D:

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (6.219)$$

Die Lösung ist in Abbildung 6.9 für verschiedene Zeitpunkte dargestellt.

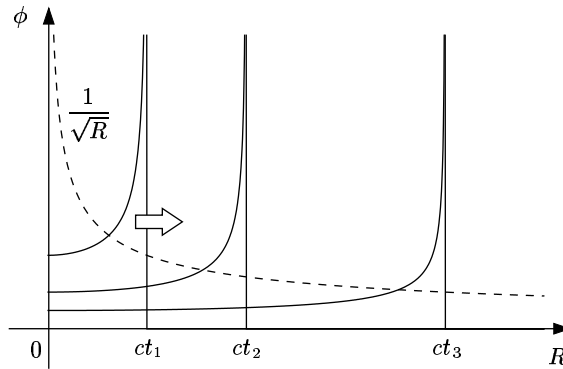


Abbildung 6.9: Zweidimensionale Elementarwelle nach (6.218) zu drei verschiedenen Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$ .

Es zeigt sich ein prinzipieller Unterschied zwischen dem zwei- und dem dreidimensionalen Fall. In 3D bewirkt ein ausgehender  $\delta$ -Puls auch ein  $\delta$ -Puls an jedem Beobachtungsort. Die Stärke des Pulses fällt gemäß (6.214) zwar mit  $1/r$  ab, aber die charakteristische Signalform bleibt erhalten. Bei zweidimensionalen Quellen ist dies nicht der Fall. Ein  $\delta$ -Puls bewirkt eine Elementarwelle mit der in Abbildung 6.9 dargestellten Form. Sie besitzt eine Singularität bei  $R = ct$ . Dort wird die Wurzel in (6.218) gleich Null. Hinter der Singularität folgt ein monoton abfallender Signalverlauf.

In einem vorgegebenen Abstand  $R$  trifft bei  $t = R/c$  die Singularität ein. Danach klingt das Signal wieder ab. Für  $t \rightarrow \infty$  wird die Stärke proportional zu  $1/t$ . Das bedeutet, erst nach unendlich langer Zeit wird wieder  $\phi = 0$  erreicht. Ein unendlich kurzer Puls bewirkt ein unendlich lang abklingendes Signal. Dies ist ein deutlicher Unterschied zum dreidimensionalen Fall, in dem die Lösung nach dem Eintreffen des  $\delta$ -Pulses sofort wieder auf  $\phi = 0$  zurückgeht.

Aus energetischen Gründen muß auch die Elementarwelle in zwei Dimensionen nach außen schwächer werden. Um dies zu verdeutlichen, wird die Lösung (6.218) an einer Stelle im festen Abstand  $L$  (in radialer Richtung) hinter der Singularität betrachtet. Die Singularität befindet sich bei  $R = ct$ . Die betrachtete Stelle liegt demnach bei  $R = ct - L$ . Für den Ausdruck unter der Wurzel in (6.218) ergibt sich dadurch

$$c^2t^2 - R^2 = c^2t^2 - (ct - L)^2 = ctL - L^2 \quad (6.220)$$

Hält man  $L$  konstant, dann ist dieser Ausdruck für  $t \rightarrow \infty$  proportional zur Zeit  $t$  und zur Position der Singularität  $R = ct$ . Das Signal an der betrachteten Stelle nimmt also mit  $1/\sqrt{R}$  bei  $t \rightarrow \infty$  ab. Dieses Verhalten wird mit der gestrichelten  $1/\sqrt{R}$ -Kurve in Abbildung 6.9 veranschaulicht. Sie schneidet die dargestellten Lösungen näherungsweise immer im gleichen Abstand hinter der Singularität.

### Linienhafter Monopol

Das abklingende Verhalten der einfachen Lösung nach (6.218) läßt sich auch anschaulich erklären. Die zweidimensionale Schallquelle nach (6.216) repräsentiert eine konstante Quellverteilung, die sich ausschließlich auf die  $x_3$ -Achse konzentriert. Die Quellverteilung kann man sich näherungsweise aus vielen einzelnen Monopolen zusammengesetzt denken, die entlang der  $x_3$ -Achse aufgereiht sind. In Abbildung 6.10 ist eine solche Anordnung dargestellt. Die schwarzen Punkte markieren die Monopole und der helle Punkt kennzeichnet einen Beobachter, der sich im Abstand  $R$  vom Ursprung auf der  $x_1$ -Achse befindet.

