

**Vorläufiges Skript zur Vorlesung  
Strömungsakustik I**

Klaus Ehrenfried  
Technische Universität Berlin

# 1 Einleitung

## 1.1 Beispiele aus dem Bereich der Strömungsakustik

Um einen Eindruck zu geben wie umfassend das gesamte Gebiet der Strömungsakustik ist, werden hier einige Beispiele für strömungsakustische Phänomene aufgelistet. Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

- Fluglärm (Triebwerke, Überschallknall)
- Straßelärm (Schall durch Umströmung der Fahrzeuge, Auspuffgeräusche)
- Eisenbahn (Umströmungslärm, Druckwellen im Tunnel)
- Musikinstrumente (Blasinstrumente, Orgelpfeifen)
- Blutkreislauf (Pulsschlag)
- Gebläselärm (Staubsauger, Fön)
- Schall durch Umströmung von Gebäuden (“Der Wind pfeift”)
- Durch Schall erzeugte Strömungen (z.B.: Wirbelkanone)
- Rijke-Rohr (thermo-akustische Instabilität)

Die Akustik ist die Wissenschaft des Schalls einschließlich seiner Erzeugung, Ausbreitung und Auswirkung. Die Strömungsakustik beschäftigt sich dabei besonders mit den ersten beiden Punkten. Das Fachgebiet könnte man entsprechend in zwei Bereiche unterteilen:

- Schallerzeugung durch Strömung
- Schallausbreitung in strömenden Medien

Im Prinzip kann die gesamte Akustik in Fluiden als Spezialfall der Strömungsmechanik beziehungsweise Gasdynamik angesehen werden. Eine strikte Aufteilung der Akustik in reine Strömungsakustik und die restlichen Gebiete ist wenig sinnvoll. In der Vorlesung werden auch einige allgemeine Grundlagen der Akustik vorgestellt, bevor die wichtigsten Gleichungen aus dem Spezialgebiet der Strömungsakustik behandelt werden. Die Betrachtung der Akustik erfolgt jedoch aus der Sicht der Strömungsmechanik.

## 1 Einleitung

Die Abbildung 1.1 soll einen Eindruck über den gesamten Umfang der Akustik und ihre Verknüpfung mit den angrenzenden Disziplinen geben. Wie die obige Liste zeigt, können strömungsakustische Phänomene in allen Bereichen gefunden werden.

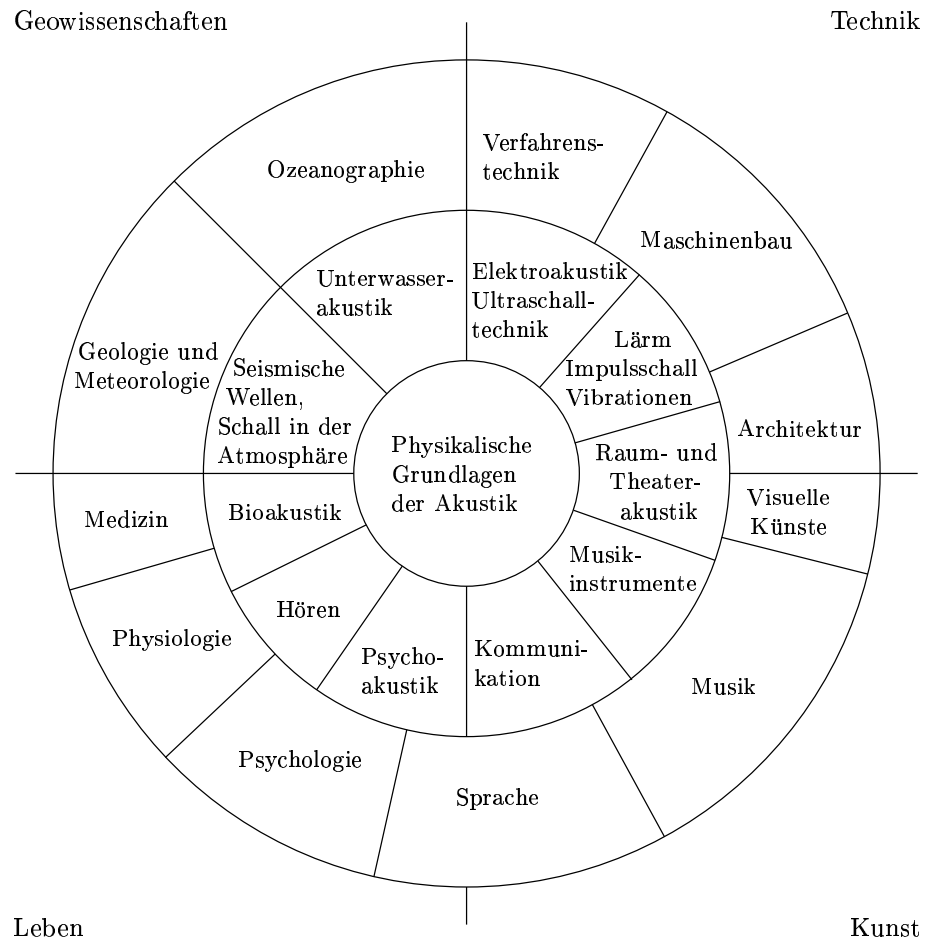


Abbildung 1.1: Grafik zur Illustration des Umfangs und der Verzweigung der Akustik  
[Frei übertragen aus: R.B. Lindsay, J. Acoust. Soc. Am., Nummer 36,  
Seite 2242 (1964)]

## 1.2 Allgemeine Eigenschaften von Schall

### Historische Entwicklung der Akustik

Bereits in der Antike wurde der Wellencharakter des Schalls vermutet. Zum Beispiel wurde von dem griechischen Philosoph Crysippus (ca. 240 v.C.) und dem römischen Architekten und Ingenieur Vetruius (ca. 25 v.C.) die Analogie zwischen den Wellen auf einer Wasseroberfläche und der Schallausbreitung erkannt. So wurde eine Welle als "oszillatorische Störung, die sich von der Quelle weg bewegt ohne Material über große Entfernungen zu transportieren" beschrieben. Erstaunlicherweise war zum Bau der antiken Theater mit hervorragenden akustischen Eigenschaften weder die Kenntnis der Wellengleichung noch das Wissen um Schalldruck und dergleichen notwendig.

Die Entwicklung der modernen Akustik begann am Anfang des 17. Jahrhunderts. Es konnte experimentell nachgewiesen werden, daß ein vibrierender Körper, der einen Ton abstrahlt, die umliegende Luft zu einer oszillatorischen Bewegung der gleichen Frequenz anregt. Besonders hervorzuheben sind die Arbeiten des französischen Naturforschers Marin Mersenne (1588 - 1648) und von Galileo Galilei (1564 - 1642). So beschrieb Mersenne in seiner Arbeit "Harmonie universelle" (1636) die erste absolute Bestimmung der Frequenz eines hörbaren Tones (84 Hz). Durch das klassische Experiment von Robert Boyle (1660) mit einer tickenden Uhr in einem teilweise evakuierten Glasbehälter konnte bewiesen werden, daß die Luft entweder zur Ausbreitung oder zur Erzeugung des Schalls notwendig ist.

