

# 3 Ebene Wellen

## 3.1 Eindimensionale Schallwellen im Rohr

Die in Abschnitt 2.2 als einfache Lösung der Wellengleichung vorgestellte ebene Welle gilt zunächst nur im unendlich ausgedehnten freien Raum. Sie ist damit jedoch nicht zur Beschreibung praktischer Fälle, bei denen Oberflächen und Wände das Ausbreitungsgebiet begrenzen, ungeeignet. Es zeigt sich, daß die ebene Welle die Randbedingungen für den Fall eines Rohres mit festen, undurchlässigen Wänden erfüllt und damit auch eine Lösung im Rohr darstellt. Entsprechend der Abbildung 3.1 wird

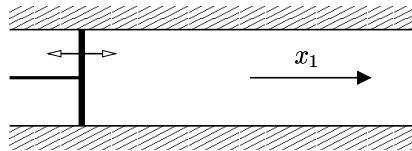


Abbildung 3.1: Ausbreitung eines Pulses

angenommen, daß die Rohrachse in  $x_1$ -Richtung zeigt. An der Rohrwand muß die Normalkomponente der Schnelle verschwinden. Die Fluidteilchen dürfen sich nicht in oder aus der festen Oberfläche bewegen. Es gilt die Randbedingung

$$v_2 = v_3 = 0 \tag{3.1}$$

In einer Ebenen Welle in  $x_1$ -Richtung ist der Druck in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct) \tag{3.2}$$

gegeben. Für die Schnelle ergibt sich bei dieser Lösung nur eine  $v_1$ -Komponente, und Beziehung (3.1) ist überall und damit natürlich auch an der Rohrwand erfüllt.

Neben der ebenen Welle existieren noch andere Lösungen, die die Randbedingung (3.1) erfüllen, aber im Rohrinernen  $v_2$  und  $v_3$  Komponenten besitzen. Diese Lösungen werden in einem späteren Kapitel besprochen. Hier soll zunächst nur der eindimensionale Fall betrachtet werden, in dem alle Größen nur von  $x_1$  abhängen und nur die  $v_1$ -Komponente auftritt. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird im folgenden

$$\begin{aligned} x_1 & \text{ als } x \\ v'_1 & \text{ als } u' \end{aligned} \tag{3.3}$$

### 3.1 Eindimensionale Schallwellen im Rohr

geschrieben.

Breitet sich eine Welle in  $x$ -Richtung aus, so ist der Druck und die Schnelle mit der neuen Schreibweise in der Form

$$p'(x, t) = f(x - ct) \quad (3.4)$$

$$u'(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} f(x - ct) \quad (3.5)$$

darstellbar. Die Ausbreitung der Welle kann man sich in der  $x, t$ -Ebene veranschaulichen. Die Größen  $p'$  und  $u'$  sind entlang der Geraden, die durch  $x - ct = \text{const}$  gegeben sind, konstant. Dies verdeutlicht die pseudo-dreidimensionale Darstellung von  $u'$  über der  $x, t$ -Ebene für ein Beispielwelle in Abbildung 3.2. Die Geraden  $x - ct = \text{const}$  verlaufen schräg in der  $x, t$ -Ebene.

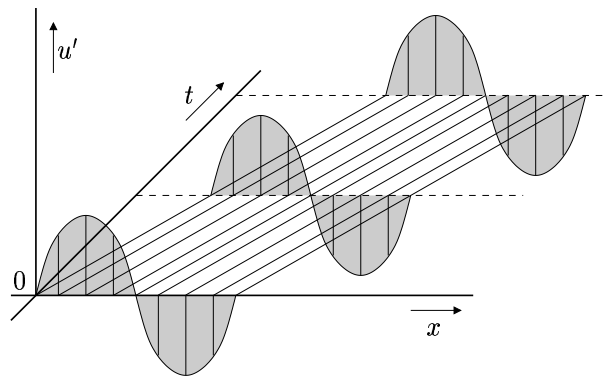


Abbildung 3.2: Ausbreitung einer Welle in Raum und Zeit

#### Anregung der Welle

Die Lösung (3.4) und (3.5) beschreibt eine Welle in einem nach beiden Seiten unendlich ausgedehnten Rohr. Die Frage bleibt, wie eine derartige Welle in einem Rohr entstehen kann. Eine Möglichkeit ist – wie in der Abbildung 3.1 dargestellt – ein Kolben mit fester und undurchlässiger Oberfläche, der das Rohr nach einer Seite hin abschließt. Wird der Kolben bewegt, so muß das Fluid an der Kolbenoberfläche der Auslenkung folgen. Bezeichnet man die Position des Kolbens mit  $x_k$  und seine Geschwindigkeit mit  $u_k$ , so ist die Randbedingung am Kolben durch

$$u'(x_k(t), t) = u_k(t) \quad (3.6)$$

gegeben. Das heißt, die Schnelle  $u'$  am Ort des Kolbens stimmt mit der Kolbengeschwindigkeit überein. Dadurch ist die Lösung in dem Rohr festgelegt.

### 3 Ebene Wellen

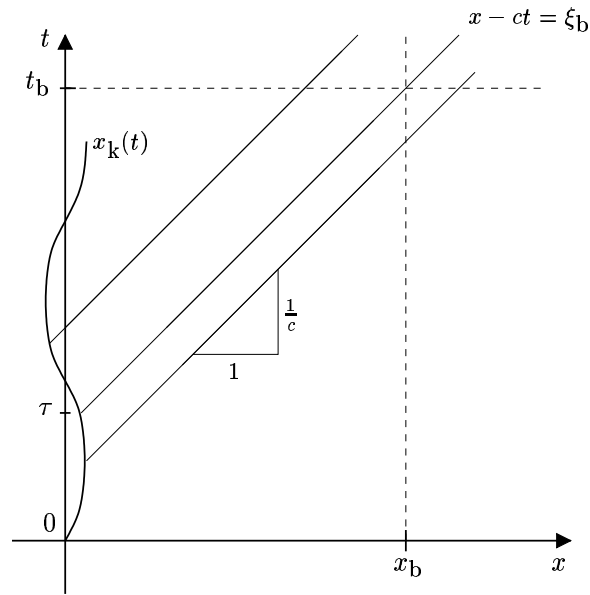


Abbildung 3.3: Zur Erläuterung der retardierten Zeit  $\tau$

Dies soll an einem Beispiel mit harmonisch bewegtem Kolben verdeutlicht werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, die mittlere Kolbenposition liegt bei  $x = 0$ . Der Ort des Kolbens wird durch

$$x_k(t) = \varepsilon \sin(\omega t) \quad (3.7)$$

gegeben. Daraus folgt für die Kolbengeschwindigkeit

$$u_k(t) = \varepsilon \omega \cos(\omega t) \quad (3.8)$$

Für die Schnelle zur Zeit  $t_b$  am Ort  $x_b$  gilt

$$u'(x_b, t_b) = u_k(\tau) = \varepsilon \omega \cos(\omega \tau) \quad (3.9)$$

Dabei ist  $\tau$  eine retardierte Zeit für die

$$(t_b - \tau) c = x_b - x_k(\tau) = x_b - \varepsilon \sin(\omega \tau) \quad (3.10)$$

gelten muß. Die retardierte Zeit kann man sich in der  $x, t$ -Ebene veranschaulichen, wie es in Abbildung 3.3 dargestellt ist.  $\tau$  ist sozusagen die Ursprungszeit der Störung, die zur Zeit  $t_b$  am Ort  $x_b$  angekommen ist.  $(t_b - \tau)$  ist die Laufzeit der Störung von der Entstehung bis zum Erreichen des Beobachters.  $(x_b - x_k(\tau))$  entspricht dem Abstand von dem Ursprungsort bis zum Beobachter. Durch die Gleichung

$$x - ct = x_b - ct_b \equiv \xi_b \quad (3.11)$$

### 3.1 Eindimensionale Schallwellen im Rohr

wird eine Gerade in der  $x, t$ -Ebene festgelegt, die durch den Punkt  $(x_b, t_b)$  läuft. Die Steigung der Geraden ist  $1/c$ . Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve  $x_k(t)$  liegt bei der durch Gleichung (3.10) festgelegten retardierten Zeit  $\tau$ . Entlang der Geraden sind die Werte für  $u'$  und  $p'$  konstant, falls wie angenommen sich nur eine Welle in  $x$ -Richtung ausbreitet.

Die Lösung für  $u'$  und damit auch für  $p'$  ist mit Gleichung (3.9) und (3.10) nur implizit gegeben, da sich Gleichung (3.10) nicht nach  $\tau$  auflösen läßt. Um  $u'$  in einer geschlossenen Form angeben zu können wird die Randbedingung (3.6) vereinfacht. Die Geschwindigkeit des Kolbens wird nicht an der aktuellen Position des Kolbens vorgegeben, sondern an seiner mittleren Position  $x = 0$ . Es gilt statt (3.6) die Randbedingung

$$u'(0, t) = u_k(t) \quad (3.12)$$

Für die retardierte Zeit gilt nun

$$(t_b - \tau) c = x_b \quad (3.13)$$

Anschaulich bedeutet dies, daß man den Schnittpunkt der Geraden  $x - ct = \xi_b$  mit der  $t$ -Achse statt mit der Kurve  $x_k(t)$  nimmt, um  $\tau$  und damit  $u'$  zu bestimmen. Im Gegensatz zu (3.10) kann (3.13) nach  $\tau$  aufgelöst werden:

$$\tau = t_b - \frac{x_b}{c} \quad (3.14)$$

Einsetzen in (3.9) ergibt

$$u'(x_b, t_b) = u_k \left( t_b - \frac{x_b}{c} \right) = \varepsilon \omega \cos(\omega t_b - k x_b) \quad (3.15)$$

Dies ist die typische Formulierung für eine sinusförmige Welle. Sie ergibt sich allerdings nur, wenn die vereinfachte Randbedingung (3.12) verwendet wird. Mit der exakten Randbedingung (3.6) ergibt sich aus der sinusförmigen Kolbenbewegung keine sinusförmige Welle, sondern eine verzerrte Welle. Die Formen der Lösungen sind in der Abbildung 3.4 gegenübergestellt. Die durchgezogene Linie ist eine Lösung, die – für ein willkürlich ausgewähltes  $\varepsilon$  – aus der exakten Randbedingung folgt. Die gestrichelte Kurve zeigt die exakte Sinuswelle, die sich aus der vereinfachten Randbedingung ergibt.

Im folgenden wird die aus Gleichung (3.10) bestimmte retardierte Zeit mit  $\tau_{\text{exakt}}$  bezeichnet. Umformen von (3.10) liefert

$$\tau_{\text{exakt}} = t_b - \frac{1}{c} x_b - \frac{\varepsilon}{c} \sin(\omega \tau_{\text{exakt}}) \quad (3.16)$$

Entsprechend wird die aus Gleichung (3.14) bestimmte retardierte Zeit mit  $\tau_{\text{approx}}$  bezeichnet. Für die Differenz der beiden Werte ergibt sich

$$\Delta \tau \equiv \tau_{\text{exakt}} - \tau_{\text{approx}} = -\frac{\varepsilon}{c} \sin(\omega \tau_{\text{exakt}}) \quad (3.17)$$

### 3 Ebene Wellen

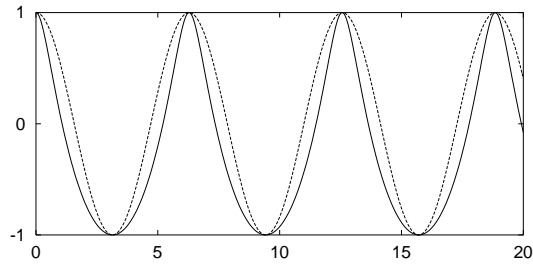


Abbildung 3.4: Vergleich der Lösung für unterschiedliche Randbedingungen

Dies läßt sich mit

$$|\Delta\tau| \leq \frac{\varepsilon}{c} \quad (3.18)$$

abschätzen. Bei einer Variation von  $\tau$  bleibt der Unterschied in  $u'$  gemäß (3.9) klein, falls die Bedingung

$$\omega|\Delta\tau| \ll 2\pi \quad (3.19)$$

erfüllt ist. Denn die Änderung des Terms  $\cos(\omega\tau)$  durch die Verschiebung von  $\tau$  um  $\Delta\tau$  ist in diesem Fall vernachlässigbar. Hinreichende für (3.19) ist nach (3.18) die Bedingung

$$\omega \frac{\varepsilon}{c} \ll 2\pi \quad (3.20)$$

Diese ist äquivalent zu

$$k\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon \ll 2\pi \quad (3.21)$$

oder einfach

$$\varepsilon \ll \lambda \quad (3.22)$$

Die Vereinfachung der Randbedingung ist demnach erlaubt, falls die maximale Auslenkung des Kolbens klein gegenüber der Wellenlänge ist. In diesem Fall ergibt eine sinusförmige Kolbenbewegung in sehr guter Näherung eine sinusförmige Welle. Bei größeren Auslenkungen tritt eine deutliche Verzerrung auf, wie sie in der Abbildung 3.4 zu sehen ist. Wenn sich der Kolben nicht rein sinusförmig bewegt, sind die harmonischen Anteile mit den höchsten Frequenzen – und den zugehörigen kleinsten Wellenlängen – entscheidend. Die Auslenkung muß klein gegenüber diesen Wellenlängen sein, damit die vereinfachte Randbedingung eine brauchbare Approximation darstellt.