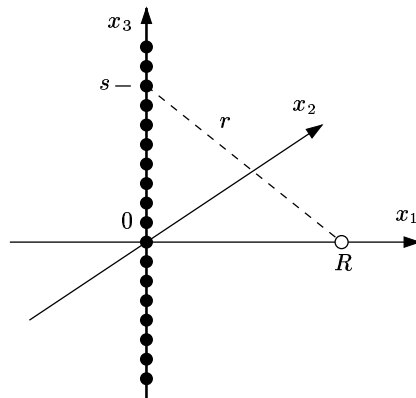


Abbildung 6.10: Linienhafter Monopol entlang der  $x_3$ -Achse.

Senden die Monopole auf der  $x_3$ -Achse alle gleichzeitig einen Puls aus, so werden die Pulse beim Beobachter zu unterschiedlichen Zeiten eintreffen. Zuerst trifft der Puls ein,

## 6 Schallquellen

der von dem nächstgelegenen Monopol ausgesandt wurde. Er kommt bei  $t = R/c$  beim Beobachter an. Die anderen Pulse benötigen länger. Betrachtet man einen bestimmten Monopol bei  $x_3 = s$ , so trifft sein Signal erst bei  $t = \sqrt{R^2 + s^2}/c$  ein. Das Signal ist auch entsprechend der größeren Entfernung  $r = \sqrt{R^2 + s^2}$  schwächer als das erste Signal. Im weiteren Zeitverlauf treffen weitere Pulse ein, deren Stärke jedoch immer schwächer ist. Insgesamt klingt das beobachtete Signal mit der Zeit ab. Dies entspricht einer Lösung der Form (6.218). Allerdings kann man sich das Gedankenexperiment besser mit einem Puls endlicher Breite als mit einem  $\delta$ -Puls vorstellen.

Ein Puls endlicher Breite kann durch die Quellverteilung

$$Q(x_1, x_2, t) = \delta(x_1) \delta(x_2) f(t) \quad (6.221)$$

realisiert werden, wenn die Zeitfunktion  $f(t)$  entsprechend gewählt wird. Setzt man diese Quellverteilung in (6.198) ein, ergibt sich die Lösung

$$\phi(x_1, x_2, t) = \phi(R, t) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{f(\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} d\tau \quad (6.222)$$

Das ist das Feld einer zweidimensionalen Punktquelle mit der Stärke  $f(t)$ . Diese Lösung soll im folgenden für eine einfache Zeitfunktion, die einen wie in Abbildung 6.11 gezeigten endlichen Puls beschreibt, veranschaulicht werden. Die dieser Quellstärke entsprechende Lösung ist in Abbildung 6.12 dargestellt. In dem ansteigendem Teil der Welle ist die ursprüngliche Pulsform noch zu erkennen. Hinter dem Maximum folgt jedoch der Bereich mit abklingender Lösung, der auf den ersten Blick nichts mit dem Zeitverlauf der Quellstärke zu tun hat.

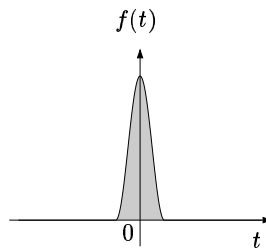


Abbildung 6.11: Einfacher Puls als Zeitfunktion der Quellstärke in (6.221).

Im dreidimensionalen Fall bleibt die Form eines Signals, welches von einer Punktquelle ausgesendet wird, erhalten. Die Stärke des Signals nimmt zwar mit  $1/r$  ab, aber es wird nicht verformt. Dies ist in zwei Dimensionen anders. Egal wie die Funktion  $f(t)$  gewählt wird, eine Lösung nach (6.222) ergibt für unterschiedliche Abstände  $R$  auch verschiedene Signalformen, die sich durch mehr als nur einen Skalierungsfaktor unterscheiden. Es kann gezeigt werden, daß sich für  $R \rightarrow \infty$  die Form der Signale immer weniger verändert. Im Grenzfall ergibt sich ein Abklingen mit  $1/\sqrt{R}$ . Dies gilt jedoch wirklich nur für Wellen, die unendlich weit vom Ursprung entfernt sind.