Die mathematische Theorie der Schallausbreitung begann mit Isaac Newtons (1642 - 1727) Arbeit "Principia" (1686). Allerdings ist von Newtons Forschungen auf dem Gebiet der Akustik heute vor allem seine falsche Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Luft bekannt. Newton machte den Fehler, die Zustandsänderung in Schallwellen als isotherm anstatt isentrop (adiabat) anzunehmen. Er erhielt so eine Schallgeschwindigkeit von 290 m/s, die deutlich von dem gemessenen Wert abwich. Erst Laplace berechnete 1816 die Schallgeschwindigkeit unter der Annahme isentroper Zustandsänderung und erhielt eine Lösung, die mit den Experimenten in Einklang stand. Die theoretische Beschreibung der Wellenausbreitung wurde später von Euler (1707 - 1783), Lagrange (1736 - 1813) und d'Alembert (1717 - 1783) weiterentwickelt.

### Definition von Schall

Folgende Punkte sind charakteristisch für Schall:

1. Schall breitet sich als Welle aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt zum Beispiel in Luft unter Normalbedingungen 340 m/s und in Wasser 1450 m/s.
2. Schallwellen bewegen das Fluid (Medium) um einen mittleren Zustand.
3. Schallwellen können Informationen transportieren.
4. Schallwellen transportieren Energie.
5. Schwankungen der Zustandsgrößen (z.B. Druck, Dichte,..) durch Schall sind fast immer relativ klein.

## 1 Einleitung

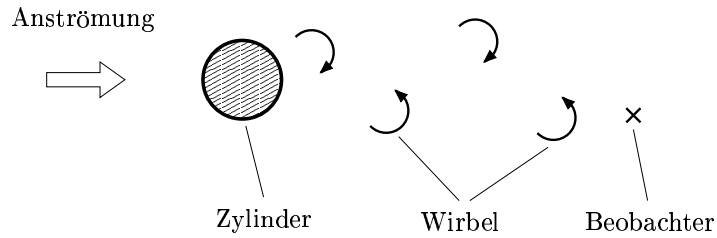


Abbildung 1.2: Beobachter im Strömungsfeld hinter einem Kreiszyylinder

Mit den genannten Punkten ist eine Definition von Schall möglich. In der Praxis kann jedoch die Unterscheidung zwischen Schall und Strömung relativ schwierig werden. Dies wird am Beispiel eines umströmten Zylinders, hinter dem sich eine Wirbelstraße ausbildet verdeutlicht. Bei diesem Vorgang wird auch Schall erzeugt, der sich in alle Richtungen ausbreitet. Der Schall ist als Druckschwankung mit einem Mikrofon nachweisbar. Jedoch treten in dem Strömungsfeld auch Druckschwankungen auf, die nichts mit Schall zu tun haben. Zum Beispiel registriert ein Beobachter, der sich in der Bahn der Wirbel befindet (siehe Abbildung 1.2), eine Druckabsenkung, wenn ein Wirbel vorbeischwimmt. Diese lokal gemessene Druckschwankung kann ohne zusätzliche Information über das restliche Strömungsfeld nicht von Schall unterschieden werden.

Die Wirbel in diesem Beispiel erfüllen übrigens einige der für Schall charakteristischen Eigenschaften. Sie bewegen das Medium nur um einen mittleren Zustand und transportieren mit Sicherheit auch Energie. Die Wirbel breiten sich jedoch nicht mit Schallgeschwindigkeit aus, sondern bewegen sich im Strömungsfeld durch die Hauptströmung und Induktion der anderen Wirbel. Dadurch erfüllen sie nicht den ersten Punkt in der obigen Liste.

### 1.3 Quantitative Beschreibung von Schall

Die "wichtigste" Größe bei der Beschreibung von Schall ist der Druck. Dies hat verschiedene Gründe: Der Druck ist relativ einfach meßbar. Er ist eine anschauliche Größe, und vom Menschen physiologisch erfaßbar also spürbar.

Üblicherweise werden alle Größen in einen Gleichanteil und einen Schwankungsanteil zerlegt. Betrachtet man zunächst den Fall eines ruhenden Mediums in dem sich Störungen durch Schall ausbreiten, ergibt sich für den Druck  $p$ , die Dichte  $\rho$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  (hier auch als Schnelle bezeichnet) die Zerlegung:

$$\begin{aligned} \text{Druck:} \quad p(\vec{x}, t) &= p_0 + p'(\vec{x}, t) \\ \text{Dichte:} \quad \rho(\vec{x}, t) &= \rho_0 + \rho'(\vec{x}, t) \\ \text{Schnelle:} \quad \vec{v}(\vec{x}, t) &= \vec{v}'(\vec{x}, t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

### 1.3 Quantitative Beschreibung von Schall

Die Größen  $p_0$  und  $\rho_0$  entsprechen dem Druck und der Dichte in einem Ausgangszustand ohne Schall. Sie sind nicht von dem Ort  $\vec{x}$  und der Zeit  $t$  abhängig. Die Schwankungsanteile sind mit einem Strich ( $\cdot$ )' markiert. Da sich das Medium in Ruhe befindet, verschwindet der Gleichanteil der Schnelle:  $\vec{v}_0 = 0$ .

Die Amplituden der im Alltag auftretenden Druckschwankungen erstrecken sich über viele Größenordnungen. So liegen zwischen der Hörschwelle und der Schmerzschwelle beim Menschen etwa sechs Größenordnungen der Amplitude des Schalldrucks. Jedoch sind die Schwankungen selbst bei der Schmerzschwelle immer noch sehr klein gegenüber den Gleichanteilen. In dem gesamten Bereich gilt

$$|p'/p_0| \ll 1; \quad |\rho'/\rho_0| \ll 1. \quad (1.2)$$

Für die praktischen Messungen wurde eine logarithmische Maßeinheit, der Schalldruckpegel  $L_p$ , eingeführt:

$$L_p = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{p_{\text{rms}}}{2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}} \right) \quad (1.3)$$

Dabei ist der Effektiv- oder auch RMS-Wert der Druckschwankung mit

$$p_{\text{rms}} = \sqrt{\langle p'(t)^2 \rangle} \quad (1.4)$$

definiert. RMS ist die englische Abkürzung für die Berechnungsvorschrift: R-root (Wurzel), M-mean (Durchschnitt bzw. Mittel), S-square (Quadrat). Die zeitliche Mittelung wird mit eckigen Klammern  $\langle \cdot \rangle$  symbolisiert. Sie ist für eine beliebige Funktion  $y(t)$  durch

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (1.5)$$

gegeben. Dabei ist  $T$  eine Integrationszeit, die hinreichend groß gewählt werden muß. Wenn das Signal relativ niedrige Frequenzen enthält, muß entsprechend länger integriert werden, damit auch über mehrere Schwankungen gemittelt wird. Der in Gleichung (1.3) auftretende Wert von  $2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$  ist ein international festgelegter Referenzdruck, der etwa der Hörschwelle des Menschen bei 1 kHz entspricht.