### Wellenausbreitung bei Strömung

Bisher wurde immer von einem ruhendem Medium ausgegangen. Jedoch können sich auch in einem druckströmten Rohr Wellen ausbreiten. Man kann sich vorstellen, der Kolben in Abbildung 3.1 ist porös, und das Rohr wird durchströmt. Durch die Bewegung des Kolbens wird der Strömung eine wellenförmige Störung überlagert. Hier soll der einfachste Fall einer eindimensionalen Strömung mit räumlich und zeitlich konstanter Geschwindigkeit  $u_0$  betrachtet werden. Das bedeutet, es wird von einem ebenen Geschwindigkeitsprofil in dem Rohr ausgegangen. Dies stellt eine triviale Lösung der Euler-Gleichung dar. Die Reibung ist vernachlässigt und das Medium haftet nicht an der Wand.

Die in Abschnitt 2.1 hergeleitete Wellengleichung gilt nur für den Fall, daß das Medium ruht. Um die Wellenausbreitung bei Strömung behandeln zu können, müßte die Wellengleichung entsprechend erweitert werden. Dies ist in der Tat möglich. Jedoch kann bei der gegebenen einfachen Strömung mit konstanter Geschwindigkeit die Wellenausbreitung auch noch ohne erweiterte Wellengleichung angegeben werden. Dazu wird die Situation in dem mitbewegten Bezugssystem betrachtet. In diesem Bezugssystem ruht das Medium, und die Wellengleichung in der Form (2.23) gilt. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist bekannt. Sie muß nur in das ruhende Bezugssystem übertragen werden.

Die Koordinate im mitbewegten System wird mit  $x_B$  bezeichnet. Entsprechend ist  $x_R$  die Koordinate im ruhenden System. Allgemein bezeichnet der Index B im folgenden die Größen im mitbewegten System und R die im ruhenden System. Alle Schwankungsgrößen  $p'$ ,  $\rho'$  und  $u'$  sind unabhängig vom Bezugssystem. Dies gilt auch für die Geschwindigkeit  $u'$ , da es sich um eine Geschwindigkeitsdifferenz handelt. Die absolute Geschwindigkeit ist selbstverständlich vom Bezugssystem abhängig. Es gilt

$$u_B = u' \quad (3.23)$$

$$u_R = u_0 + u' \quad (3.24)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, das die Koordinaten der beiden Systeme zur Zeit  $t = 0$  übereinstimmen. Die Transformation zwischen den Koordinatensystemen wird dann durch die Gleichungen

$$x_R = x_B + u_0 t \quad (3.25)$$

$$x_B = x_R - u_0 t \quad (3.26)$$

beschrieben. Die allgemeine Lösung im mitbewegten System ist durch

$$p'_B(x_B, t) = f(x_B - ct) + g(x_B + ct) \quad (3.27)$$

gegeben. Der Druck  $p'$  ist unabhängig vom Bezugssystem. Das heißt,  $p'_B$  entspricht  $p'_R$ . Es müssen nur die Werte an den richtigen Koordinaten gleichgesetzt werden. Aus (3.26) folgt

$$p'_R(x_B, t) = p'_B(x_R - u_0 t, t) \quad (3.28)$$

### 3 Ebene Wellen

Damit wird aus der allgemeinen Lösung (3.27) im ruhenden System der Ausdruck

$$p'_R(x_B, t) = f(x_B - (c + u_0)t) + g(x_B + (c - u_0)t) \quad (3.29)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt eine Ausbreitung mit der Geschwindigkeit  $c + u_0$  in positive  $x$ -Richtung. Der zweite Term stellt eine Ausbreitung mit  $c - u_0$  in negative  $x$ -Richtung dar. Die hin- und herlaufenden Wellen besitzen nun eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Bei  $u_0 = \pm c$  kann sogar der Fall eintreten, daß eine Welle sich überhaupt nicht bewegt.

Der Ausdruck in (3.29) beschreibt eine konvektierte Schallwelle, wie man sie in dem einfachen Fall anschaulich auch erwarten würde. Die formale Herleitung dieser Lösung wurde hier an diesem einfachen Beispiel vorgestellt, weil die Methode der Transformation des Bezugssystems in den folgenden Abschnitten noch öfters angewendet wird.

## 3.2 Energie in ebenen Wellen

Bei der Anregung der Schallwellen durch einen Kolben wird Arbeit an dem Fluid geleistet. Das bedeutet, durch die Schallwelle wird Energie vom Kolben in das Fluid transferiert. Diese Energie wird von der Welle abtransportiert. Im folgenden soll die Verteilung der Energie in Schallwellen analysiert werden. Dazu wird ein Fluidelement mit dem Volumen  $V$  und der Masse  $M$  betrachtet. Es wird angenommen, das Medium sei in Ruhe und alle Bewegungen entstehen nur durch die Schallwelle. Dann besitzt das betrachtete Fluidelement bei einer Bewegung mit der Geschwindigkeit  $u'$  die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M u'^2 \quad (3.30)$$

Teilt man diese Gleichung durch das Volumen ergibt sich eine spezifische kinetische Energie mit

$$\frac{E_{\text{kin}}}{V} = \frac{1}{2} \rho u'^2 = \frac{1}{2} (\rho_0 + \rho') u'^2 \quad (3.31)$$

Im akustischen Sinn können dann die die Terme höherer Ordnung fortgelassen werden. Man erhält für die kinetische Energie pro Volumen

$$e_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 \quad (3.32)$$

Dies ist eine quadratische Größe. Die vernachlässigten Terme sind nun von dritter Ordnung und nicht wie bisher immer von zweiter Ordnung.

Das Fluidelement wird durch die Schallwelle beschleunigt und erhält die angegebene kinetische Energie. Zusätzlich wird durch die Schallwelle auch Druckarbeit an dem Fluidelement geleistet. Bei Durchlaufen eines Druckpulses wird kurzzeitig Energie durch die Kompression des Fluidelements gespeichert. Ist der Puls fort, stellt sich wieder der Ausgangszustand ein. Bei der Kompression ergibt sich eine Änderung der

### 3.2 Energie in ebenen Wellen

inneren Energie  $E_{\text{innere}}$  in dem Fluidelement. Es gilt nach den Regeln der Thermodynamik

$$dE_{\text{innere}} = T dS - p dV \quad (3.33)$$

Dabei ist  $T$  die Temperatur und  $S$  die Entropie. In der Schallwelle spielt Wärmeleitung keine Rolle, und alle Vorgänge können isentrop  $dS = 0$  betrachtet werden. Das bedeutet, die Änderung der innere Energie ist durch das Differential  $-p dV$  gegeben. Allerdings ist darin die gesamte Änderung der innere Energie in dem Fluidelement und nicht nur die durch die Schallwelle geleistete Arbeit enthalten. Die Arbeit der Schallwelle wird durch das Differential  $-p' dV$  beschrieben.

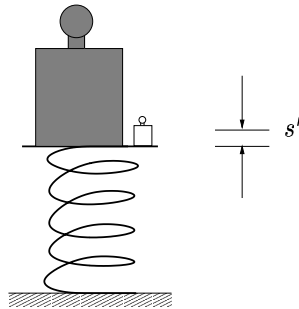


Abbildung 3.5: Zur Erklärung der potentiellen Energie in einer Störung

Zur Veranschaulichung der von der Schallwelle geleisteten Arbeit wird der Vorgang am Fluidelement einem einfachen Masse-Feder-System gegenübergestellt, wie es in Abbildung 3.5 skizziert ist. Die innere Energie in dem Fluidelement läßt sich mit der potentiellen Energie in der Feder vergleichen. Die Feder ist durch eine Kraft  $F_0$  vorgespannt, die durch das große Gewicht ausgeübt wird. Dies entspricht der Kompression des Fluidelementes durch den Ruhedruck  $p_0$ . Durch die Schallwelle wird das Fluidelement etwas weiter komprimiert oder expandiert. Dem entspricht bei der Feder eine kleine Störung durch ein winziges Zusatzgewicht – wie in der Skizze – oder etwa einen leichten Daumendruck auf das Gewicht. Durch die Störung wird eine zusätzliche Kraft  $F'$  ausgeübt, die eine kleine Auslenkung  $s'$  von der Ruheposition bewirkt. Dabei wird von der Störung – dem Daumendruck – die Arbeit  $F' s'$  geleistet. Insgesamt ändert sich die potentielle Energie in der Feder jedoch um den Wert  $(F_0 + F') s'$ . Bei dem Absenken verringert sich die potentielle Energie des großen Gewichtes, und die Energiedifferenz geht ebenfalls in die Feder über. Dem entspricht ein Umschichten von innerer Energie zwischen benachbarten Fluidelementen durch die Schallwelle.

Will man die potentielle Energie der Störung definieren, ist es sinnvoll nur die Arbeit durch die Störung und nicht die gesamte Änderung der potentielle Energie der Feder zu berücksichtigen. Wenn man leicht an dem Gewicht zieht statt zu drücken, sinkt die potentielle Energie der Feder sogar, obwohl man Arbeit leistet. Das Gesamtsystem aus dem großen Gewicht und der Feder hat jedoch potentielle Energie gewonnen.



### 3 Ebene Wellen

Analog wird hier für die Arbeit, die durch die Störung an dem Fluidelement geleistet wird, nur der Anteil durch die Druckstörung  $p'$  (entsprechend zu  $F'$  bei der Feder) berücksichtigt. Im weiteren wird dieser Anteil der inneren Energie im Fluidelement als potentielle Energie bezeichnet. Es ergibt sich

$$E_{\text{pot}}(V') = - \int_{V_0}^{V_0+V'} p' dV \quad (3.34)$$

Dabei ist  $V_0$  das Volumen des Fluidelementes im Ruhezustand  $p = p_0$ , und  $V'$  ist die Änderung des Volumens, der  $s'$  bei der Feder entspricht. Um aus (3.34) eine spezifische Energie zu erhalten, wird die Integrationsvariable  $V$  durch die Dichte  $\rho$  substituiert. Die Masse  $M = \rho V$  im Fluidelement ist konstant. Daraus folgt für das Differential

$$\rho_0 dV + V_0 d\rho = 0 \quad \leftrightarrow \quad dV = -\frac{V_0}{\rho_0} d\rho \quad (3.35)$$

Für das Integral erhält man

$$E_{\text{pot}}(V') = \frac{V_0}{\rho_0} \int_{\rho(V_0)}^{\rho(V_0+V')} p' d\rho = \frac{V_0 c^2}{\rho_0} \int_{\rho(V_0)}^{\rho(V_0+V')} \rho' d\rho \quad (3.36)$$

Dabei wurde im zweiten Schritt  $p' = c^2 \rho'$  ausgenutzt. Zweckmäßigerweise wird  $\rho'$  im Integranden durch  $\rho - \rho_0$  ersetzt. Dann kann die Größe  $\rho'$  zur Umformung der Integrationsgrenzen neu definiert werden, Beträgt das Volumen  $V_0$  so ist die Dichte  $\rho_0$ . Dem geringfügig geänderten Volumen  $V_0 + V'$  kann eine Dichte  $\rho_0 + \rho'$  zugeordnet werden. Es ergibt sich

$$E_{\text{pot}}(\rho') = \frac{V_0 c^2}{\rho_0} \int_{\rho_0}^{\rho_0+\rho'} (\rho - \rho_0) d\rho \quad (3.37)$$

Die Auflösung des Integrals bringt

$$E_{\text{pot}}(\rho') = \frac{1}{2} \frac{V_0 c^2}{\rho_0} [(\rho - \rho_0)^2]_{\rho_0}^{\rho_0+\rho'} = \frac{1}{2} \frac{V_0 c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.38)$$

Die spezifische potentielle Energie  $e_{\text{pot}}$  ergibt sich nach Division durch das Volumen. Statt durch  $V$  wird durch  $V_0$  dividiert. Dadurch resultierende Abweichung ist wieder von höherer Ordnung und wird vernachlässigt. Es folgt

$$e_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.39)$$

Schließlich läßt sich die gesamte akustische Energie pro Volumen mit  $e_a = e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}}$  zusammenfassen. Man erhält

$$e_a = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.40)$$

Damit ist die akustische Energie  $e_a$  als Funktion der Schwankungsgrößen  $u'$  und  $p'$  ausgedrückt.

### Erhaltung der Energie

In dem Feld gilt selbstverständlich die Erhaltung der Energie. Die akustische Energie  $e_a$  stellt nur einen kleinen Teil der gesamten Energie dar. Jedoch läßt sich für diesen Teil eine separate Erhaltungsgleichung ableiten.

Zur Herleitung der Erhaltungsgleichung wird von der linearisierten Kontinuitätsgleichung und der linearisierten Euler-Gleichung ausgegangen. In Abschnitt 2.1 wurde diese beiden Gleichungen für den dreidimensionalen Fall abgeleitet. Hier werden lediglich die vereinfachten Gleichungen für eine Dimension benötigt. Die linearisierte Kontinuitätsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.41)$$

Die Euler-Gleichung ist einfach durch

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (3.42)$$

gegeben.

Um die zeitliche Änderung der potentiellen Energie zu beschreiben wird (3.41) mit  $c^2 \rho'$  multipliziert. Es ergibt sich eine Gleichung mit quadratischen Termen:

$$c^2 \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

Der Ausdruck  $\rho' \partial \rho' / \partial t$  kann durch  $\frac{1}{2} (\partial / \partial t) \rho'^2$  ersetzt werden. Es folgt

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'^2}{\partial t} + p' \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.44)$$

Dabei wurde noch  $c^2 \rho' = p'$  ausgenutzt. Es zeigt sich, daß der erste Term der Zeitableitung der potentiellen Energie nach (3.39) entspricht.

Um die zeitliche Änderung der kinetischen Energie zu erhalten, wird (3.42) mit  $u'$  multipliziert. Es ergibt sich

$$\rho_0 u' \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.45)$$

Dies kann zu

$$\frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial u'^2}{\partial t} + u' \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.46)$$

umgeformt werden. Der erste Term ist die Zeitableitung der kinetischen Energie nach (3.32). Die Addition von (3.44) und (3.46) liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \right) + u' \frac{\partial p'}{\partial x} + u' \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

### 3 Ebene Wellen

Dies läßt sich kürzer als

$$\frac{\partial e_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p'u') = 0 \quad (3.48)$$

schreiben.