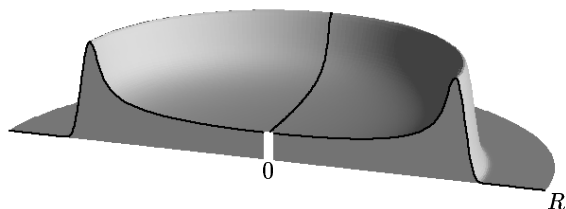


Abbildung 6.12: Lösung für die in Abbildung 6.11 gegebenen Puls

### Vergleich von ein- und zweidimensionaler Wellenausbreitung

Anscheinend ist es nicht möglich eine zylindersymmetrische Welle auszusenden, deren Form erhalten bleibt. Dagegen ist es mit den eindimensionalen ebene Wellen und den kugelsymmetrischen dreidimensionalen Wellen möglich, ein Signal ohne Verformung zu transportieren. Eine Plausibilitätserklärung für die Besonderheiten im zylindersymmetrischen Fall wurde durch das Gedankenexperiment nach Abbildung 6.10 gegeben. Die später eintreffenden Signale von entfernten Quellen erklären die abklingende Lösung.

Ein analoges Modell läßt sich jedoch auch für eine ebene Welle konstruieren. Denkt man sich die Punktquellen nicht nur entlang einer Achse sondern in einer Ebene verteilt, so ergibt sich quasi eine eindimensionale Situation. Die eindimensionalen ebenen Welle zeigen jedoch kein abklingendes Verhalten. Es stellt sich die Frage, wieso sich die zylindersymmetrische und die ebene Überlagerung unterscheiden. Um dies zu klären, wird das Signal einer eindimensionalen Quellverteilung berechnet.

Es wird folgende Situation betrachtet. Von allen Punkten in der  $x_2, x_3$ -Ebene gehen identische Kugelwellen aus. Das heißt, die  $x_2, x_3$ -Ebene ist homogen mit identischen Monopolen besetzt. Die Stärke der Monopole ist mit  $f(t)$  gegeben. Die eindimensionale Quellverteilung hat damit die Form

$$q(\vec{x}, t) = \delta(x_1) f(t) \quad (6.223)$$

Dies kann in (6.193) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{4\pi r} dy_2 dy_3 \quad (6.224)$$

wobei der Abstand wieder mit

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (6.225)$$

abgekürzt wird. Für einen Beobachter am Ort  $\vec{x}$  ergibt sich die Lösung durch Integration über die flächige Quellverteilung.

## 6 Schallquellen

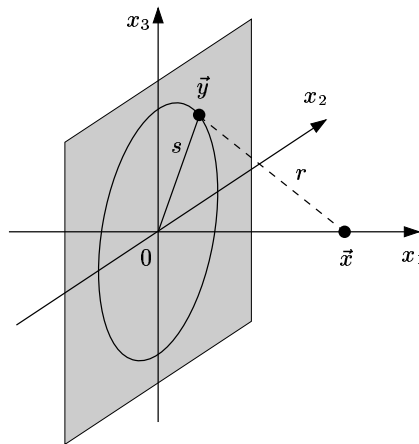


Abbildung 6.13: Zur Integration der Quellstärke über die  $x_2, x_3$ -Ebene.

Das Doppelintegral in (6.224) erstreckt sich über die gesamte Ebene  $x_1 = 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Beobachter auf der  $x_1$ -Achse sitzt. Es gilt damit für die Beobachtersposition

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.226)$$

Der Quellpunkt ist mit dem Vektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (6.227)$$

gegeben. Für eine feste Beobachtersposition  $\vec{x}$  und Beobachterszeit  $t$  hängt der Integrand in (6.224) nur vom Abstand  $s$  des Quellpunktes  $\vec{y}$  zum Ursprung ab. Es gilt

$$s = \sqrt{y_2^2 + y_3^2} \quad (6.228)$$

Für den Abstand  $r$  des Quellpunktes zum Beobachter folgt entsprechend

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{s^2 + x_1^2} \quad (6.229)$$

Die geometrische Situation ist in Abbildung 6.13 dargestellt.