In der folgenden Tabelle sind die Schalldruckpegel für verschiedene RMS-Werte aufgelistet. Der letzte Wert "Atmosphäre" ist dabei rein theoretisch, da bei  $p_0 = 1 \text{ bar}$  ein RMS-Wert von einem bar unrealistisch ist (mit einer Sinusschwingung ohne negativen Druck nicht zu erreichen).

|                 | $L_p$  | $p_{\text{rms}}$                |
|-----------------|--------|---------------------------------|
| Hörschwelle     | 0 dB   | $2 \cdot 10^{-10} \text{ bar}$  |
| Schmerzschwelle | 120 dB | $0.2 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$ |
| Atmosphäre      | 194 dB | 1 bar                           |

## 1 Einleitung

In der folgenden Tabelle sind für eine ebene Welle in Luft die maximal auftretenden Geschwindigkeiten und Auslenkungen  $\varepsilon$  der Luftteilchen aufgelistet. Die Auslenkungen wurden für eine Frequenz von 1 kHz berechnet.

| $L_p$  | $ \vec{v}' _{\max}$                              | $ \varepsilon _{\max}$        |
|--------|--|-------------------------------|
| 120 dB | $0.069 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$              | $1.1 \cdot 10^{-5} \text{m}$  |
| 0 dB   | $6.93 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ | $1.1 \cdot 10^{-11} \text{m}$ |

Bemerkenswert ist, daß bei der Hörschwelle die Auslenkung der Luftteilchen in der Größenordnung von 1/1000 der mittleren freien Weglänge der Moleküle ist (für Luft unter Normalbedingungen: 1 bar, 20 Grad Celsius).

Das menschliche Ohr reagiert frequenzabhängig auf Schall. Zur Beschreibung der empfundenen Stärke des Schalls wurde die Maßeinheit Phon eingeführt:

*Die Lautstärke eines Schalls in Phon entspricht dem Schalldruckpegel des gleichlaut empfundenen 1 kHz-Tones.*

Das Phon ist damit ein Wert, der durch einen subjektiven Vergleich zweier Schalldrücke bestimmt wird (zweiohriges Hören!). Für die Lautstärkebestimmung mit Meßgeräten (also ohne Testhörer) wurden sogenannte Bewertungskurven eingeführt. Durch Filter wird die Signalstärke in verschiedenen Frequenzbereichen unterschiedlich verstärkt bzw. abgeschwächt, um so den Frequenzgang des menschlichen Ohrs zu berücksichtigen.

## 1.4 Darstellung mit komplexen Zahlen

In der Praxis sind häufig sinusförmige Schwingungen von Interesse, die in folgenden auch als "harmonisch" bezeichnet werden. Die harmonische Druckschwankung an einer Stelle kann mit

$$p'(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.6)$$

dargestellt werden. Dabei ist  $B$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\varphi$  eine Phasenverschiebung. Jeder sinusförmige Zeitverlauf kann durch die drei Parameter erreicht werden. Für die Kreisfrequenz gilt dabei  $\omega = 2\pi f$ , wobei  $f$  die Frequenz in Hz ist.

Im folgenden soll am Beispiel eines schwingenden Kolbens die Vorteile einer komplexen Formulierung deutlich gemacht werden. Die Situation ist in Abbildung 1.3 dargestellt. Ein Kolben bewegt sich in einem Rohr sinusförmig um eine Ruhelage. Mit  $x_K$  wird die Position der Kolbenvorderkante bezeichnet. Es gilt

$$x_K(t) = x_0 + s(t), \quad (1.7)$$

wobei mit

$$s(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.8)$$

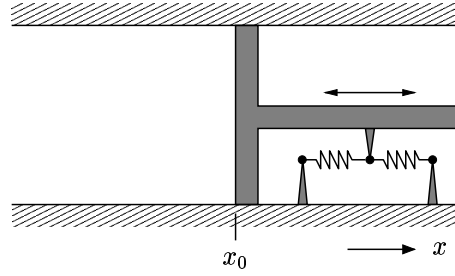


Abbildung 1.3: Schwingender Kolben im Rohr

die Auslenkung aus der Ruhelage gegeben ist. Es folgt für die Geschwindigkeit  $u_K$  des Kolbens

$$u_K(t) = \frac{ds}{dt} = -\omega B \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.9)$$

und die Beschleunigung ist mit

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 B \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.10)$$

gegeben. Der Kolben sei federnd befestigt. Eine Auslenkung erzeugt eine Rückstellkraft. Die Reibung im Rohr bewirkt eine Kraft entgegen der Bewegungsrichtung. Für die gesamte mechanische Kraft, die sich durch die Bewegung des Kolbens ergibt, erhält man

$$K_{\text{mech}} = -sD - \frac{ds}{dt}F - \frac{d^2s}{dt^2}M \quad (1.11)$$

Dabei ist  $D$  die Federkonstante,  $F$  der Reibungskoeffizient und  $M$  die Masse des Kolbens. Setzt man Gleichungen (1.8) bis (1.10) in (1.11) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} K_{\text{mech}} = B [ & -D \cos(\omega t + \varphi) \\ & + \omega F \sin(\omega t + \varphi) \\ & + \omega^2 M \cos(\omega t + \varphi) ] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Möchte man zum Beispiel das Maximum der mechanischen Kraft  $|K_{\text{mech}}|_{\text{max}}$  bei einer gegebenen maximalen Auslenkung  $B$  bestimmen, zeigt sich, daß Gleichung (1.12) relativ unhandlich ist. Die Berechnung wird deutlich einfacher, wenn man zu einer komplexen Formulierung übergeht. Anstatt Gleichung (1.8) wird die momentane Auslenkung nun mit

$$s(t) = \Re\{ \hat{s} \cdot e^{i\omega t} \} \quad (1.13)$$



## 1 Einleitung

formuliert. Dabei ist  $\hat{s}$  eine komplexe Amplitude. In ihr "steckt" die Information der reellen Amplitude  $B$  und die Phaseninformation  $\varphi$ . Damit (1.8) und (1.13) gleichwertig sind, muß

$$B = |\hat{s}| \quad \text{und} \quad \frac{\Im(\hat{s})}{\Re(\hat{s})} = \tan \varphi \quad (1.14)$$

gelten.