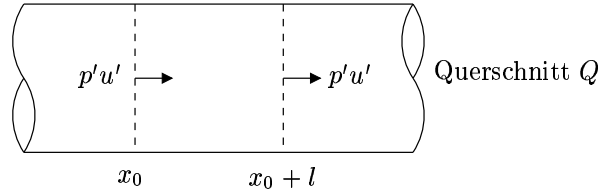


Abbildung 3.6: Zur Energiebilanz an einem Volumen

Gleichung (3.48) ist eine Erhaltungsgleichung für die akustische Energie. Um dies zu verdeutlichen wird die Gleichung über ein Volumen mit der Ausdehnung  $l$  in  $x$ -Richtung und dem Querschnitt  $Q$  integriert. Das Volumen entspricht zum Beispiel dem Abschnitt eines Rohres, wie es in Abbildung 3.6 dargestellt ist. Beginnt das Volumen bei  $x_0$ , so ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x_0+l} Q \left( \frac{\partial e_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p'u') \right) dx = 0 \quad (3.49)$$

Wird die Integration teilweise ausgeführt, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( Q \int_{x_0}^{x_0+l} e_a dx \right) = [Qp'u']_{x_0} - [Qp'u']_{x_0+l} \quad (3.50)$$

Auf der linken Seite steht die zeitliche Änderung die gesamte akustische Energie in dem betrachteten Volumen. Der erste Term auf der rechten Seite gibt an, wieviel Energie pro Zeit an der Stelle  $x_0$  in das Volumen hineintransportiert wird. Der zweite Term bedeutet entsprechend den akustischen Energiefluß an der Stelle  $x_0 + l$  aus dem Volumen heraus. Die Energie fließt dann in ein benachbartes Volumen, das an der Stelle  $x_0 + l$  beginnt. Insgesamt geht keine akustische Energie verloren.

### Intensität

Der akustische Energiefluß pro Fläche ist durch das Produkt  $p'u'$  gegeben. Zweckmäßigerweise wird mit

$$I_a = p'u' \quad (3.51)$$

die akustische Intensität eingeführt. Die Größe  $I_a$  hat die Einheit

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \cdot \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}} \quad (3.52)$$

Es handelt sich somit um eine Energieflußdichte.

Die akustische Intensität beschreibt lediglich einen Anteil der gesamten Intensität, wie auch die akustische Energie einen Anteil der gesamten Energie darstellt. Um den Zusammenhang zwischen der gesamten Intensität und der akustischen Intensität zu verdeutlichen, wird die Arbeit betrachtet, die der Kolben im Rohr aus Abbildung 3.1 an dem Medium leistet. Der Kolben bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $u_k$ . Am Kolben herrscht überall der Druck  $p_k$ . Die Querschnittsfläche mit  $Q$  gegeben, so übt der Kolben die Kraft  $Q p_k$  auf das Medium aus. Dies ergibt eine Leistung

$$P = Q p_k u_k \quad (3.53)$$

Die Leistung pro Fläche wird als Intensität  $I$  bezeichnet. Es gilt

$$I = p_k u_k \quad (3.54)$$

Zerlegt man den Druck und die Geschwindigkeit in Gleich- und Schwankungsanteil mit

$$p_k = p_0 + p'_k \quad (3.55)$$

$$u_k = u_0 + u'_k \quad (3.56)$$

so folgt für die Intensität nach dem Einsetzen

$$I = (p_0 + p'_k)(u_0 + u'_k) = p_0 u_0 + u_0 p'_k + p_0 u'_k + p'_k u'_k \quad (3.57)$$

Fall sich der Kolben nur um eine mittlere Position hin- und herbewegt, dann ist  $u_0 = 0$ . Die ersten beiden Term auf der rechten Seite von (3.57) verschwinden in diesem Fall. Es ergibt sich

$$I = p_0 u'_k + p'_k u'_k \quad (3.58)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite entspricht formal der akustischen Intensität nach (3.51). Der erste Term ändert sein Vorzeichen mit der Bewegungsrichtung. Er beschreibt damit ein Pendeln der Energie zwischen dem Kolben und dem Medium. Im zeitlichen Mittel gleichen sich die Anteile aus. Für den zeitlichen Mittelwert der Intensität gilt

$$\langle I \rangle = p_0 \langle u'_k \rangle + \langle p'_k u'_k \rangle \quad (3.59)$$

Es ist  $\langle u'_k \rangle = 0$ , wenn sich der Kolben nur um eine mittlere Position hin- und herbewegt. Damit folgt

$$\langle I \rangle = \langle p'_k u'_k \rangle \quad (3.60)$$

### 3 Ebene Wellen

Das bedeutet, das Produkt  $p'_k u'_k$  stimmt im zeitlichen Mittel mit der Intensität  $I$  überein.

In Abschnitt 3.1 wurde die Schallwelle bestimmt, die durch einen bewegten Kolben erzeugt wird. Die Werte für  $p'$  und  $u'$  an einem Beobachtungsort  $x_b$  zur Zeit  $t_b$  ergeben sich aus den Werten am Kolben zur Ursprungszeit  $\tau$ . Es wird angenommen, daß sich der Kolben um die mittlere Position  $x = 0$  bewegt. Verwendet man die einfache Randbedingung gilt die Gleichung (3.14) für  $\tau$ . Es folgt für die Welle

$$u'(x_b, t_b) = u'_k \left( t_b - \frac{x_b}{c} \right) \quad (3.61)$$

$$p'(x_b, t_b) = p'_k \left( t_b - \frac{x_b}{c} \right) \quad (3.62)$$

Eine harmonische Kolbenbewegung würde eine harmonische Welle erzeugen. Für die akustische Intensität in der erzeugten Welle an der Stelle  $x_b$  gilt

$$\langle I_a \rangle_{x_b} = \langle p'u' \rangle_{x_b} = \langle p'_k u'_k \rangle = \langle I \rangle \quad (3.63)$$

Die akustische Intensität  $I_a$  an einer Stelle entspricht tatsächlich im Mittel der vom Kolben geleisteten Arbeit pro Zeit.

### Genauigkeit

Nachträglich stellt sich die Frage, warum die akustische Energie überhaupt eingeführt wurde. Die akustische Energie wurde nach einigen Plausibilitätsüberlegungen als ein Teil der gesamten Energie definiert. Es läßt sich mit (3.48) eine Erhaltungsgleichung beweisen, die auf die akustische Intensität  $I_a = p'u'$  führt. Anscheinend stimmen im zeitlichen Mittel die akustische Intensität  $I_a$  und die Intensität  $I$ , die zur besseren Unterscheidung im folgenden als Gesamtintensität bezeichnet wird, überein. Wieso wird nicht gleich die Gesamtintensität  $I$  aus den Schwankungsgrößen  $p'$  und  $u'$  berechnet? Ist denn die Definition der akustischen Energie überhaupt notwendig?

Um die Fragen zu beantworten, wird die Genauigkeit betrachtet, mit der man die Gesamtintensität  $I$  aus den Schwankungsgrößen berechnen kann. Dazu wird wieder als Beispiel die Arbeit untersucht, die ein um eine mittlere Position hin- und herbewegter Kolben am Medium leistet. Die Gesamtintensität  $I$  ist nach (3.57) durch eine Summe aus zwei Termen gegeben. Diese Terme sind von unterschiedlicher Ordnung hinsichtlich der Schwankungsgrößen. Das Produkt  $p_0 u'_k$  ist von erster Ordnung und  $p'_k u'_k$  ist ein quadratischer Term. Es wird angenommen, die linearisierten Gleichungen wurden gelöst und  $p'_k$  und  $u'_k$  ermittelt. Die Lösung ist jedoch nicht exakt, denn die linearisierten Gleichungen gelten nur approximativ. Die berechneten Größen  $p'_k$  und  $u'_k$  sind mit einem kleinen Fehler behaftet. Wird die Kolbenbewegung  $u'_k$  direkt vorgegeben, so ist dort der Fehler natürlich Null. Es kann aber auch sein, daß – wie zum Beispiel bei einer Lautsprechermembran – nicht die Bewegung sondern die Kraft auf den Kolben vorgegeben ist. Dann muß  $u'_k$  berechnet werden und ist dadurch auch mit einem Fehler

### 3.2 Energie in ebenen Wellen

behaftet. Um die Auswirkung dieser Fehler zu verdeutlichen, wird die Zerlegung

$$p'_k = p_1 + p_2 \quad (3.64)$$

$$u'_k = u_1 + u_2 \quad (3.65)$$

eingeführt. Die Größen mit dem Index 1 sind die aus der linearen Theorie folgenden Lösungen. Sie sind von erster Ordnung. Die Größen mit dem Index 2 stellen die Fehler höherer Ordnung dar.

Die Fehler  $p_2$  und  $u_2$  sind unbekannt. Um sie zu berechnen, müßten die nichtlinearen Gleichungen gelöst werden. Dies ist aber im allgemeinen nur numerisch möglich und mit einem erheblichen Aufwand verbunden. Wenn man sich auf die linearen Gleichungen beschränkt, können nur Abschätzungen für  $p_2$  und  $u_2$  angegeben werden. Wird die Zerlegung (3.64) und (3.65) in Gleichung (3.57) eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= p_0(u_1 + u_2) + (p_1 + p_2)(u_1 + u_2) \\ &= p_0u_1 + p_0u_2 + p_1u_1 + p_1u_2 + p_2u_1 + p_2u_2 \\ &\quad O(1) \quad O(2) \quad O(2) \quad O(3) \quad O(3) \quad O(4) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Gesamtintensität  $I$  kann als Summe aus sechs Termen geschrieben werden. Diese Terme besitzen eine unterschiedliche Ordnung hinsichtlich der Schwankungsgrößen. Die Ordnung  $n$  ist unter den Summanden durch den Ausdruck  $O(n)$  angegeben. Nur der erste und der dritte Summand können mit Hilfe der linearen Gleichungen bestimmt werden. In den anderen vier Summanden treten die unbekannt Fehler  $p_2$  und  $u_2$  auf. Insbesondere ist der zweite Summand – ein quadratischer  $O(2)$ -Term – auch nicht bestimmbar. Die Gesamtintensität läßt sich somit nur bis auf einen quadratischen Fehler angeben:

$$I = p_0u_1 + p_1u_1 + O(2) \quad (3.67)$$

Der Fehler ist von der gleichen Größenordnung wie der  $p_1u_1$ -Term. Es ist daher wenig sinnvoll diesen mit zu berücksichtigen. Vernachlässigt man aber alle Terme höherer Ordnung und setzt näherungsweise  $I = p_0u_1$ , dann ergibt sich im zeitlichen Mittel

$$\langle I \rangle = p_0 \langle u_1 \rangle \equiv 0 \quad (3.68)$$

Das heißt, die näherungsweise berechnete Gesamtintensität beschreibt nicht einmal im zeitlichen Mittel den Energiefluß. Weil Terme unterschiedlicher Ordnung in dem Ausdruck für  $I$  auftreten, läßt sich anscheinend keine befriedigende Näherung finden. Dies wird jedoch bei der akustischen Energie  $e_a$  und der akustischen Intensität  $I_a$  erreicht. Beide Größen werden allein aus Termen zweiter Ordnung gebildet. Der entstehende Fehler ist damit von dritter oder höherer Ordnung. Ebenso kann gezeigt werden, daß die abgeleitete Erhaltungsgleichung für die akustische Energie nur mit einem Fehler dritter Ordnung behaftet ist. Dadurch ist die gesamte Darstellung konsistent.

### Energieerhaltung bei Strömung

In Abschnitt 3.1 wurde bereits die Lösung der Wellengleichung für den Fall einer einfachen Strömung mit konstanter Geschwindigkeit  $u_0$  angegeben. Diese wurde durch Transformation aus dem mitbewegten Bezugssystem gewonnen. Die Schwankungsgrößen  $p'$ ,  $\rho'$  und  $u'$  sind nicht vom Bezugssystem abhängig. Damit ist auch die akustische Energie

$$e_a = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.69)$$

unabhängig vom Bezugssystem. In dem mitbewegten Bezugssystem gilt die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_a)_B + \frac{\partial}{\partial x} (p'u')_B = 0 \quad (3.70)$$

Die Indizes  $B$  und  $R$  kennzeichnen hier wieder die Größen in dem mitbewegten ( $B$ ) und dem ruhendem ( $R$ ) System. Die Erhaltungsgleichung kann nun in das ruhende Bezugssystem transformiert werden. Allgemein gilt für die Zeitableitung einer Größe  $a(x, t)$  die Beziehung

$$\frac{\partial a_B}{\partial t} = \frac{\partial a_R}{\partial t} + u_0 \frac{\partial a_R}{\partial x} \quad (3.71)$$

Das heißt, der bewegte Beobachter sieht in seinem Bezugssystem auch eine zeitliche Änderung von  $a(x, t)$ , wenn die Größe für den ruhenden Beobachter zeitlich konstant ist:  $(\partial/\partial t)a_R = 0$ . Die Änderung ist proportional zur räumlichen Ableitung und der Geschwindigkeit des bewegten Beobachters. Die räumliche Ableitung ist unabhängig vom Bezugssystem. Daraus folgt für die Erhaltungsgleichung im ruhenden System die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_a)_R + u_0 \frac{\partial}{\partial x} (e_a)_R + \frac{\partial}{\partial x} (p'u')_R = 0 \quad (3.72)$$

Dies kann zu

$$\frac{\partial}{\partial t} e_a + \frac{\partial}{\partial x} (u_0 e_a + p'u') = 0 \quad (3.73)$$

umgeformt werden. Dabei wurde der Index  $R$  weggelassen. Für den ruhenden Beobachter ergibt sich somit eine akustische Intensität  $u_0 e_a + p'u'$ . Sie enthält zusätzlich zu  $I_a$  den konvektiven Anteil  $u_0 e_a$ .