Zweckmäßigerweise wird die Integration nicht über  $x_2$  und  $x_3$  durchgeführt, sondern es wird über den Abstand  $s$  integriert. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_0^\infty \frac{f(t - r/c)}{4\pi r} 2\pi s \, ds \quad (6.230)$$

Zur endgültigen Lösung wird  $s$  durch  $\tau$  mit

$$\tau = t - \frac{r}{c} = t - \frac{\sqrt{s^2 + x_1^2}}{c} \quad (6.231)$$

substituiert. Es gilt für die Differentiale

$$ds = -\frac{c\sqrt{s^2 + x_1^2}}{s} d\tau \quad (6.232)$$

Durchführen der Substitution ergibt

$$\phi(\vec{x}, t) = - \int_{t-x_1/c}^{-\infty} \frac{f(\tau)}{4\pi\sqrt{s^2 + x_1^2}} 2\pi s \frac{c\sqrt{s^2 + x_1^2}}{s} d\tau \quad (6.233)$$

Im Integrand heben sich einige Terme heraus, so daß sich das Integral wesentlich vereinfacht. Man erhält schließlich

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t-x_1/c} f(\tau) d\tau \equiv F(t - x_1/c) \quad (6.234)$$

Das Integral in (6.234) hängt bei gegebener Funktion  $f(t)$  ausschließlich von der oberen Integrationsgrenze  $(t - x_1/c)$  ab. Das heißt, die Lösung kann als Funktion  $F(t - x_1/c)$  aufgefaßt werden. Damit wird eine Welle in  $x_1$ -Richtung beschrieben. Die Form der Welle entspricht dem Verlauf der Funktion  $F$ . Diese ergibt sich durch Integration aus  $f$ . In Abbildung 6.14 wird die Lösung  $\phi(\vec{x}, t)$  für zwei verschiedenen Zeitverläufe  $f(t)$  miteinander verglichen.

Senden die Quellen einen einfachen positiven Puls mit endlicher Breite aus, so ergibt sich ein einmaliger Druckanstieg am Beobachtungsort. Dies ist in Teil a) von Abbildung 6.14 zu sehen. Entscheidend ist, daß die Form des Anstiegs nicht von der Koordinate  $x_1$  abhängt. Für größere  $x_1$  folgt der Anstieg nur etwas später. Das Ergebnis kann auch anschaulich plausibel gemacht werden. Zuerst erreichen den Beobachter die Wellen von den Quellen am Ursprung. Von dort ist die Weg zu Beobachter am kürzesten. Zu späteren Zeitpunkten treffen die Anteile von den weiter entfernten Quellpunkten ein. Die Quellpunkte, deren Anteile synchron eintreffen, liegen alle auf einem Kreis um den Ursprung. Die späteren Anteile sind entsprechend dem  $1/r$ -Abfall schwächer, da sie eine längere Strecke zurückgelegt haben. Jedoch ist das Gesamtgewicht dieser Anteile gleich, da entsprechend mehr Quellpunkte auf dem größeren Kreis beteiligt sind. Der  $1/r$ -Abfall wird durch die  $r$ -proportionale Zunahme des Kreisumfangs gerade kompensiert, so daß sich ein konstantes Signal ergibt.

Um eine pulsförmige Welle zu erzeugen, muß die Quellstärke der Quellen einen Verlauf besitzen, wie in Teil b) der Abbildung 6.14 gezeigt wird. In jedem Fall ergibt sich durch Überlagerung aller Quellen aus der  $x_2, x_3$ -Ebene eine gewöhnliche ebene Welle. Diese breitet sich mit Schallgeschwindigkeit in  $x_1$ -Richtung aus, ohne daß sich die Form des Wellenzuges verändert. Damit unterscheidet sich die entstehende ebene Welle vom zylindersymmetrischen Fall, in dem die Überlagerung der Signale immer eine vom Abstand abhängige Wellenform ergibt.