Anschaulich kann man sich die komplexen Zahlen  $\hat{s}$  und  $e^{i\omega t}$  als Vektoren in der komplexen Ebene vorstellen. Die geometrische Situation ist in der Abbildung 1.4 dargestellt. Der Winkel zwischen  $\hat{s}$  und der reellen Achse ist gerade  $\varphi$ . Der Betrag von

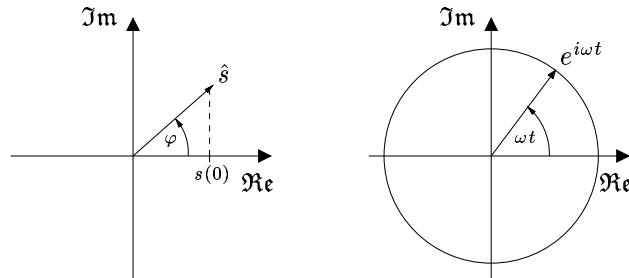


Abbildung 1.4: Zur Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene

$e^{i\omega t}$  ist immer gleich eins. Der Winkel zwischen  $e^{i\omega t}$  und der reellen Achse ist  $\omega t$ . Das Produkt  $\hat{s} \cdot e^{i\omega t}$  ist wieder eine komplexe Zahl mit dem gleichen Betrag wie  $\hat{s}$ . Der Winkel zwischen  $\hat{s} \cdot e^{i\omega t}$  und der reellen Achse ist die Summe  $(\omega t + \varphi)$ . Das Produkt stellt praktisch einen Zeiger der Länge  $|\hat{s}|$  dar, der sich mit der Kreisfrequenz  $\omega$  um den Ursprung dreht. Die Projektion dieses Zeigers auf die reelle Achse ergibt den Realteil und damit  $s(t)$ .

Mit der komplexen Formulierung erhält man statt Gleichung (1.12) für die mechanische Kraft den Ausdruck:

$$K_{\text{mech}} = \Re \left\{ \hat{s} [-D - i\omega F + \omega^2 M] e^{i\omega t} \right\} \quad (1.15)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer wird zweckmäßigerweise mit

$$Z = -D - i\omega F + \omega^2 M \quad (1.16)$$

abgekürzt. Die komplexe Größe  $Z$  beinhaltet die gesamte Information über die mechanischen Eigenschaften des Kolbens. Für feste Werte  $D$ ,  $F$  und  $M$  hängt sie nur von der Frequenz  $\omega$  ab. Damit ist die Berechnung der mechanischen Kraft  $K_{\text{mech}}$  bei gegebener Auslenkung  $\hat{s}$  durch einfache Multiplikation von komplexen Zahlen möglich:

$$K_{\text{mech}} = \Re \left\{ \hat{s} Z e^{i\omega t} \right\} \quad (1.17)$$

## 1.4 Darstellung mit komplexen Zahlen

Oft ist nur die Amplitude der Kraft und nicht der momentane Wert von Interesse. Die maximale Kraft ist durch den Betrag der komplexen Zahl in der geschweiften Klammer gegeben. Es gilt

$$|K_{\text{mech}}|_{\text{max}} = |\hat{s}| |Z| \quad (1.18)$$

So kann für eine gegebene maximale Kraft die maximale Auslenkung mit

$$B = |\hat{s}| = \frac{|K_{\text{mech}}|_{\text{max}}}{|Z|} \quad (1.19)$$

berechnen. Dies wäre mit einer rein reellen Darstellung nicht so elegant möglich.

Wirkt eine äußere Kraft auf den Kolben, so erzeugt diese eine Bewegung. Die Summe aller angreifenden Kräfte muß gleich Null sein. Neben der mechanischen Kraft auf den Kolben soll nun auch noch eine Druckkraft wirken. Zur Vereinfachung des Beispiels werden folgende Punkte vorausgesetzt:

1. Rechts vom Kolben herrscht Vakuum. Der Druck ist dort gleich Null.
2. Auf der linken Seite vom Kolben ist der Druck räumlich konstant. Er wird mit  $p_{\text{k}}$  bezeichnet. Es wird die Zerlegung

$$p_{\text{k}}(t) = p_0 + p'_{\text{k}}(t) \quad (1.20)$$

eingeführt.

3. Die Ruheposition  $x_0$  des Kolbens stellt sich bei  $p_{\text{k}} = p_0$  ein. Die Feder ist entsprechend vorgespannt, um die Kraft durch den Ruhedruck auszugleichen. Die Größe  $s$  bezeichnet weiterhin die Auslenkung aus der Ruhelage.

Betrachtet wird eine harmonische Druckstörung am Kolben der Form

$$p'_{\text{k}}(t) = \Re\{ \hat{p}_{\text{k}} \cdot e^{i\omega t} \} \quad (1.21)$$

Die Größe  $\hat{p}_{\text{k}}$  ist analog zu  $\hat{s}$  eine komplexe Druckamplitude. Der Druck bewirkt die Kraft

$$K_{\text{druck}}(t) = A p_{\text{k}}(t) \quad (1.22)$$

Dabei ist  $A$  die Querschnittsfläche des Rohres. Die Druckkraft kann in einen Gleichanteil und die Schwankung mit

$$K_{\text{druck}}(t) = K_{\text{druck},0} + K'_{\text{druck}}(t) \quad (1.23)$$

zerlegt werden. Für den Gleichanteil gilt

$$K_{\text{druck},0} = A p_0 \quad (1.24)$$

Die Schwankung ist

$$K'_{\text{druck}}(t) = A p'_{\text{k}}(t) = A \Re\{ \hat{p}_{\text{k}} \cdot e^{i\omega t} \} \quad (1.25)$$

## 1 Einleitung

Entsprechend wird die mechanische Kraft in

$$K_{\text{mech}}(t) = K_{\text{mech},0} + K'_{\text{mech}}(t) \quad (1.26)$$

aufgeteilt. Der Gleichanteil  $K_{\text{mech},0}$  entspricht der Rückstellkraft durch die Vorspannung der Feder. Die rechte Seite der Gleichung (1.17) ist nun nicht mehr gleich der gesamten mechanischen Kraft sondern entspricht dem Schwankungsanteil. Statt (1.17) gilt jetzt

$$K'_{\text{mech}}(t) = \Re\left\{\hat{s}Z e^{i\omega t}\right\} \quad (1.27)$$

Damit Kräftegleichgewicht gilt muß

$$K_{\text{mech}}(t) + K_{\text{druck}}(t) = 0 \quad (1.28)$$

erfüllt sein. Bereits die Gleichanteile heben sich auf:

$$K_{\text{mech},0} + K_{\text{druck},0} = 0 \quad (1.29)$$

Damit folgt für die Schwankungen ebenfalls

$$K'_{\text{mech}}(t) + K'_{\text{druck}}(t) = 0 \quad (1.30)$$

Einsetzen von (1.25) und (1.27) liefert aus der letzten Gleichung

$$\Re\{\hat{s}Z e^{i\omega t}\} = -A \Re\{\hat{p}_{\text{K}} e^{i\omega t}\} \quad (1.31)$$

Diese Bedingung stellt eine Gleichung der Form

$$\Re\{z_1 \cdot e^{i\omega t}\} = \Re\{z_2 \cdot e^{i\omega t}\} \quad (1.32)$$

dar. Die Größen  $z_1$  und  $z_2$  sind die komplexen Amplituden der beiden Kräfte. Gleichung (1.32) ist für alle Zeiten  $t$  nur erfüllt, wenn  $z_1 = z_2$  gilt. Damit folgt aus (1.31) die Beziehung

$$\hat{s}Z = -A \hat{p}_{\text{K}} \quad (1.33)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist es sehr einfach möglich die komplexen Amplituden der Auslenkung  $\hat{s}$  und der Druckstörung  $\hat{p}_{\text{K}}$  ineinander umzurechnen. Dazu müssen natürlich die mechanischen Eigenschaften des Kolbens ( $D, F$  und  $M$ ) und die Frequenz  $\omega$  bekannt sein, um die Größe  $Z$  zu berechnen.