Hier ist zu bemerken, daß die Energieerhaltungsgleichung (3.73) bei Strömung nur abgeleitet werden kann, weil es sich um ein sehr einfaches Strömungsfeld handelt. Im Allgemeinen ist es nicht möglich eine konsistente Definition der akustischen Energie und Intensität bei Strömung zu geben, die auf eine Erhaltungsgleichung führt, welche nur einen Fehler dritter Ordnung besitzt. Auf diese Problematik wird in einem späteren Kapitel nochmal eingegangen.

### Spezialfall zur Veranschaulichung

Für die akustische Energie und Intensität lassen sich im Fall reiner Wellenausbreitung in einer Richtung ohne Überlagerung mit entgegenlaufenden Wellen einige interessante Eigenschaften ableiten. Angenommen es breiten sich nur Wellen in positive  $x$ -Richtung aus, dann gilt die Relation

$$u' = \frac{p'}{\rho_0 c} = \frac{c}{\rho_0} \rho' \quad (3.74)$$

Damit folgt für die Anteile der akustischen Energie

$$e_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 = e_{\text{pot}} \quad (3.75)$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn reine Ausbreitung in negativer  $x$ -Richtung vorliegt. Das bedeutet, bei reiner Wellenausbreitung in einer Richtung ist die potentielle und kinetische (spezifische, akustische) Energie gleich groß, und es gilt

$$e_a = 2 e_{\text{kin}} = 2 e_{\text{pot}} \quad (3.76)$$

Eine solche Gleichverteilung ist typische für viele Schwingungsprozesse.

Für eine reine Welle in positiver  $x$ -Richtung ergibt sich für die akustische Intensität

$$I_a = p' u' = \frac{c^3}{\rho_0} \rho'^2 = c e_a \quad (3.77)$$

Damit läßt sich die Erhaltungsgleichung (3.48) als

$$\frac{\partial e_a}{\partial t} + c \frac{\partial e_a}{\partial x} = 0 \quad (3.78)$$

schreiben. Anschaulich bedeutet dies, daß sich die spezifische akustische Energie einfach mit Schallgeschwindigkeit – also mit der Welle – bewegt.

In dem Fall mit einfacher Strömung ergibt sich aus (3.73)

$$\frac{\partial e_a}{\partial t} + (c + u_0) \frac{\partial e_a}{\partial x} = 0 \quad (3.79)$$

Wie es anschaulich auch zu erwarten ist, breitet sich hier die Energie mit  $c + u_0$  aus. Diese Aussage gilt jedoch nur bei dem angenommenen einfachen Strömungsfeld mit konstanter Geschwindigkeit und der Wellenausbreitung ohne Überlagerung mit einer entgegenlaufenden Welle.

## 3.3 Stehende Welle und Resonanz

Im Abschnitt 3.1 wurde die Anregung von Wellen in einem halbumendlichen Rohr betrachtet. Die vom Kolben erzeugten Wellen breiten sich in dem unendlichen Teil theoretisch immer weiter aus. In der Realität wird natürlich das Rohr irgendwo einen Abschluß haben müssen. Dadurch wird auch die Wellenausbreitung in der Praxis anders



### 3 Ebene Wellen

aussehen. Im folgenden wird das Beispiel aus 3.1 erweitert und eine feste, undurchlässige Wand als Abschluß angenommen. Der Abstand zwischen Kolben und gegenüberliegender Wand wird mit  $L$  bezeichnet. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Wand bei  $x = 0$  liegt. Der Kolben befindet sich dann bei  $x = -L$ . Die Anordnung ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Es wird wieder vorausgesetzt, daß die Kolbenauslenkung

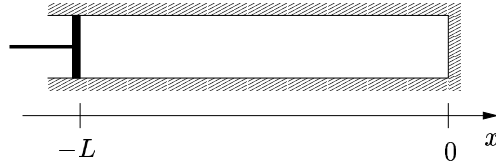


Abbildung 3.7: Abgeschlossenes Rohr mit Kolben

klein gegenüber den auftretenden Wellenlängen ist. Damit kann wie in Abschnitt 3.1 beschrieben die Randbedingung

$$u'(-L, t) = u_k(t) \quad (3.80)$$

verwendet werden. Die Kolbengeschwindigkeit  $u_k(t)$  wird an der mittleren Kolbenposition  $x = -L$  vorgegeben. Weiter wird eine harmonischen Bewegung des Kolbens angenommen. Die momentane Position des Kolbens ist durch den komplexen Ansatz

$$x_k(t) = -L + \Re\{\varepsilon e^{i\omega t}\} \quad (3.81)$$

gegeben. Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Kolbens

$$u_k(t) = \Re\{i\omega\varepsilon e^{i\omega t}\} \quad (3.82)$$

Die Randbedingung an der gegenüberliegenden festen Wand läßt sich einfach durch

$$u'(0, t) = 0 \quad (3.83)$$

ausdrücken.

Die allgemeine Lösung setzt sich aus hin- und herlaufenden Wellen zusammen. In Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, daß sich durch eine harmonische Kolbenbewegung mit der Randbedingung (3.80) eine sinusförmige Welle als Lösung ergibt. Daher werden hier auch nur sinusförmige bzw. harmonische Wellen betrachtet. Für den Schalldruck wird entsprechend der komplexe Ansatz

$$p'(x, t) = \Re\{A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}\} \quad (3.84)$$

aufgestellt. Dieser entspricht der üblichen Aufteilung der Form  $p' = f(x - ct) + g(x + ct)$  mit einer speziellen Wahl der Funktionen  $f$  und  $g$ . Die Größe  $A$  ist die Amplitude der

### 3.3 Stehende Welle und Resonanz

Teilwelle in positiver  $x$ -Richtung und  $B$  in Negativer.  $A$  und  $B$  können auch komplex sein.

Da in der Druckverteilung (3.84) die Teilwellen getrennt gegeben sind, kann nach Abschnitt 2.2 in der ebenen Welle die Schnelleverteilung direkt berechnet werden. Die Schnelle- und Druckamplituden der Teilwellen sind durch Multiplikation beziehungsweise Division durch den Wellenwiderstand  $\rho_0 c$  miteinander verknüpft. Es gilt

$$u'(x, t) = \Re\left\{ \frac{A}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \right\} \quad (3.85)$$

Damit ist die Lösung für  $p'$  und  $u'$  bis auf die beiden unbekanntenen Amplituden  $A$  und  $B$  gegeben.  $A$  und  $B$  werden durch die beiden Randbedingungen am Kolben (3.80) und an der Wand (3.83) eindeutig festgelegt.

Setzt man  $x = 0$  in Gleichung (3.85) ein, so ergibt sich aus der Randbedingung an der Wand

$$0 = u'(0, t) = \Re\left\{ \frac{1}{\rho_0 c} (A - B) e^{i\omega t} \right\} \quad (3.86)$$

Daraus folgt unmittelbar, daß

$$A = B \quad (3.87)$$

sein muß. Das heißt, die beiden Teilwellen müssen gleiche Amplituden besitzen, um die Randbedingung an der Wand zu erfüllen. Nur zwei gleichstarke Sinuswellen können so überlagern, daß sich die beiden Schnelleanteile an einer Stelle ständig gegeneinander aufheben. Für den Druck folgt mit  $A = B$  die einfachere Form

$$p'(x, t) = \Re\left\{ A [e^{-ikx} + e^{ikx}] e^{i\omega t} \right\} \quad (3.88)$$

Mit der allgemeinen Rechenregel

$$\cos(z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \quad (3.89)$$

kann dies zu

$$p'(x, t) = \Re\left\{ 2A \cos(kx) e^{i\omega t} \right\} \quad (3.90)$$

umgeformt werden. Die Verteilung der Druckamplitude besitzt danach räumlich eine Sinusform. An den Stellen mit

$$kx = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (3.91)$$

ist  $\cos(kx) = \pm 1$  und die Druckschwankungen sind maximal. Dagegen ist an Stellen mit

$$kx = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots \quad (3.92)$$

### 3 Ebene Wellen

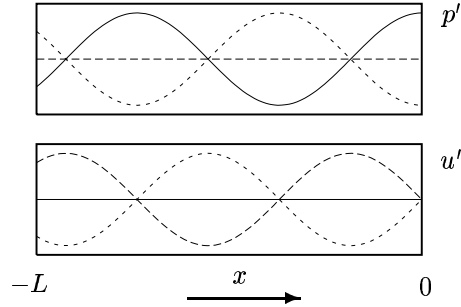


Abbildung 3.8: Form der Druck- und Schnelleverteilung in Momenten mit maximaler Auslenkungen

immer  $p' = 0$ , da dort  $\cos(kx) = 0$  gilt. Eine ähnliche Verteilung ergibt sich für die Schnelle. Mit  $A = B$  folgt aus (3.85)

$$u'(x, t) = \Re\left\{ \frac{A}{\rho_0 c} [e^{-ikx} - e^{ikx}] e^{i\omega t} \right\} \quad (3.93)$$

Unter Verwendung der Rechenregel

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \quad (3.94)$$

wird dies zu

$$u'(x, t) = \Re\left\{ -i \frac{2A}{\rho_0 c} \sin(kx) e^{i\omega t} \right\} \quad (3.95)$$

Wie die Druckamplitude besitzt auch die Schnelleamplitude eine sinusförmige Verteilung mit Extrema und Nullstellen. Die Form der Lösungen ist in Abbildung 3.8 veranschaulicht. Die Nullstellen in den Verteilungen werden Knoten genannt. Dazwischen liegen die Bereiche extremer Amplituden, die als Bäuche bezeichnet werden. Die Knoten der Druckverteilung fallen mit den Bäuchen der Schnelleverteilung zusammen und umgekehrt. An der Wand bei  $x = 0$  liegt in jedem Fall ein Schnelleknoten und ein Druckbauch. Die Position des nächsten Knotens hängt entsprechend (3.91) von der Wellenzahl  $k$  und damit der Kreisfrequenz  $\omega$  ab. Der Abstand zwischen zwei Knoten entspricht der halben Wellenlänge.

Um die gesuchte Größe  $A$  zu ermitteln, wird die Randbedingung am Kolben betrachtet. Gleichung (3.80) und (3.82) ergeben zusammen

$$u'(-L, t) = \Re\{i\omega\varepsilon e^{i\omega t}\} \quad (3.96)$$

Setzt man die Schnelleverteilung (3.95) auf der linken Seite ein, folgt

$$\Re\left\{ -i \frac{2A}{\rho_0 c} \sin(-kL) e^{i\omega t} \right\} = \Re\{i\omega\varepsilon e^{i\omega t}\} \quad (3.97)$$

### 3.3 Stehende Welle und Resonanz

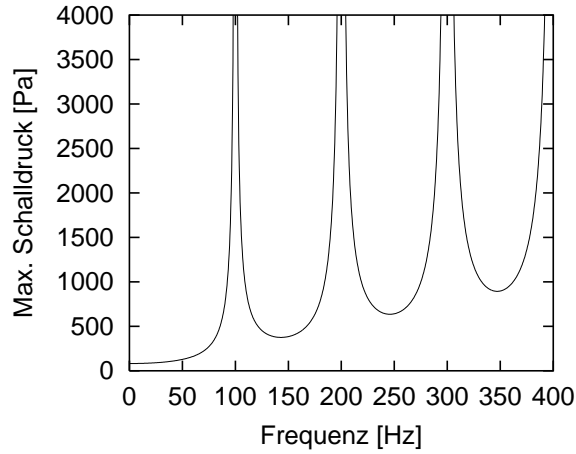


Abbildung 3.9: Maximale Druckamplitude als Funktion der Frequenz (Rohrlänge  $L = 1.7$  m und Auslenkung  $\varepsilon = 1$  mm)

Die Beziehung ist nur erfüllt, falls

$$-i \frac{2A}{\rho_0 c} \sin(-kL) = i\omega\varepsilon \quad (3.98)$$

gilt. Diese Gleichung kann nach  $A$  aufgelöst werden. Man erhält

$$A = \frac{\rho_0 c \omega \varepsilon}{2 \sin(kL)} \quad (3.99)$$

Wie erwartet, ist die Stärke der Schwankungen im Rohr proportional zur Auslenkung des Kolbens  $\varepsilon$ . Eine kompliziertere Abhängigkeit ergibt sich von der Kreisfrequenz  $\omega$ . Falls

$$kL = \frac{\omega}{c} L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.100)$$

ist, wird  $\sin(kL) = 0$ . Dann ergibt sich eine unendliche große Schwankung im Rohr. Die Abbildung 3.9 zeigt die typische Frequenzabhängigkeit der maximalen Schalldruckamplitude  $|2A|$ . In dem Beispiel wurde ein luftgefülltes Rohr (unter Normalbedingungen  $p_0 = 1$  bar,  $\rho_0 = 1.2$  Kg/m<sup>3</sup>) mit der Länge  $L = 1.7$  m und eine Kolbenauslenkung von  $\varepsilon = 1$  mm angenommen.

Unter den durch (3.100) festgelegten Bedingungen ergibt sich eine Resonanzkatastrophe mit unendlich großer Amplitude. Für stärkere Schwankungen sind jedoch die Annahmen der linearen Akustik ( $|p'| \ll p_0$ ,  $|\rho'| \ll \rho_0$ ) verletzt, und die reale beobachteten Wellen entsprechen nicht mehr der akustische Lösung. In der Realität stellt sich eine durch Dissipation und nichtlineare Effekte begrenzte Amplitude ein.