## 6 Schallquellen

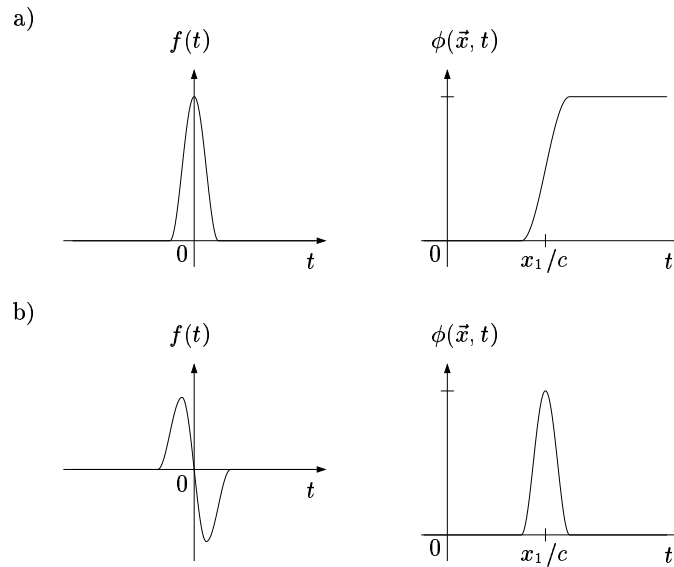


Abbildung 6.14: Vergleich des Signalverlaufs nach (6.234) für verschiedene Pulsformen  $f(t)$ .

### Harmonische Quelle

Bisher wurde nur die Abstrahlung eines Pulses betrachtet. Zuletzt soll noch die zweidimensionale harmonische Punktquelle behandelt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß sich die Quelle im Ursprung befindet. Die Quellverteilung entspricht der Form (6.221). Für die Zeitfunktion wird

$$f(t) = A e^{i\omega t} \quad (6.235)$$

eingesetzt. Die entsprechende Lösung ergibt sich aus (6.222) mit

$$\phi(R, t) = \frac{Ac}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} d\tau \quad (6.236)$$

Das Integral auf der rechten Seite kann etwas einfacher dargestellt werden, indem man mit

$$\xi = \frac{c(t-\tau)}{R} \quad (6.237)$$

substituiert. Es folgt

$$\tau = t - \frac{R\xi}{c} \quad (6.238)$$

## 6.6 Zweidimensionale Schallquellen

Daraus ergibt sich für das Differential

$$d\tau = -\frac{R}{c} d\xi \quad (6.239)$$

Mit (6.238) erhält man für den Exponentialterm im Zähler die Aufspaltung

$$e^{i\omega\tau} = e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega\xi R/c} \quad (6.240)$$

Für den Wurzelausdruck im Nenner folgt

$$\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2} = R\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.241)$$

Zusammen ergibt die Substitution

$$\phi(R, t) = \frac{Ac}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega\xi R/c}}{R\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(-\frac{R}{c}\right) d\xi \quad (6.242)$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\phi(R, t) = \frac{Ae^{i\omega t}}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi R/c}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (6.243)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nicht mehr von der Beobachtungszeit  $t$  abhängig. Es ist ausschließlich Funktion des Abstands  $R$ . Die Zeitabhängigkeit steht vor dem Integral. Wie erwartet, führt die harmonische Quelle auch zu einem harmonischen Zeitsignal. Eine weitere Vereinfachung ist jedoch nicht mehr möglich. Der Wert des Integrals kann numerisch berechnet werden. Da Integrale dieses Typs häufiger auftreten, wurde die sogenannte Hankel-Funktion nullter Ordnung mit

$$H_0^{(2)}(s) = \frac{2i}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-is\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (6.244)$$