Häufig sind nur die Amplituden und nicht die Phasen der Größen von Interesse. Die Druckamplitude entspricht dem Betrag  $|\hat{p}_{\text{K}}|$ . Entsprechend gibt  $|\hat{s}|$  die maximale Auslenkung an. Für eine vorgegebene Druckamplitude berechnet sich die maximale Auslenkung des Kolbens durch

$$|\hat{s}| = \frac{A |\hat{p}_{\text{K}}|}{|Z|} \quad (1.34)$$

## 1.4 Darstellung mit komplexen Zahlen

Diese Berechnungen sind im Komplexen deutlich eleganter als bei rein reeller Darstellung.

Die komplexe Darstellung ist mit  $e^{i\omega t}$  und auch mit  $e^{-i\omega t}$  möglich. Wird von der einen in die andere Formulierung übergegangen, müssen die komplexen Amplituden durch ihre konjugiert komplexen Werte ersetzt werden. Denn es gilt

$$\Re\{z \cdot e^{i\omega t}\} = \Re\{z^* \cdot e^{-i\omega t}\} \quad (1.35)$$

Dabei ist mit  $z^*$  der konjugiert komplexe Wert von  $z$  bezeichnet. Die beiden Schreibweisen sind äquivalent, jedoch sollten sie nicht vermischt werden.

Zuletzt soll noch auf eine übliche Vereinfachung der komplexen Schreibweise hingewiesen werden. In der Literatur findet man oft Gleichungen der Form

$$p'_k(t) = \hat{p}_k \cdot e^{i\omega t} \quad (1.36)$$

Im Vergleich zu Gleichung (1.21) fehlt die Realteilbildung auf der rechten Seite. Auf der rechten Seite steht damit ein komplexer Ausdruck, der mit einer physikalischen Größe auf der linken Seite gleichgesetzt wird. Die Druckschwankung  $p'_k(t)$  ist selbstverständlich reell. Strenggenommen ist die angegebene Gleichung nicht korrekt. Diese Schreibweise wird dennoch häufig verwendet. In diesem Fall gilt die Konvention, daß bei Gleichsetzung einer reellen Größe mit einem komplexen Ausdruck von letzteren der Realteil zu bilden ist. Die Realteilbildung steckt sozusagen implizit in der Gleichung.

Die reduzierte Schreibweise führt normalerweise zu keinen Verwechslungen. Lediglich bei der Produktbildung von reellen Größen ist Vorsicht geboten. Soll zum Beispiel der Ausdruck  $p'_k(t)^2$  berechnet werden, so muß

$$p'_k(t)^2 = (\Re\{\hat{p}_k \cdot e^{i\omega t}\})^2 \quad (1.37)$$

geschrieben werden. Die Realteilbildung kann hier nicht weggelassen werden, denn das Quadrat des Realteils ist nicht unbedingt auch der Realteil des Quadrats einer Größe.

## 1.5 Mathematisches Hilfsmittel: $\delta$ -Funktion

### Kontinuierliche Dichteverteilung und Punktmassen

Zur Beschreibung vieler Probleme in der Physik bietet es sich an, die sogenannte  $\delta$ -Funktion zu verwenden. Als einfache Beispiele sind die Punktmasse in der Mechanik und die Punktquelle in der Akustik zu nennen. Auch bei vielen Herleitungen und Beweisen kann die  $\delta$ -Funktion ein nützliches Hilfsmittel sein. Sie wurde von dem Physiker P.A.M. Dirac aus theoretisch-physikalischer Zweckmäßigkeit eingeführt. Erst danach wurde von L. Schwarz eine umfassende Theorie entwickelt, und die Anwendung der  $\delta$ -Funktion auf exaktes mathematisches Fundament gestellt.

Eine ausführliche Beschreibung der mathematischen Grundlagen der Materie würde den Rahmen dieser Übersicht sprengen. Deshalb soll hier eine anschauliche Einführung in die wesentlichen Eigenschaften der  $\delta$ -Funktion gegeben werden, die den praktischen Umgang mit der Funktion erleichtern soll.

Eine kontinuierliche Massenverteilung wird durch die Dichteverteilung  $\rho(\vec{x})$  beschrieben. Die Gesamtmasse  $M$  eines Körpers kann durch Integration mit

$$M = \int_V \rho(\vec{x}) \, dV \quad (1.38)$$

aus der Dichteverteilung berechnet werden. Dabei ist  $V$  ein geeignet gewähltes Volumen. Am einfachsten wählt man  $V$  gleich dem Körpervolumen. Jedoch kann auch  $V$  größer gewählt werden, wenn außerhalb des Körper  $\rho(\vec{x}) = 0$  gesetzt wird.

Eine gegebene Massenverteilung besitzt in einem Schwerefeld potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$ . Ist das Schwerepotential  $\phi(\vec{x})$  gegeben, kann diese mit

$$E_{\text{pot}} = \int_V \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \, dV \quad (1.39)$$

aus der Dichteverteilung berechnet werden. In der Praxis wird häufig die Masse eines Körpers als Punktmasse behandelt. Viele Berechnungen vereinfachen sich dadurch erheblich. Für die potentielle Energie einer Punktmasse  $M$  am Ort  $\vec{x}_0$  ergibt sich einfach

$$E_{\text{pot}} = M \phi(\vec{x}_0) \quad (1.40)$$

Betrachtet man einen relativ kleinen Körper in der Nähe der Erdoberfläche, so ist diese Vereinfachung gerechtfertigt. Die Erdbeschleunigung  $\vec{g}$  ergibt sich als Gradient des Schwerepotentials mit

$$\vec{g} = \text{grad } \phi \quad (1.41)$$

An der Erdoberfläche gilt näherungsweise

$$\phi(\vec{x}) = g x_3 \quad (1.42)$$

## 1.5 Mathematisches Hilfsmittel: $\delta$ -Funktion

wobei das Koordinatensystem so gewählt wurde, daß die  $x_3$ -Achse senkrecht zum Boden orientiert ist und in die Höhe zeigt. Die Größe  $g$  entspricht dem Betrag von  $\vec{g}$ . Ihr Wert ist etwa  $9.81\text{m/s}^2$ . Für die potentielle Energie folgt

$$E_{\text{pot}} = Mgh \quad (1.43)$$

wobei  $h$  die Höhe der Punktmasse ist. Dieses Ergebnis ist allerdings nicht exakt. In Wirklichkeit nimmt die Erdanziehung mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt ab. Das bedeutet,  $g$  ist nicht überall konstant. Die Abweichung, die sich dadurch ergibt, ist jedoch bei kleinen Körpern verschwindend gering. Würde man zum Beispiel die potentielle Energie der Mondmasse im Schwerfeld der Erde berechnen wollen, würde sich allerdings schon eine merkliche Abweichung ergeben. Aber zur Berechnung der Planetenbahnen um die Sonne ist das Prinzip der Punktmassen bestens geeignet.