### 3 Ebene Wellen

Für ein festen Wert  $L$  sind die Frequenzen, bei denen die Resonanzfälle eintreten durch

$$\omega = \omega_n = n \frac{c\pi}{L} \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots \quad (3.101)$$

gegeben. Betrachtet man die Lösung der Wellengleichung für eines dieser  $\omega_n$  und legt die Amplitude künstlich auf einen endlichen Wert  $A = A_0 \neq 0$  fest, ergibt sich

$$u'_n(x, t) = \Re\{ -i \frac{2A_0}{\rho_0 c} \sin(\frac{\omega_n}{c} x) e^{i\omega t} \} \quad (3.102)$$

Die so definierten  $u'_n$  erfüllen natürlich nicht die Randbedingung am Kolben. Es gilt dagegen

$$u'_n(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad u'_n(-L, t) = 0 \quad (3.103)$$

Das bedeutet, daß die Lösungen  $u'_n$  nach (3.102) die Randbedingung einer zweiten festen Wand bei  $x = -L$  statt dem Kolben erfüllt. Die Lösung beschreibt eine sogenannte Eigenschwingung des Rohres, die theoretisch ohne Anregung existieren kann. Es ist sogar die Überlagerung der Eigenschwingungen

$$u'(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x, t) a_n \quad (3.104)$$

eine Lösung der Wellengleichung bei den Randbedingungen (3.103). Die Faktoren  $a_n$  können dabei frei gewählt werden.

Für eine bestimmte Kreisfrequenz  $\omega$  und Auslenkung  $\varepsilon$  des Kolbens sei die Lösung mit  $u'_{\omega, \varepsilon}$  gegeben. Sie erfüllt die Randbedingung am Kolben. Damit erfüllt aber auch die Überlagerung

$$u'(x, t) = u'_{\omega, \varepsilon}(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x, t) a_n \quad (3.105)$$

diese Randbedingung, denn es gilt  $u'(-L, t) = u'_{\omega, \varepsilon}(-L, t)$ . Überlagert man der Lösung für den angeregten Fall mit Kolbenbewegung eine Eigenschwingung, so erfüllt das Resultat auch die Randbedingung am Kolben. Das bedeutet, die Lösung für den angeregten Fall ist gar nicht eindeutig. Rein theoretisch könnten immer beliebige Eigenschwingungen zusätzlich im Rohr überlagert sein. In der Realität klingen die Eigenschwingungen jedoch durch Reibungsverluste langsam mit der Zeit ab, so daß das beobachtete Wellenfeld der angeregte Lösung  $u'_{\omega, \varepsilon}(x, t)$  in reiner Form entspricht.

### 3.4 Komplexe Wandimpedanz

Im Beispiel aus Abschnitt 3.3 war das Rohr durch eine feste, undurchlässige Wand abgeschlossen, an der die Wellen reflektiert wurden. Statt der festen Wand wird nun eine bewegliche Wand angenommen, die sich wie ein federnd befestigter Kolben im Rohr verhält. Der zweite Kolben dient als ein mechanisches Wandmodell, das in der Realität zum Beispiel eine GummIWand oder eine zur Dämmung mit Matten beklebte Wand sein kann. Die betrachtete Anordnung ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Bereits

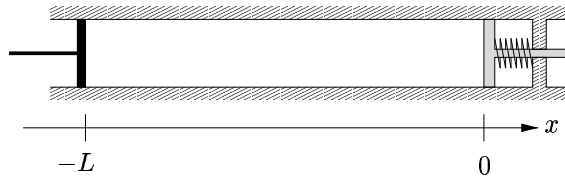


Abbildung 3.10: Rohr mit beweglicher Wand als Abschluß

in Abschnitt 1.4 wurde ein Kolben im Rohr betrachtet, der durch Druckstörungen zum Schwingen angeregt wird. Die Ergebnisse der dortigen Überlegungen können für das Wandmodell verwendet werden. Es werden folgende Annahmen gemacht:

- 1.) Rechts von der beweglichen Wand ist Vakuum ( $p = 0$ ). Keine Druckkräfte greifen auf dieser Seite an. Andernfalls würde das Wandmodell zu kompliziert werden, weil auch Wellen auf der anderen Seite der Wand berücksichtigt werden müßten.
- 2.) Bei Ruhedruck  $p = p_0$  im Rohr befindet sich die Wand an der Position  $x = 0$ . Die Druckkraft durch den Ruhedruck wird von der Vorspannung der Feder ausgeglichen. Bei Auslenkung der Wand bewirkt die Feder eine Rückstellkraft zur Ruheposition.
- 3.) Alle Störungen sind sinusförmig beziehungsweise harmonisch.

Die Position der beweglichen Wand wird mit  $x_w$  und der Druck an der Wand mit  $p_w$  bezeichnet. Es ergeben sich die Ansätze

$$x_w(t) = \Re\{ \hat{s} e^{i\omega t} \} \quad (3.106)$$

und

$$p_w(t) = p_0 + p'_w(t) = p_0 + \Re\{ \hat{p}_w e^{i\omega t} \} \quad (3.107)$$

Dabei sind  $\hat{s}$  und  $\hat{p}_w$  die komplexen Amplituden der Auslenkung und des Wanddruckes. Der Betrag  $|\hat{s}|$  ergibt die reale maximale Auslenkung in jeder Richtung. Aus (3.106) leitet sich für die Geschwindigkeit der Wand

$$u'_w(t) = \Re\{ i\omega \hat{s} e^{i\omega t} \} = \Re\{ \hat{u}_w e^{i\omega t} \} \quad (3.108)$$

### 3 Ebene Wellen

ab. Es wird hier die Schreibweise  $u'_w$  mit einem Strich verwendet, da es sich bei der Bewegung der Wand um eine kleine Störung handelt, für die  $u'_w = u_w$  gesetzt werden kann. Weiterhin ist die komplexe Amplitude der Geschwindigkeit

$$\hat{u}_w = i\omega \hat{s} \quad (3.109)$$

eingeführt worden.

Die Randbedingung an der beweglichen Wand ergibt sich aus dem in Abschnitt 1.4 beschriebenen Kräftegleichgewicht. Die Summe aus mechanischer Kraft  $K_{\text{mech}}$  und Druckkraft  $K_{\text{druck}}$  muß verschwinden. Beide Kräfte werden in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil zerlegt. Der Gleichanteil der mechanischen Kraft ist durch die Vorspannung der Feder gegeben. Dieser hebt sich mit dem Gleichanteil der Druckkraft auf, der durch den Ruhedruck  $p_0$  bewirkt wird. Analog müssen sich auch die Schwankungsanteile aufheben. Es gilt entsprechend

$$K'_{\text{mech}} + K'_{\text{druck}} = 0 \quad (3.110)$$

Die mechanische Kraft hängt von der Auslenkung und damit von der Größe  $\hat{s}$  ab. Es ist

$$K'_{\text{mech}} = \Re\{\hat{s} Z e^{i\omega t}\} \quad (3.111)$$

Dabei tritt die Größe  $Z(\omega) \in \mathbb{C}$  auf. Sie wurde als Abkürzung mit

$$Z(\omega) = -D - i\omega F + \omega^2 M \quad (3.112)$$

eingeführt. Mit  $Z(\omega)$  werden die mechanischen Eigenschaften des Wandmodells in einer Größe zusammengefaßt. Es ist  $D$  die Federkonstante,  $F$  der Reibungskoeffizient und  $M$  die Masse der Wand.

Die Druckkraft auf die Wand ergibt sich als Produkt des Wanddrucks  $\hat{p}_w$  mit der Querschnittsfläche des Rohres  $Q$ . In den Schwankungsanteil der Druckkraft geht nur die Druckschwankung  $p'_w$  ein. Es gilt

$$K'_{\text{druck}} = Q p'_w(t) = \Re\{Q \hat{p}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.113)$$

Die Schwankungsanteile können nun in die Gleichung (3.110) eingesetzt werden. Es folgt, daß die Summe der komplexen Amplituden in den beiden Ausdrücken verschwinden muß:

$$\hat{s}Z + Q\hat{p}_w = 0 \quad (3.114)$$

Dieser Zusammenhang war bereits in Abschnitt 1.4 angegeben worden. Damit kann die Druckamplitude auf einfache Weise in die Auslenkung  $\hat{s}$  umgerechnet werden.

In dem akustischen Zusammenhang ist jedoch nicht die Auslenkung sondern die Geschwindigkeit die wichtigere Größe. Üblicherweise wird mit dem Schalldruck  $p'$  und der Schnelle  $u'$  gerechnet. Der Zusammenhang zwischen  $\hat{s}$  und  $\hat{u}_w$  ist durch (3.109)

### 3.4 Komplexe Wandimpedanz

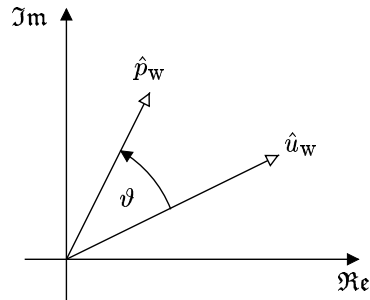


Abbildung 3.11: Veranschaulichung der komplexen Amplituden des Drucks und der Geschwindigkeit an der Wand

gegeben. Damit kann  $\hat{s}$  in (3.114) ersetzt werden. Das Ergebnis kann wiederum nach  $\hat{p}_w$  aufgelöst werden. Es ergibt sich

$$\hat{p}_w = \frac{iZ}{\omega Q} \hat{u}_w \quad (3.115)$$

Zweckmäßigerweise wird mit

$$Z_w = \frac{iZ}{\omega Q} = -\frac{i}{\omega} \frac{D}{Q} + \frac{F}{Q} + i\omega \frac{M}{Q} \quad (3.116)$$

eine neue Abkürzung eingeführt. Damit wird (3.115) zu

$$\hat{p}_w = Z_w \cdot \hat{u}_w \quad (3.117)$$

Die Größe  $Z_w$  wird als Wandimpedanz bezeichnet. Sie ist das Verhältnis der komplexen Amplituden von Druck und Schnelle an der Wand. Die Wandimpedanz ist Analog zum Wellenwiderstand  $\rho_0 c$  zu sehen, der das Verhältnis von Druck und Schnelle in der ebenen Welle angibt. Anders als  $\rho_0 c$  ist jedoch  $Z_w = Z_w(\omega)$  von der Frequenz abhängig. Auch ist  $Z_w$  eine komplexe Zahl im Gegensatz zum rein reellen Wellenwiderstand in der ebenen Welle. In der Abbildung 3.11 sind  $\hat{p}_w$  und  $\hat{u}_w$  als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt. Der Winkel zwischen den Zeigern ist mit  $\vartheta$  bezeichnet. Es gilt

$$Z_w = \frac{|\hat{p}_w|}{|\hat{u}_w|} \cdot e^{i\vartheta} \quad (3.118)$$

Nur wenn  $Z_w$  rein reell ist, gilt  $\vartheta = 0$  oder  $\vartheta = \pi$ , und die beiden Zeiger sind parallel. Im allgemeinen liegt jedoch eine Phasenverschiebung vor, die sich durch einen Winkel  $\vartheta \neq 0$  und  $\vartheta \neq \pi$  ausdrückt. Dann sind Druck und Schnelle an der Wand nicht mehr in Phase. Sie erreichen ihre maximalen und minimalen Werte zu unterschiedlichen Zeiten.

Im Zusammenhang mit der Wandimpedanz werden häufig zwei Ausdrücke verwendet, die die Eigenschaften der Wand in speziellen Fällen kennzeichnen:



### 3 Ebene Wellen

□ *Schallharte Wand*

$$\hat{u}_w = 0 \rightarrow Z_w = \infty$$

Dies entspricht einer absolut unbeweglichen Wand wie in Abschnitt 3.3.

□ *Schallweiche Wand*

$$\hat{p}_w = 0 \rightarrow Z_w = 0$$

Die Wand bewegt sich, jedoch sind keine Druckschwankungen an der Wand vorhanden.

Diese beiden Begriffe werden später noch häufiger benutzt, und das akustische Verhalten der Wand in den speziellen Fällen diskutiert.

Zunächst soll gezeigt werden, wie die Lösung in dem Rohr mit beweglicher Wand berechnet werden kann. Wie in Abschnitt 3.3 wird der Ansatz

$$p'(x, t) = \Re\{A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}\} \quad (3.119)$$

für den Druck und entsprechend

$$u'(x, t) = \Re\left\{\frac{A}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)}\right\} \quad (3.120)$$

für die Schnelle verwendet. Die beiden Unbekannten  $A$  und  $B$  sind zu bestimmen. Dazu müssen wieder die Randbedingungen ausgenutzt werden.

Wie bei der Kolbenbewegung am linken Ende des Rohres wird auch für die bewegliche Wand vorausgesetzt, daß die Auslenkung klein gegenüber der Wellenlänge im Sinne von

$$|\hat{s}| \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (3.121)$$

ist. Damit kann die vereinfachte Randbedingung verwendet werden, wobei die Wandgrößen  $p_w$  und  $u_w$  an der mittleren Position bei  $x = 0$  angenommen werden. Es soll gelten

$$p'(0, t) = p'_w(t) \quad (3.122)$$

und

$$u'(0, t) = u'_w(t) \quad (3.123)$$

Die beiden letzten Beziehungen verknüpfen die Lösung  $p'$  und  $u'$  mit den Wandgrößen  $p'_w$  und  $u'_w$ . Die komplexen Amplituden der Wandgrößen sind über die Wandimpedanz  $Z_w$  miteinander verknüpft. Dies kann benutzt werden, um eine Randbedingung zwischen  $p'$  und  $u'$  abzuleiten.