definiert. Die Ordnung der Hankel-Funktion wird als Index geschrieben. Die hochgestellte "(2)" gibt an, daß es sich um die zweite Hankel-Funktion handelt. Der Funktionswert von  $H_0^{(2)}(\xi)$  ist komplex. Der Realteil entspricht der Bessel-Funktion nullter Ordnung  $J_0$  und der Imaginärteil der Neumann-Funktion nullter Ordnung  $Y_0$ . Es gilt

$$H_0^{(2)}(s) = J_0(s) - i Y_0(s) \quad (6.245)$$

Die erste Hankel-Funktion nullter Ordnung ist mit

$$H_0^{(1)}(s) = J_0(s) + i Y_0(s) \quad (6.246)$$

definiert. Die beiden Versionen unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils.

## 6 Schallquellen

Die Bessel- und Neumann-Funktionen lassen sich auch als unendlichen Reihen darstellen. Diese Form ist dann geeignet, die Werte numerisch mit einer bestimmten Genauigkeit zu berechnen, in dem man die Reihe entsprechend abbricht. So sind diese Funktionen in mathematischen Bibliotheken auf vielen Rechnern implementiert. Die Bessel- und Neumann-Funktionen nullter Ordnung sind in Abbildung 6.15 dargestellt. Die Neumann-Funktion  $Y_0(s)$  hat an der Stelle  $s = 0$  eine Singularität. Dagegen gilt  $J_0(0) = 1$ . Beide Funktionen besitzen einen wellenförmigen Verlauf, deren Amplitude proportional zu  $1/\sqrt{s}$  ist.

Die nach außen laufende Welle lässt sich mit der gegebenen Definition nun einfach als

$$\phi(R, t) = \frac{A\pi}{2ic} e^{i\omega t} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega R}{c}\right) \quad (6.247)$$

schreiben. Würde in Gleichung (6.247) nicht  $H_0^{(2)}(s)$  sondern  $H_0^{(1)}(s)$  stehen, würde die angegebene Lösung eine nach innen laufende Welle beschreiben. So stellt die Lösung in (6.247) eine nach außen laufende Welle dar. Zu bestimmten Zeitpunkten besitzt die Lösung  $\phi(R, t)$  in radialer Richtung genau die in Abbildung 6.15 gezeigten Formen und ist proportional zu  $J_0(\omega R/c)$  beziehungsweise  $Y_0(\omega R/c)$ . Zu anderen Zeitpunkten entspricht der Verlauf einer Überlagerung der beide Funktionen.

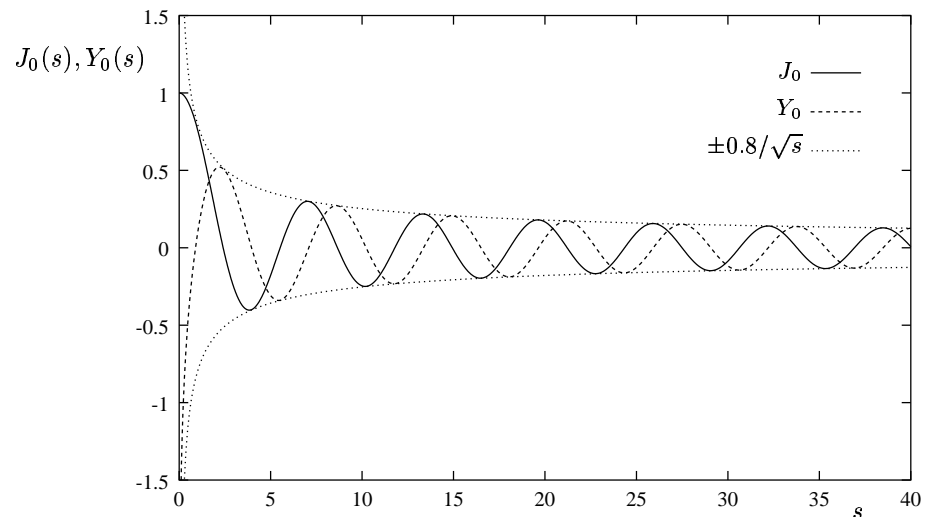


Abbildung 6.15: Bessel- und Neumannfunktion nullter Ordnung.