Das Konzept der Punktmassen kann die mathematische Beschreibung deutlich vereinfachen, jedoch ist die Darstellung nicht mehr einheitlich. Für einige Anwendungen wäre es von Vorteil, wenn man Punktmassen und kontinuierliche Massenverteilungen formal miteinander verbinden könnte. Dies wird am folgenden Beispiel deutlich. Aus den Maxwell'schen Gleichungen ergibt sich für das elektrische Potential  $U(\vec{x})$  und die Ladungsdichteverteilung  $q(\vec{x})$  im stationären Fall der Zusammenhang.

$$\Delta U = -\frac{1}{\varepsilon_0}q \quad (1.44)$$

Diese Gleichung heißt Poisson-Gleichung und gilt so im luftleeren Raum. Das Symbol  $\Delta$  stellt den Laplace-Operator dar. Die Größe  $\varepsilon_0$  ist die Influenzkonstante ( $\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12}\text{C}^2 \text{J}^{-1} \text{m}^{-1}$ ).

Um diese Differentialgleichung auf eine punktförmige Ladungsverteilung anwenden zu können, muß diese durch eine Funktion  $q(\vec{x})$  beschrieben werden. Es stellt sich die Frage, ob eine solche Funktion für eine Punktladung angegeben werden kann. Die gleiche Problematik ergibt sich für den Massenpunkt. Es ist zunächst nicht klar, ob dieser durch eine Dichteverteilung  $\rho(\vec{x})$  dargestellt werden kann. Dies soll anhand der folgenden Betrachtung geklärt werden. Gegeben sei eine Punktmasse  $M$  am Ort  $\vec{x}_0$ . Es wird angenommen, daß dieser durch die Dichteverteilung  $\rho(\vec{x})$  beschrieben wird. Dazu muß  $\rho(\vec{x})$  die Gleichung (1.38) erfüllen. Damit auch die potentielle Energie immer korrekt berechnet wird, muß

$$\int_V \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \text{d}V = M \phi(\vec{x}_0) \quad (1.45)$$

für beliebige Schwerepotentiale  $\phi(\vec{x})$  gelten. Das Integrationsvolumen  $V$  ist dabei ein geeignet gewähltes Volumen, das den Massenpunkt einschließt.

Anhand eines Gegenbeispiel soll nun gezeigt werden, daß eine Funktion  $\rho(\vec{x})$ , die (1.38) und (1.45) erfüllt, nicht existiert. Dazu wird ein spezielles Schwerepotential  $\phi_\varepsilon$

## 1 Einleitung

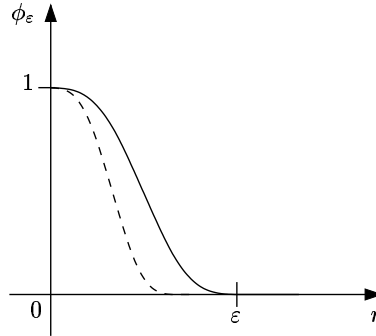


Abbildung 1.5: Radialer Verlauf des Schwerepotentials im Gegenbeispiel

konstruiert. Es soll kugelsymmetrisch um die Punktmasse sein, und damit nur vom Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0| \quad (1.46)$$

abhängen. Das Potential fällt mit  $r$  monoton von  $\phi_\varepsilon(0) = 1$  auf  $\phi_\varepsilon(\varepsilon) = 0$  ab. Der radiale Verlauf ist in Abbildung 1.5 dargestellt. Die potentielle Energie der Punktmasse ist nach (1.40) gleich  $M\phi_\varepsilon(0) = M$ . Für die linke Seite von Gleichung (1.45) gilt jedoch

$$\int_V \rho(\vec{x}) \phi_\varepsilon(r) dV < \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \max|\rho(\vec{x})| < M\phi_\varepsilon(0) \equiv M \quad (1.47)$$

Um die zweite Ungleichung zu erfüllen, muß  $\varepsilon$  nur hinreichend klein gewählt werden. Dies zeigt, daß keine Funktion  $\rho(\vec{x})$  mit einem endlichen Maximum gefunden werden kann. Die Dichte müßte im Massenpunkt unendlich groß sein. Außerhalb des Massenpunktes muß die Dichte in jedem Fall gleich Null sein. Eine solche Verteilung läßt sich aber durch eine Funktion  $\rho(\vec{x})$  nicht beschreiben. Der Wert der Funktion wäre überall gleich Null bis auf den Ort  $\vec{x}_0$ . Dort ist die Dichte unendlich und damit die Funktion gar nicht definiert. Mit einer solchen Funktion kann formal wenig berechnet werden.

Um die punktförmigen Verteilungen allgemein behandeln zu können, bietet es sich an, die Punkte durch endliche Objekte zu ersetzen. So würde man statt eines Massenpunktes eine kleine Kugel der gleichen Masse annehmen. Die entsprechende Dichteverteilung läßt sich durch eine wohldefinierte Funktion ausdrücken. Allerdings ergibt sich bei der Berechnung der potentiellen Energie nach (1.39) ein Fehler. Dieser hängt von dem jeweiligen Potential  $\phi$  und von der Größe der Kugel ab. Der Fehler nimmt mit der Radius der Kugel ab. Ist  $\phi(\vec{x})$  stetig, so verschwindet der Fehler im Grenzfall einer unendlich kleinen Kugel ganz. Es läßt sich damit die potentielle Energie der Punktmasse durch eine Integration wie in (1.39) berechnen, indem man eine endlich ausgedehnte Ersatzverteilung der Dichte annimmt, und damit einen Grenzübergang

durchführt. Dies kann auch dazu verwendet werden, Differentialgleichungen der Form (1.44) auf punktförmige Verteilungen anzuwenden. Die formalen Hilfsmittel, die dazu von Dirac entwickelt wurden, werden im folgenden vorgestellt.

## Hilfsfunktion

Die formale Betrachtung wird für den eindimensionalen Fall durchgeführt. Es wird zunächst eine Hilfsfunktion konstruiert, aus der eine sogenannte Delta-Folge abgeleitet werden kann. Diese Vorgehensweise orientiert sich nicht an den oben genannten physikalischen Beispielen der Punktmasse oder der Punktladung, sondern folgt einer eher mathematischen Überlegung. Es wird von einer stetigen und monotonen Funkti-

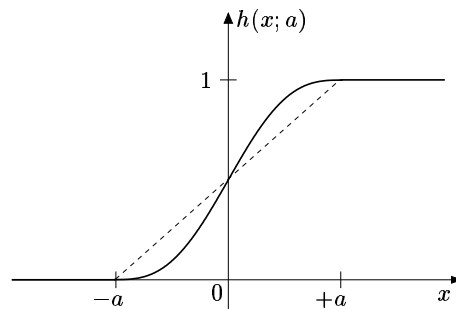


Abbildung 1.6: Verlauf der Hilfsfunktion

on  $h(x; a)$  ausgegangen, die in dem Intervall  $[-a, +a]$  von Null auf Eins ansteigt. Die Funktion hängt von  $x$  und  $a$  ab, jedoch wird ihr Verlauf immer für einen festen Wert von  $a$  diskutiert. Dies erklärt die Schreibweise " $h(x; a)$ " mit dem Semikolon. In der Abbildung 1.6 sind zwei mögliche Varianten eingezeichnet. In jedem Fall gilt

$$h(x; a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases} \quad (1.48)$$

Die durchgezogene Kurve in Abbildung 1.6 entspricht der Funktion

$$h(x; a) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\pi} + \sin\left(\pi \frac{x}{2a}\right) + \frac{x}{a} + 1 \right] \quad \text{für } -a \leq x \leq a \quad (1.49)$$

Die Funktion ist überall stetig differenzierbar. Die gestrichelte Kurve stellt eine formal recht einfache Alternative dar, die durch

$$h(x; a) = \frac{x + a}{2a} \quad \text{für } -a \leq x \leq a \quad (1.50)$$

gegeben ist. Diese Funktion ist jedoch bei  $x = -a$  und  $x = a$  nicht differenzierbar.