Die linken Seite von (3.122) wird mit dem Ansatz für  $p'(x, t)$  nach (3.119) bei  $x = 0$  ersetzt. Auf der rechten Seite wird der harmonische Ansatz für  $p'_w$  nach (3.107) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\Re\{(A + B) e^{i\omega t}\} = \Re\{\hat{p}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.124)$$

### 3.4 Komplexe Wandimpedanz

Entsprechend erhält man aus (3.123) mit den Ansätzen für die Schnelle (3.120) und (3.108) die Beziehung

$$\Re\left\{\frac{1}{\rho_0 c}(A - B)e^{i\omega t}\right\} = \Re\{\hat{u}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.125)$$

Aus (3.124) folgt sofort

$$\hat{p}_w = A + B \quad (3.126)$$

und (3.125) liefert

$$\hat{u}_w = \frac{1}{\rho_0 c}(A - B) \quad (3.127)$$

Das Verhältnis der komplexen Amplituden  $\hat{p}_w$  und  $\hat{u}_w$  ist nach (3.117) gerade die Wandimpedanz. Es gilt

$$Z_w = \frac{\hat{p}_w}{\hat{u}_w} = \left(\frac{A + B}{A - B}\right) \rho_0 c \quad (3.128)$$

Dies kann auch in der Form

$$Z_w = \left(\frac{1 + \frac{B}{A}}{1 - \frac{B}{A}}\right) \rho_0 c \quad (3.129)$$

dargestellt werden. Die Wandimpedanz ist gleich dem Wellenwiderstand multipliziert mit dem Faktor in der runden Klammer. Um eine einfache Beziehung zwischen den beiden gesuchten Größen  $A$  und  $B$  zu erhalten, wird nach dem Quotienten  $B/A$  aufgelöst. Es ergibt sich

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{Z_w}{\rho_0 c} - 1}{\frac{Z_w}{\rho_0 c} + 1} \equiv R_w \quad (3.130)$$

Das Verhältnis der Amplituden der von der Wand weg ( $B$ ) und der zur Wand hin ( $A$ ) laufenden Welle wird mit  $R_w$  abgekürzt. Die Größe  $R_w$  wird als Reflexionsfaktor bezeichnet.

Im Allgemeinen ist der Reflexionsfaktor eine komplexe Zahl. Er hängt von der Wandimpedanz und dem Wellenwiderstand ab

$$R_w = R_w(Z_w, (\rho_0 c)) \quad (3.131)$$

Mit der Abkürzung ergibt sich die einfache Darstellung

$$B = R_w A \quad (3.132)$$

### 3 Ebene Wellen

Das heißt, die Randbedingung an der Wand bei  $x = 0$  liefert wie im vorangegangenen Abschnitt 3.3 eine Beziehung zwischen  $A$  und  $B$ . Diese ist jedoch etwas komplizierter als einfach  $A = B$ , wie im Fall der starren Wand. Dennoch kann analog zu diesem Fall Gleichung (3.132) verwendet werden, um eine der beiden Unbekannten  $A$  und  $B$  zu eliminieren. Durch die Randbedingung am Kolben bei  $x = -L$  kann dann – wie in Abschnitt 3.3 – die verbleibende Unbekannte bestimmt werden.

Die konkrete Berechnung der Lösung wird hier jedoch nicht durchgeführt. Sie wird dem Leser als Übung überlassen. Stattdessen sollen einige Spezialfälle betrachtet werden. Diese sind in der folgenden Liste zusammengestellt:

□ *Schallharte Wand*

$$\hat{u}_w = 0, Z_w = \infty \rightarrow R_w = 1$$

Damit führt Gleichung (3.132) auf  $B = A$ , was dem Resultat für die unbewegliche Wand entspricht. Eine eintreffende Welle wird in gleicher Stärke reflektiert. In der Praxis gilt eine Wand als schallhart, falls

$$|Z_w| \gg \rho_0 c \quad (3.133)$$

ist. Nach Gleichung (3.130) wird dann  $R_w \approx 1$ , und  $A = B$  ist eine gute Approximation.

□ *Schallweiche Wand*

$$\hat{p}_w = 0, Z_w = 0 \rightarrow R_w = -1$$

Eine eintreffende Welle wird in gleicher Stärke jedoch mit umgekehrten Vorzeichen (auf den Druck  $p'$  bezogen) reflektiert. Analog zu oben gilt eine Wand als schallweich, falls

$$|Z_w| \ll \rho_0 c \quad (3.134)$$

gilt. Dann ergibt sich  $R_w \approx -1$ . Da der Wellenwiderstand von Luft relativ klein ist, sind für Luft praktisch keine Oberflächen schallweich. Eine Styroporplatte im Wasser wird in Experimenten oft als schallweiche Wand verwendet.

□ *Reflexionsfreier Abschluß oder reflexionsfreie Anpassung*

$$Z_w = \rho_0 c \rightarrow R_w = 0$$

Eine eintreffende Welle wird komplett von der Wand verschluckt und keine Welle wird reflektiert. In diesem Fall muß  $Z_w$  rein reell sein. Das mechanische Wandmodell liefert

$$Z_w = -\frac{i}{\omega} \frac{D}{Q} + \frac{F}{Q} + i\omega \frac{M}{Q} \quad (3.135)$$

Ein reflexionsfreier Abschluß ergibt sich zum Beispiel für

$$M = 0; D = 0; \frac{F}{Q} = \rho_0 c \quad (3.136)$$

Die Masse und die Federkonstante sind Null. Der Reibungskoeffizient ist so angepaßt, daß durch die Reibung die Energie der Welle gerade absorbiert wird. Dies

### 3.5 Reflexion und Transmission an Mediengrenzen

ist analog zu den Abschlußwiderständen von 50 Ohm oder 75 Ohm, die häufig an Koaxialleitungen eingesetzt werden, um störende Reflexionen an den Leitungsenden zu vermeiden.

Auch bei endlicher Masse und Federkonstante ist ein reflexionsfreier Abschluß möglich. Dazu müssen  $M$ ,  $D$  und  $\omega$  die Bedingung

$$-\frac{i D}{\omega Q} + i\omega \frac{M}{Q} = 0 \quad (3.137)$$

erfüllen. Dies ist äquivalent zu

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{M}} \quad (3.138)$$

Das heißt, bei einer Frequenz  $\omega$  verschwindet der Imaginärteil von  $Z_w$ . Ist zusätzlich  $F/Q = \rho_0 c$ , dann wird die Welle nicht reflektiert. Dies gilt jedoch nur für die nach (3.138) gegebenen speziellen Frequenz, die der Resonanzfrequenz der Wand entspricht.

## 3.5 Reflexion und Transmission an Mediengrenzen

Im letzten Abschnitt wurde die Reflexion von Schallwellen an einer flexiblen Wand betrachtet. Eine Reflexion kann auch an Trennflächen zwischen zwei verschiedenen Medien auftreten. Eine solche Trennfläche oder Mediengrenze liegt zum Beispiel in einem senkrecht ausgerichteten Rohr vor, das bis zu einer bestimmten Höhe mit Wasser angefüllt ist. Über der Wasseroberfläche befindet sich Luft. Im folgenden soll betrachtet werden, was passiert, wenn eine ebene Welle von oben auf die Trennfläche trifft. Es

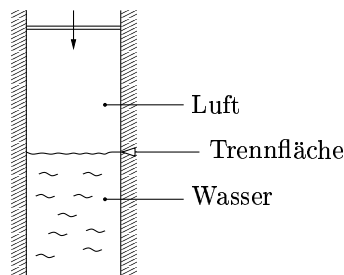


Abbildung 3.12: Zum Übergang der Schallwelle von Luft nach Wasser

sind zwei Bereiche mit verschiedenen Fluiden vorhanden, in denen eine unterschiedliche Schallgeschwindigkeit und Dichte – und damit ein unterschiedlicher Wellenwiderstand – vorliegt. Zweckmäßigerweise wird das Koordinatensystem so gewählt, daß die Trennfläche bei  $x = 0$  liegt.

### 3 Ebene Wellen

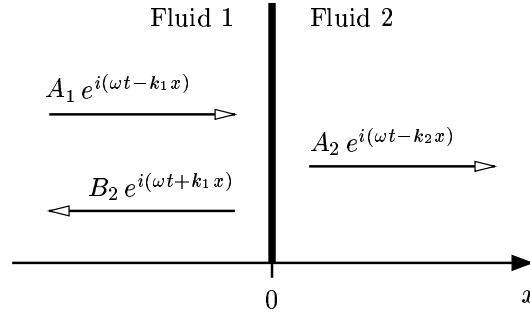


Abbildung 3.13: Einfallende ( $A_1$ ), reflektierte ( $B_1$ ) und transmittierte ( $A_2$ ) Welle an der Mediengrenze bei  $x = 0$ .

Betrachtet wird der Fall, daß eine harmonische Welle mit der komplexen Amplitude  $A_1$  sich im Bereich des Fluids 1 ausbreitet und auf die Trennfläche trifft. Dabei kann eine reflektierte Welle mit der Amplitude  $B_1$  und eine transmittierte Welle mit der Amplitude  $A_2$  im Bereich des Fluids 2 entstehen. Die Situation ist in Abbildung 3.13 veranschaulicht. Es wird angenommen, daß keine Welle aus dem Bereich des Fluids 2 – von rechts kommend – auf die Trennfläche zuläuft.

In den beiden Bereichen gilt die Wellengleichung für den Schalldruck. Jedoch kann die Wellengleichung nicht auf das gesamte Gebiet angewendet werden, da in den beiden Bereichen unterschiedliche Werte für  $\rho_0$  und  $c$  eingesetzt werden müssen. Es werden daher zunächst getrennte Lösungen für die beiden Bereiche betrachtet. Entsprechend wird die Lösung für den Druck mit

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{für } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.139)$$

und für die Schnelle mit

$$u'(x, t) = \begin{cases} u'_1(x, t) & \text{für } x < 0 \\ u'_2(x, t) & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.140)$$

in Teillösungen unterteilt. Im Bereich 1 wird für den Druck der Ansatz

$$p'_1(x, t) = \Re\{A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}\} \quad (3.141)$$

und im Bereich 2

$$p'_2(x, t) = \Re\{A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)}\} \quad (3.142)$$

verwendet. Die unterschiedlichen Größen in den beiden Bereichen werden durch die Indizes 1 und 2 gekennzeichnet. Auch die Wellenzahl  $k = \omega/c$  ist über die Schallgeschwindigkeit  $c$  von dem Fluid abhängig und entsprechend mit einem Index versehen.

### 3.5 Reflexion und Transmission an Mediengrenzen

Sonst entspricht die Darstellung der üblichen komplexen Schreibweise. Die Ansätze (3.141) und (3.142) stellen allgemeine Lösungen für den betrachteten harmonischen Fall dar.

Für die Schnelle ergibt sich aus den Ansätzen für den Druck

$$u'_1(x, t) = \Re\left\{ \frac{A_1}{(\rho_0 c)_1} e^{i(\omega t - k_1 x)} - \frac{B_1}{(\rho_0 c)_1} e^{i(\omega t + k_1 x)} \right\} \quad (3.143)$$

und

$$u'_2(x, t) = \Re\left\{ \frac{A_2}{(\rho_0 c)_2} e^{i(\omega t - k_2 x)} \right\} \quad (3.144)$$

Anstatt die Symbole  $\rho_0$  und  $c$  einzeln zu kennzeichnen, wird der Wellenwiderstand  $(\rho_0 c)$  eingeklammert und der entsprechenden Index an die Klammer geschrieben.

Es stellt sich die Frage, wie stark die reflektierte und die transmittierte Welle bei einer vorgegebenen Amplitude der einfallenden Welle ist. Das heißt, es soll für ein bekanntes  $A_1$  die Größen  $B_1$  und  $A_2$  berechnet werden. Um die beiden Unbekannten bestimmen zu können, sind zwei Bedingungen notwendig. Diese ergeben sich durch die Bedingungen, die an der Trennfläche erfüllt sein müssen. Wenn die Trennfläche durch die eintreffende Störung ausgelenkt wird, folgen auf beiden Seiten die Fluidelemente. Damit herrscht auf beiden Seiten die gleiche Geschwindigkeit, und an der Trennfläche gilt  $u'_1 = u'_2$ . Genauso ist eine Unstetigkeit des Druckes in der nichtdurchströmten Trennfläche unmöglich. Ein Drucksprung würde sofort zu einer unendlichen Beschleunigung von Fluidelementen führen. Es muß daher auch  $p'_1 = p'_2$  gelten.

Die Bedingungen für Druck und Schnelle stellen Randbedingungen an die Teillösungen (3.141) bis (3.144) dar. Die Randbedingungen gelten an der momentanen Position der Trennfläche. Es wird angenommen, daß die Auslenkung der Trennfläche klein gegenüber den auftretenden Wellenlängen bleibt. Dabei ist zu beachten, daß für eine gegebene Frequenz die Wellenlänge  $\lambda = \omega / (2\pi c)$  in den Bereichen unterschiedlich sein kann. Die Bedingung muß selbstverständlich für beide Werte von  $\lambda$  erfüllt sein. Dann kann hier – analog zu der Randbedingung am Kolben in den vorherigen Abschnitten – die Auslenkung der Wand vernachlässigt und die Bedingungen für  $u'$  und  $p'$  an der mittleren Position der Trennfläche  $x = 0$  angenommen werden. Für den Druck ergibt sich

$$p'_1(0, t) = p'_2(0, t) \quad (3.145)$$

und für die Schnelle

$$u'_1(0, t) = u'_2(0, t) \quad (3.146)$$

Es sei hier angemerkt, daß durch die beiden Bedingungen die Erhaltung der akustischen Energie an der Trennfläche gewahrt bleibt. Die akustische Intensität  $p'u'$  ist auf beiden Seiten gleich. So kann an der Stelle  $x = 0$  keine Energie verschwindet oder aus ihr entspringen.

### 3 Ebene Wellen

Setzt man die Ansätze (3.141) und (3.142) in die Bedingung (3.145) ein, ergibt sich

$$\Re\{[A_1 + B_1] e^{i\omega t}\} = \Re\{A_2 e^{i\omega t}\} \quad (3.147)$$

Daraus folgt sofort die Beziehung

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (3.148)$$

zwischen den gesuchten Größen. Einsetzen der Ansätze für die Schnelle (3.143) und (3.144) in Bedingung (3.146) ergibt

$$\Re\left\{\frac{[A_1 - B_1]}{(\rho_0 c)_1} e^{i\omega t}\right\} = \Re\left\{\frac{A_2}{(\rho_0 c)_2} e^{i\omega t}\right\} \quad (3.149)$$

Man erhält eine zweite Beziehung

$$\frac{[A_1 - B_1]}{(\rho_0 c)_1} = \frac{A_2}{(\rho_0 c)_2} \quad (3.150)$$

mit der die gesuchten Größen bestimmt werden können. Auflösen des Gleichungssystems (3.148) und (3.150) nach der Amplitude der reflektierten Welle ergibt

$$B_1 = \frac{(\rho_0 c)_2 - (\rho_0 c)_1}{(\rho_0 c)_2 + (\rho_0 c)_1} A_1 \equiv R A_1 \quad (3.151)$$

Erwartungsgemäß ist die Stärke der reflektierten Welle proportional zur Stärke der einfallenden Welle. Der Proportionalitätsfaktor wird mit  $R$  abgekürzt und als Reflexionsfaktor bezeichnet. Es gilt

$$R = \frac{\frac{(\rho_0 c)_2}{(\rho_0 c)_1} - 1}{\frac{(\rho_0 c)_2}{(\rho_0 c)_1} + 1} \quad (3.152)$$

Nach (3.148) ergibt sich schließlich für die transmittierte Welle

$$A_2 = A_1 + B_1 = (1 + R) A_1 \equiv T A_1 \quad (3.153)$$

Dabei wurde der Transmissionsfaktor  $T = 1 + R$  eingeführt. Im Gegensatz zu dem komplexen Reflexionsfaktor  $R_w$  aus dem letzten Abschnitt, der die Reflexion an der flexiblen Wand beschreibt, ist  $R$  nach (3.152) rein reell. Auch hängt  $R$  – und damit die Reflexion an der Trennfläche – nicht von der Frequenz  $\omega$  ab. Die Größe  $R_w$  ist dagegen über die Wandimpedanz von der Frequenz abhängig.

Natürlich gilt die bisherige Betrachtung auch für Trennflächen zwischen zwei Flüssigkeiten, aber in der Praxis sind Trennflächen zwischen einer Flüssigkeit und einem Gas besonders häufig. Typischerweise sind die Wellenwiderstände in Gasen deutlich niedriger als in Flüssigkeiten. Zum Beispiel ist der in Wasser etwa 4000 mal so groß

### 3.6 Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

wie der in Luft. Die Dichte in Flüssigkeiten ist höher, und auch die Schallgeschwindigkeit ist größer, da Flüssigkeiten inkompressibler als Gase sind. Ist zum Beispiel

$$(\rho_0 c)_2 \gg (\rho_0 c)_1 \quad (3.154)$$

so wird nach (3.152) der Reflexionsfaktor  $R \approx 1$ . Das bedeutet, eine aus Luft kommende und senkrecht auf eine Wasseroberfläche treffende Welle wird total reflektiert. Die transmittierte Welle besitzt nach (3.153) die doppelte Druckamplitude der einfallenden Welle  $A_2 \approx 2 A_1$ . Umgekehrt wird bei

$$(\rho_0 c)_2 \ll (\rho_0 c)_1 \quad (3.155)$$

der Wert  $R \approx -1$ . Die reflektierte Welle besitzt die gleiche Stärke der einfallenden Welle, jedoch ist die Phase gespiegelt. Die Druckamplitude der transmittierten Welle ist mit  $|A_2| \ll |A_1|$  vernachlässigbar gering.

### 3.6 Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Randwertprobleme behandelt. Dabei wurden ausschließliche harmonische Lösungen betrachtet, die sich durch die harmonische Randbedingungen ergaben. Nun soll ein anderen Typ von Aufgabenstellung vorgestellt werden.

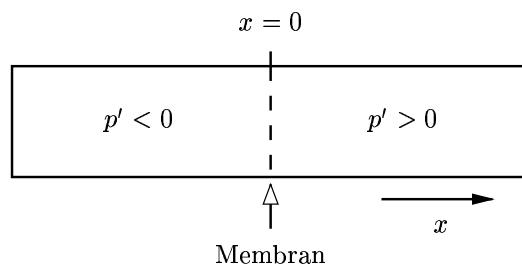


Abbildung 3.14: Durch Membran in zwei Kammern unterschiedlichen Drucks unterteiltes Rohr

Gegeben ist ein beidseitig abgeschlossenes Rohr mit einer undurchlässigen Membran in der Mitte. Die beiden Rohrhälften sind mit dem gleichen Medium jedoch mit einem unterschiedlichen Druck gefüllt. Die Anordnung ist in Abbildung 3.14 skizziert. In dem Beispiel ist links der Druck niedriger als rechts. Zur Zeit  $t = 0$  platzt die Membran, und der Druck im Rohr kann sich ausgleichen. In der Realität klingen nach einiger Zeit alle Störungen ab, und es stellt sich der mittlere Druck  $p = p_0$  im gesamten Rohr ein. Dabei spielen Effekte wie Reibung und Dissipation eine Rolle. Die akustischen Gleichungen können damit das Abklingen nicht beschreiben. Jedoch kann mit ihnen berechnet werden, wie die Druckwellen kurz nach dem Platzen der Membran



### 3 Ebene Wellen

aussehen, und wie der Ausgleichsvorgang im einzelnen abläuft. Hierbei handelt es sich um ein sogenanntes Anfangswertproblem. Die Anfangswerte bei  $t = 0$  sind gegeben. Die Druckverteilung hat die Form

$$p'(x, 0) = \begin{cases} -A & \text{für } x < 0 \\ A & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.156)$$

Dabei ist  $A > 0$  der Über- beziehungsweise Unterdruck in den beiden Hälften. Der Druckunterschied beträgt  $2A$ . Vor der Platzen der Membran ist alles in Ruhe und damit

$$u'(x, 0) = 0 \quad (3.157)$$

Gesucht ist nun die Druckverteilung

$$p'(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (3.158)$$

für spätere Zeitpunkte  $t > 0$ . Das bedeutet, die Funktionen  $f$  und  $g$  sollen bestimmt werden.

Die Anfangswertverteilung (3.156) besitzt an der Stelle  $x = 0$  eine Unstetigkeit. Dadurch ergibt sich eine Schwierigkeit beim Einsetzen in die Wellengleichung, da die Lösung nicht überall differenzierbar ist. Auf diese Problematik wird weiter unten noch ausführlicher eingegangen. Zunächst soll hier ganz allgemein dargestellt werden, wie für gegebene Anfangsverteilungen  $p'$  und  $u'$  die Funktionen  $f$  und  $g$  berechnet werden können. Dabei wird vorerst angenommen,  $p'$  und  $u'$  seien überall zweimal differenzierbar.

Die Wellengleichung für den Druck ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung müssen auch hier zwei Bedingungen – zum Beispiel der Wert und die Zeitableitung – als Anfangsbedingung vorgegeben werden. Erst dann kann die Lösung eindeutig bestimmt werden. Allein mit der Vorgabe des Drucks  $p'$  wäre die Lösung nicht eindeutig. Ist zusätzlich die Schnelle  $u'$  bekannt, so kann daraus eine zweite Bedingung an den Druck  $p'$  erzeugt werden. Dies ist mit Hilfe der linearisierten Kontinuitätsgleichung möglich. Diese lautet in einer Dimension

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.159)$$

Ersetzt man mit  $p' = c^2 \rho'$  die Dichte durch den Druck erhält man

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.160)$$

Mit  $u'(x, 0)$  ist auch die räumliche Ableitung von  $u'$  zur Zeit  $t = 0$  gegeben. Daraus kann mit (3.160) die Zeitableitung für  $p'$  berechnet werden. Es sind dann zwei Bedingungen an  $p'$  gegeben, und eine Lösung der Anfangswertproblems ist theoretisch möglich.

### 3.6 Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

Hier soll ein etwas anderer Weg vorgestellt werden, an dem einige mathematischen Eigenschaften der Wellengleichung und ihrer Lösungen deutlich werden. Die Wellengleichung wurde aus der linearisierten Kontinuitätsgleichung und der linearisierten Euler-Gleichung abgeleitet. Im eindimensionalen Fall lautet letztere

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.161)$$

Die linearisierte Kontinuitätsgleichung war bereits in die Gleichung (3.160) umgeformt worden. Zusammen bilden die beiden Gleichungen (3.160) und (3.161) ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die abhängigen Variablen  $p'$  und  $u'$ . Dieses System ist voll äquivalent zur Wellengleichung für  $p'$ . Das heißt, jede Lösung der Wellengleichung erfüllt (3.160) und (3.161). Umgekehrt erfüllen die Lösungen des Systems auch die Wellengleichung.

Das System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung kann nun auf eine interessante Form gebracht werden. Multipliziert man Gleichung (3.161) mit  $\rho_0 c$  und addiert das Resultat zu (3.160) ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}(p' + \rho_0 c u') + c \frac{\partial}{\partial x}(p' + \rho_0 c u') = 0 \quad (3.162)$$

Analog erhält man durch Subtraktion die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t}(p' - \rho_0 c u') - c \frac{\partial}{\partial x}(p' - \rho_0 c u') = 0 \quad (3.163)$$

Die beiden neuen Gleichungen sind wieder ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Das neue System ist zum alten System und damit zur Wellengleichung für den Schalldruck immer noch voll äquivalent. Es hat nur mathematische eine besondere Eigenschaft. Dies wird deutlich, wenn man eine Substitution der abhängigen Variablen durchführt. Statt den physikalischen Größen  $p'$  und  $u'$  werden die Variablen

$$R_1 = p' + \rho_0 c u' \quad (3.164)$$

und

$$R_2 = p' - \rho_0 c u' \quad (3.165)$$

verwendet. Damit kann das Differentialgleichungssystem als

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \quad (3.166)$$

und

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - c \frac{\partial R_2}{\partial x} = 0 \quad (3.167)$$

geschrieben werden. Die Lösung dieses Systems ist relativ einfach, da beide Gleichungen entkoppelt sind. Die Variable  $R_1$  tritt nur in (3.166) auf und  $R_2$  nur in (3.167). Im ursprünglichen System waren  $p'$  und  $u'$  immer gemischt vorgekommen.

### 3 Ebene Wellen

Die gezeigte Entkoppelung der Gleichungen in einem System partieller Differentialgleichungen funktioniert immer, wenn das System vom sogenannten hyperbolischen Typ ist. Auf die mathematischen Details der Klassifizierung der Differentialgleichungssystem kann hier nicht weiter eingegangen werden. Es soll nur erwähnt werden, daß die eingeführten Variablen  $R_1$  und  $R_2$  üblicherweise als Riemann-Invarianten bezeichnet werden.

In jedem Fall ist die Wellengleichung und damit auch das äquivalente System vom hyperbolischen Typ. Die Entkoppelung bedeutet anschaulich eine Trennung der hin und herlaufenden Wellen. Gleichung (3.166) beschreibt eine reine Ausbreitung in positiver  $x$ -Richtung. Die Lösung hat die allgemeine Form

$$R_1(x, t) = F(x - ct) \quad (3.168)$$

Die Funktion  $F$  wird durch die Anfangs und Randbedingungen festgelegt. Die Lösung stellt eine einfache Verschiebung der Verteilung von  $R_1$  mit der Geschwindigkeit  $c$  in positive  $x$ -Richtung dar. Betrachtet man die Lösung in der  $x, t$ -Ebene, so ist die Größe  $R_1$  entlang der Kurven mit  $x - ct = \text{const}$  konstant beziehungsweise invariant. Daher stammt auch der Ausdruck "Invariante". Die Kurven  $x - ct = \text{const}$  werden als Charakteristiken bezeichnet. Entlang ihnen breitet sich sozusagen die Lösung  $R_1$  aus. Im allgemeinen können die Charakteristiken auch gekrümmt sein. Für lineare Differentialgleichung wie (3.166) sind sie jedoch einfach Geraden.

Die Wellenausbreitung in der Gegenrichtung – in negativer  $x$ -Richtung – wird durch (3.167) erfaßt. Entsprechend lautet die Lösung auch

$$R_2(x, t) = G(x + ct) \quad (3.169)$$

Die Funktion  $G$  ist das Analogon zu  $F$ . Die Größe  $R_2$  ist entlang der Kurven  $x + ct = \text{const}$  konstant. Die Verteilung von  $R_2$  verschiebt sich entsprechend mit der Geschwindigkeit  $c$  in negativer  $x$ -Richtung.