## 1 Einleitung

Im nächsten Schritt wird die Ableitung der Hilfsfunktion für einen festen Wert  $a$  gebildet. Das Resultat ist wieder eine Funktion von  $x$ , die als  $\delta(x; a)$  bezeichnet wird. Es gilt

$$\delta(x; a) = \frac{d}{dx} h(x; a) \quad (1.51)$$

Die Abbildung 1.7 zeigt den Verlauf der Ableitung für  $h(x; a)$  nach (1.49). Es sind die Kurven für drei verschiedene Werte  $a$  eingezeichnet. Bei  $x = 0$  ist die Steigung von  $h(x; a)$  maximal. Je kleiner  $a$  gewählt wird, desto steiler ist der Verlauf von  $h(x; a)$ . Entsprechend höhere Werte für  $\delta(x; a)$  ergeben sich.

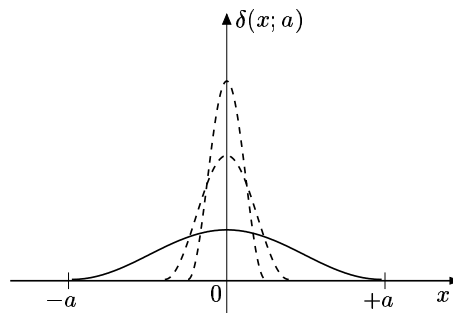


Abbildung 1.7: Beispiel mit stetigem Verlauf

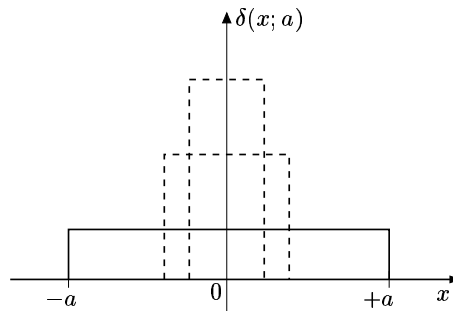


Abbildung 1.8: Beispiel mit Kastenfunktion

In Abbildung 1.8 sind die entsprechenden Kurven für  $h(x; a)$  nach (1.50) dargestellt. Der lineare Anstieg in Intervall  $[-a, a]$  ergibt dort eine konstante Ableitung.

## 1.5 Mathematisches Hilfsmittel: $\delta$ -Funktion

Dem entsprechend ergibt sich ein kastenförmiger Verlauf von  $\delta(x; a)$ . Unabhängig von der Wahl des Parameters  $a$  muß die Bedingung

$$\int_{-a}^{+a} \delta(x; a) dx = 1 \quad (1.52)$$

erfüllt sein, da

$$\left[ h(x; a) \right]_{-a}^a = 1 \quad (1.53)$$

ist. Weil  $\delta(x; a)$  außerhalb der Intervalls  $[-a, a]$  gleich Null ist, kann die Integration in (1.52) auf den gesamten Wertebereich ausgedehnt werden. Es gilt somit auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x; a) dx = 1 \quad (1.54)$$

### Delta-Folge

Wird ein kleineres  $a$  gewählt, so wird die Kurve  $\delta(x; a)$  immer höher. Von besonderem Interesse ist dabei der Grenzfall  $a \rightarrow 0$ . Um diesen näher zu untersuchen, wird eine sogenannte Delta-Folge eingeführt. Dies ist eine Folge von Funktionen, die durch

$$\delta_n(x) = \delta\left(x; \frac{1}{n}\right) \quad (1.55)$$

definiert wird. Damit gilt

$$\delta_n(x) = \frac{d}{dx} h\left(x; \frac{1}{n}\right) \quad (1.56)$$

Im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  ist die Verteilung von  $\delta_n(x)$  immer dichter um  $x = 0$  konzentriert. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta_n(x) dx = 1 \quad (1.57)$$

Dies ist offensichtlich, da für  $n > 1/\varepsilon$  das Integral in (1.54) exakt gleich Eins ist. Entsprechend gelten die beiden Bedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(x) dx = 0 \quad (1.58)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 0 \quad (1.59)$$

## 1 Einleitung

Eine Funktionenfolge, die die drei Bedingungen (1.57) bis (1.59) erfüllt, wird Delta-Folge genannt. Durch (1.51) kann aus den Hilfsfunktionen  $h(x; 1/n)$  eine Delta-Folge konstruiert werden. Es gibt natürlich noch viele andere Wege solche Folgen zu definieren.

Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die Folge  $h(x; 1/n)$  gegen die sogenannte Heavyside-Funktion, die im Allgemeinen mit  $H(x)$  dargestellt wird. Die Heavyside-Funktion ist einfach durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

definiert. Die Heavyside-Funktion besitzt an der Stelle  $x = 0$  eine Unstetigkeit. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x; \frac{1}{n}) = H(x) \quad (1.61)$$

Die Folge der stetigen Funktionen  $h(x; 1/n)$  konvergiert gegen eine unstetige Funktion.

Es stellt sich die Frage, gegen was die Folge  $\delta_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Angenommen die Folge konvergiert gegen eine Funktion, die mit  $\delta(x)$  bezeichnet wird, dann würde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \delta(x) \quad (1.62)$$

gelten. Es läßt sich leicht zeigen, daß bei  $x = 0$  die Funktion  $\delta(x)$  eine Unendlichkeitsstelle besitzen muß. Sie ist dort im strengen Sinn gar nicht definiert. Für  $x \neq 0$  muß  $\delta(x) = 0$  sein. Damit ergibt sich eine Funktion, die überall gleich Null ist bis auf eine Stelle, an der sie nicht definiert ist. Scheinbar ist  $\delta(x)$  als Funktion im eigentlichen Sinn gar nicht zu gebrauchen.