Sind  $p'$  und  $u'$  zur Zeit  $t = 0$  bekannt, so kann daraus mit (3.164) und (3.165) die Verteilung von  $R_1$  und  $R_2$  berechnet werden. Damit sind dann auch die Funktionen  $F$  und  $G$  festgelegt, denn es gilt  $R_1(x, 0) = F(x)$  und  $R_2(x, 0) = G(x)$ . So kann sofort die Lösung für  $R_1$  und  $R_2$  für alle Zeiten  $t > 0$  angegeben werden. Für die praktische Anwendung sind jedoch nicht die Riemann-Invarianten sondern der Druck und die Schnelle von Interesse. Um sie zu berechnen wird das  $2 \times 2$  Gleichungssystem (3.164) und (3.165) invertiert. Es ergibt sich

$$p' = \frac{1}{2} (R_1 + R_2) \quad (3.170)$$

und

$$u' = \frac{1}{2\rho c} (R_1 - R_2) \quad (3.171)$$

Damit kann aus den mathematischen Größen  $R_1$  und  $R_2$  wieder der gesuchte Druck  $p'$  und die Schnelle  $u'$  berechnet werden. Setzt man (3.168) und (3.169) in (3.170) ein,

### 3.6 Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

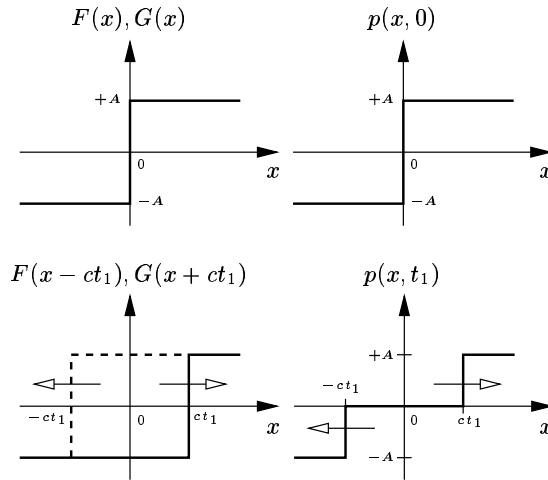


Abbildung 3.15: Anfangsverteilungen zur Zeit  $t = 0$  oben und zur Zeit  $t_1 > 0$  unten

ergibt sich

$$p'(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + G(x + ct)] \quad (3.172)$$

Diese Lösung entspricht der ursprünglichen Form (3.158). Die gesuchten Funktion  $f$  und  $g$  können direkt angegeben werden. Es gilt einfach:  $f = F/2$  und  $g = G/2$ . Somit wurde ein systematischer Weg gefunden, die Funktionen  $f$  und  $g$  zu bestimmen.

Im folgenden sollen die Ergebnisse auf das konkrete Anfangswertproblem aus Abbildung 3.14 angewendet werden. Die Anfangsbedingungen sind durch (3.156) und (3.157) gegeben. Wegen  $u'(x, 0) = 0$  ergibt sich für die Funktion  $F$

$$F(x) = R_1(x, 0) = p'(x, 0) + \rho_0 c u'(x, 0) \equiv p'(x, 0) \quad (3.173)$$

Analog folgt für  $G$

$$G(x) = R_2(x, 0) = p'(x, 0) - \rho_0 c u'(x, 0) \equiv p'(x, 0) \quad (3.174)$$

Das bedeutet, wenn – wie in dem Rohr – die Schnelle  $u'$  zu Beginn bei  $t = 0$  gleich Null ist, folgt einfach

$$F(x) = G(x) = p'(x, 0) \quad (3.175)$$

Die beiden Funktionen  $F$  und  $G$  sind in dem speziellen Fall identisch.

Die Lösung (3.172) läßt sich damit veranschaulichen. Das obere linke Bild in Abbildung 3.15 zeigt den Verlauf von  $F(x - ct)$  und  $G(x + ct)$  bei  $t = 0$ . Die Kurven entsprechen dem Druckverlauf  $p'(x, 0)$ , der rechts daneben aufgezeichnet ist. Darunter sind die gleichen Kurven für einen Zeitpunkt  $t_1 > 0$  dargestellt. Die durchgezogene

### 3 Ebene Wellen

$F$ -Kurve hat sich nach rechts und die gestrichelte  $G$ -Kurve nach links verschoben. Entsprechend ergibt sich nach (3.172) in dem Intervall  $[-ct_1, ct_1]$  der Druck  $p'(x, t_1) = 0$ . Außerhalb dieses Bereichs entspricht der Druck noch seinem Anfangswert.

Bei den bisherigen Überlegungen wurde nicht berücksichtigt, daß die angegebene Lösung zwei Sprungstellen besitzt. Diese ergeben sich notwendigerweise aus der Unstetigkeit in der Anfangsbedingung. Strenggenommen ist die angegebene Druckverteilung mit Sprungstellen als Lösung der Wellengleichung nicht zulässig, da sie nicht überall differenzierbar ist. Die gegebene Anfangswertaufgabe wäre also mit der Wellengleichung gar nicht vernünftig zu beschreiben.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß es dennoch sinnvoll ist, die Lösungen mit Sprungstellen zuzulassen. Zunächst wird betrachtet, wie die Richtigkeit einer Lösung mit Sprungstelle rein formal überprüft werden kann. Dazu wird stellvertretend für das ganze System die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \quad (3.176)$$

betrachtet. Als ein Beispiellösung mit Unstetigkeit sei

$$R_1(x, t) = A H(x - ct) \quad (3.177)$$

gegeben. Dabei ist die Heaviside-Funktion

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi > 0 \\ 0 & \text{für } \xi < 0 \end{cases} \quad (3.178)$$

zur Darstellung verwendet worden. Die Heaviside-Funktion  $H(\xi)$  besitzt eine Unstetigkeit an der Stelle  $\xi = 0$ . Dort ist sie im klassischen Sinne nicht differenzierbar. Erweitert man den Funktionenraum um die sogenannten Distributionen, so kann auch die Ableitung von un stetige Funktionen abgegeben werden. Dies wurde im Abschnitt 1.6 ausführlich behandelt. Die Ableitung der Heaviside-Funktion läßt sich mit Hilfe der Dirac'schen  $\delta$ -Funktion ausdrücken. Es gilt insbesondere auch im Punkt  $\xi = 0$  die Beziehung

$$\frac{dH(\xi)}{d\xi} \equiv H'(\xi) = \delta(\xi) \quad (3.179)$$

Mit dieser Erweiterung kann nun die Lösung (3.177) überprüft werden. Für die Zeitableitung folgt

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = H'(x - ct) \frac{\partial}{\partial t}[x - ct] = -c \delta(x - ct) \quad (3.180)$$

und für die räumliche Ableitung gilt entsprechend

$$\frac{\partial R_1}{\partial x} = H'(x - ct) \frac{\partial}{\partial x}[x - ct] = \delta(x - ct) \quad (3.181)$$

### 3.6 Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

Durch Einsetzen der beiden Ausdrücke in die Differentialgleichung (3.176) ergibt sich

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} = [-c + c] \cdot \delta(x - ct) = 0 \quad (3.182)$$

Damit ist rein formal gezeigt, daß (3.177) tatsächlich eine Lösung der betrachteten Differentialgleichung ist. Das bedeutet jedoch noch nicht, daß die formale Lösung auch physikalisch sinnvoll ist.

Es stellt sich die Frage, ist die Zulassung der erweiterten Funktionen physikalisch gerechtfertigt. Die  $\delta$ -Funktion besitzt ihre Bedeutung im einem integralen Sinn, wie es in Abschnitt 1.6 gezeigt wurde. Um die Bedeutung der Lösung zu veranschaulichen, wird die Differentialgleichung (3.176) in Raum und Zeit integriert. Der Integrationsbereich ist ein Rechteck in der  $x, t$ -Ebene. Zuerst wird in  $x$ -Richtung in dem Intervall  $[x_0, x_0 + l]$  integriert. Es ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x_0+l} \left[ \frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} \right] dx = \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{\partial R_1}{\partial t} dx + c [R_1(x_0 + l, t) - R_1(x_0, t)] = 0 \quad (3.183)$$

Als nächstes wird die Integration in  $t$ -Richtung im Intervall  $[t_0, t_0 + \tau]$  durchgeführt. Man erhält nach Vertauschen der Integrationen im ersten Term auf der linken Seite

$$\int_{x_0}^{x_0+l} [R_1(x, t_0 + \tau) - R_1(x, t_0)] dx + c \int_{t_0}^{t_0+\tau} [R_1(x_0 + l, t) - R_1(x_0, t)] dt = 0 \quad (3.184)$$

Jede klassische (differenzierbare) Lösung der Differentialgleichung (3.176) erfüllt automatisch die Integralgleichung (3.184) unabhängig von der Wahl der Integrationsgrenzen  $x_0, t_0, l$  und  $\tau$ . Es läßt sich leicht zeigen, daß dies auch für die Lösung (3.177) zutrifft. Dabei sind erweiterte Funktionen zur Überprüfung nicht mehr notwendig, weil in der Integralgleichung keine Ableitungen auftreten. Das heißt, die Lösung (3.177) erfüllt die Integralgleichung im klassischen Sinn. Der exakte Beweis hierfür wird dem Leser zur Übung überlassen. Im folgenden soll dies stattdessen anschaulich verdeutlicht werden.

In Abbildung 3.16 ist der Verlauf von  $R_1(x, t)$  nach (3.177) zu zwei verschiedenen Zeiten dargestellt. Die durchgezogene Linie ist die Verteilung zur Zeit  $t_0$  und die gestrichelte Linie zur Zeit  $t_0 + \tau$ . Die Integrationsgrenzen sind so gewählt, daß sich die Unstetigkeitsstelle in beiden Fällen im Intervall  $[x_0, x_0 + l]$  befindet. Die Integrale in (3.184) werden in Teilintegrale aufgespalten. In dem speziellen Beispiel ergibt sich für die Raumintegrale

$$\int_{x_0}^{x_0+l} R_1(x, t_0) dx = [(x_0 + l) - ct_0] A \equiv S \quad (3.185)$$

### 3 Ebene Wellen

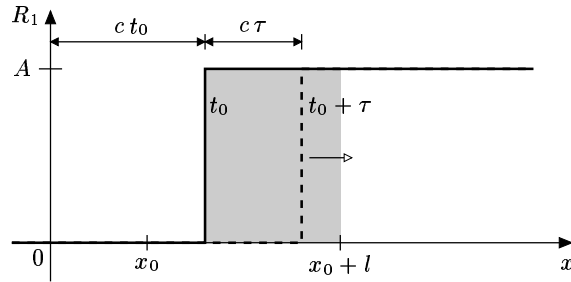


Abbildung 3.16: Ausbreitung der un stetigen Verteilung

und

$$\int_{x_0}^{x_0+l} R_1(x, t_0 + \tau) dx = S - c \tau A \quad (3.186)$$

Dabei wurde als Abkürzung die Größe  $S$  eingeführt. Sie entspricht dem Flächeninhalt des schattierten Bereichs in Abbildung 3.16. Für die Zeitintegrale erhält man

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} R_1(x_0, t) dx = 0 \quad (3.187)$$

und

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} R_1(x_0 + l, t) dx = A \tau \quad (3.188)$$

Setzt man (3.185) bis (3.188) in die Integralgleichung (3.184) ein, ergibt sich

$$(S - c \tau A) - S + c[A \tau - 0] = 0 \quad (3.189)$$

Die linke Seite ist tatsächlich gleich Null. Die betrachtete Lösung erfüllt damit die Integralgleichung. Dabei spielt es keine Rolle, daß die Lösung eine Un stetigkeit besitzt, die sich sogar in dem betrachteten Intervall befindet.

Es können Lösungen der Integralgleichung (3.184) gefunden werden, die jedoch wegen Un stetigkeiten – wie zum Beispiel (3.177) – keine klassische Lösung der Differentialgleichung darstellen. Diese Lösungen werden als “schwache Lösungen” der Differentialgleichung bezeichnet. Es muß nicht unbedingt die Integralgleichung herangezogen werden, um eine schwache Lösungen zu überprüfen. Auch mit dem Formalismus der

### 3.6 Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

$\delta$ -Funktion kann anhand der Differentialgleichung die Richtigkeit der Lösung – wie in (3.182) – gezeigt werden.

Es bleibt die Frage, ob die schwachen Lösungen physikalisch sinnvoll sind. Die Wellengleichung für den Druck wurde aus der Kontinuitätsgleichung und der Euler-Gleichung abgeleitet. Die beiden Gleichungen wurden linearisiert und das resultierende Gleichungssystem entspricht den Gleichungen (3.166) und (3.167). Die Kontinuitätsgleichung und die Euler-Gleichung leiten sich aus einer Bilanzüberlegung an einem Kontrollvolumen ab. Das heißt, sie sind zuerst in einer integralen Form vorhanden. Entsprechend ist an dieser Stelle die Differenzierbarkeit der Druck- und Schnelleverteilungen nicht vorausgesetzt. Weil es für viele Berechnungen zweckmäßiger ist mit Differentialgleichungen zu arbeiten, werden die partielle Differentialgleichungen aus den integralen Beziehungen abgeleitet. Dabei gehen jedoch die schwachen Lösungen sozusagen verloren. Sie sind nicht mehr zulässig. Dies ist jedoch nur eine Folge des rein formalen Schritts beim Übergang auf eine Differentialgleichung. Die schwachen Lösungen des Differentialgleichungssystems (3.166) und (3.167) stellen damit Lösungen einer physikalisch sinnvollen Integralgleichung dar. Genauso gehen bei Übergang auf die Wellengleichung noch weitere Lösungen verloren. Denn die Druckverteilung muß zweimal differenzierbar sein, um eine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung zu sein. Damit sind auch nicht alle Lösungen des Differentialgleichungssystems erster Ordnung automatisch Lösungen der Wellengleichung. In jedem Fall können Lösungen, die nicht überall zweimal differenzierbar sind, sinnvolle physikalische Lösungen der Wellengleichung darstellen. Entsprechend werden die schwachen Lösungen des Differentialgleichungssystems (3.166) und (3.167) im weiteren als Lösungen der Wellengleichung zugelassen.