Man kann dem Grenzwert der Delta-Folge jedoch auf ganz andere Weise eine Bedeutung geben. Man versteht unter  $\delta(x)$  dann keine echte Funktion, sondern eine Verteilung beziehungsweise eine sogenannte Distribution. Dies ist analog zu der Dichteverteilung in einem Raum mit einem Massenpunkt. In dem Punkt ist die Dichte unendlich und außerhalb gleich Null. Wie weiter oben bereits diskutiert wurde, gibt es keine Funktion, die eine solche Dichteverteilung beschreibt. Das Integral der Dichteverteilung über den Raum muß in jedem Fall die Gesamtmasse ergeben. Die  $\delta$ -Funktion ist als eine solche Dichteverteilung in einem linearen, eindimensionalen Raum zu verstehen, die an der Stelle  $x = 0$  eine punktförmige Masse der Größe Eins darstellt. Das bedeutet, für das Integral über  $\delta(x)$  muß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.63)$$

gelten. Da  $\delta(x)$  keine echte Funktion darstellt, ist strenggenommen das Integral über  $\delta(x)$  gar nicht definiert. Man kann der Gleichung (1.63) aber dennoch eine Bedeutung geben, in dem man sie als Schreibweise für den Ausdruck

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1 \quad (1.64)$$

## 1.5 Mathematisches Hilfsmittel: $\delta$ -Funktion

versteht. Die Integrale über die Elemente der Delta-Folge sind wohldefiniert. Ein Integral über einen Ausdruck mit  $\delta(x)$  ist damit immer als Grenzwert des Integrals mit den Elementen der Delta-Folge zu verstehen.

Es macht sogar der Ausdruck  $\delta(x)$  außerhalb von Integralen einen Sinn. Zum Beispiel kann mit der Beziehung

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}H(x) \quad (1.65)$$

der Ableitungsbegriff erweitert werden. Eigentlich ist die Ableitung der Funktion  $H(x)$  an der Sprungstelle  $x = 0$  nicht definiert, genausowenig wie der Funktionswert von  $\delta(x)$ . Integriert man (1.65) zunächst rein formal von  $-\infty$  bis  $x$ , so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = H(x) \quad (1.66)$$

Dies ist im Sinne von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \delta_n(x') dx' = H(x) \quad (1.67)$$

wieder richtig, denn wegen (1.56) gilt

$$\int_{-\infty}^x \delta_n(x') dx' = h(x, \frac{1}{n}) \quad (1.68)$$

Das bedeutet, die Ausdrücke mit  $\delta(x)$  gelten sozusagen im integralen Sinn. Es kann sogar mit  $\delta(x)$  wie mit einer ganz gewöhnlichen Funktion gerechnet werden. Es darf nur nie außer Acht gelassen werden, daß es sich nicht um eine echte Funktion, sondern um eine Distribution handelt.

### Regeln

Eine der wichtigsten Rechenregeln mit der  $\delta$ -Funktion wird im Folgenden betrachtet. Für eine stetige und beschränkte Funktion  $B(x)$  gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\delta(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (1.69)$$

Diese bedeutet, daß für jede Delta-Folge  $\delta_n$  die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\delta_n(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (1.70)$$

## 1 Einleitung

gelten muß. Um die Aussage der Gleichung (1.69) deutlich zu machen, soll hier die Beziehung (1.70) überprüft werden. Die folgenden Überlegungen sind jedoch nicht als exakter Beweis sondern nur als Beweisskizze zu verstehen.

Multipliziert man (1.64) mit dem konstanten Faktor  $B(x_0)$  ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x_0) \delta_n(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (1.71)$$

Subtrahiert man (1.70) und (1.71) voneinander ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - B(x_0)] \delta_n(x - x_0) dx = 0 \quad (1.72)$$

Dies Aussage ist äquivalent zu Gleichung (1.70). Um sie zu beweisen, ist folgendes zu zeigen: Für alle  $\varepsilon > 0$  kann ein  $N_0$  gefunden werden, so daß für alle  $n > N_0$  die Beziehung

$$d_n \equiv \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - B(x_0)] \delta_n(x - x_0) dx \right| < \varepsilon \quad (1.73)$$

erfüllt ist.

Allgemein gilt für eine beliebige Funktionen  $a(x)$  die Ungleichung

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(x)| dx \quad (1.74)$$

Zu beachten ist, daß die Integration von  $-\infty$  nach  $+\infty$  durchgeführt wird, womit  $dx$  positiv ist. Es ergibt sich aus (1.73)

$$d_n \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \quad (1.75)$$

Da  $B(x)$  eine stetige Funktion ist, gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung um  $x_0$ , so daß innerhalb dieser Umgebung

$$|B(x) - B(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (1.76)$$

gilt. Diese Umgebung muß nur eng genug gewählt werden. Sie kann durch eine Konstante  $N_1$  definiert werden, so daß für alle

$$x \in [x_0 - b, x_0 + b] \quad \text{mit} \quad b = \frac{1}{N_1} \quad (1.77)$$

### 1.5 Mathematisches Hilfsmittel: $\delta$ -Funktion

die Bedingung (1.76) erfüllt ist. Es muß  $N_1$  entsprechend groß gewählt werden. Das Integral in (1.75) wird mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx = I_{-\infty}^{x_0-b} + I_{x_0-b}^{x_0+b} + I_{x_0+b}^{\infty} \quad (1.78)$$

in drei Teilintegrale zerlegt. Die Teilintegrale sind durch

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{x_0-b} &= \int_{-\infty}^{x_0-b} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \\ I_{x_0-b}^{x_0+b} &= \int_{x_0-b}^{x_0+b} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \\ I_{x_0+b}^{+\infty} &= \int_{x_0+b}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \end{aligned} \quad (1.79)$$

definiert. Für das zweite Teilintegral kann sofort eine Abschätzung angegeben werden. Da innerhalb der Integrationsgrenzen (1.76) gilt, folgt

$$I_{x_0-b}^{x_0+b} < \int_{x_0-b}^{x_0+b} \frac{\varepsilon}{4} \delta_n(x - x_0) dx = \frac{\varepsilon}{4} \int_{x_0-b}^{x_0+b} \delta_n(x - x_0) dx \quad \text{für } n > N_1 \quad (1.80)$$

Nach (1.57) konvergiert das Integral auf der rechten Seite gegen Eins für  $n \rightarrow \infty$ . Es gibt daher ein  $N_2$ , so daß gilt

$$\int_{x_0-b}^{x_0+b} \delta_n(x - x_0) dx < 2 \quad \text{für } n > N_2 \quad (1.81)$$

Daraus folgt für das Teilintegral

$$I_{x_0-b}^{x_0+b} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n > N_1, N_2 \quad (1.82)$$

Auch die anderen beiden Teilintegrale lassen sich abschätzen. Da die Funktion  $B(x)$  beschränkt ist, existiert das Maximum von  $|B(x) - B(x_0)|$ . Es ergibt sich

$$I_{-\infty}^{x_0-b} < |B(x) - B(x_0)|_{\max} \cdot \int_{-\infty}^{x_0-b} \delta_n(x - x_0) dx \quad (1.83)$$

## 1 Einleitung

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert nach (1.58) gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ . Es existiert daher ein  $N_3$ , so daß

$$I_{-\infty}^{x_0-b} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > N_3 \quad (1.84)$$

erfüllt ist. Analog kann ein  $N_4$  zur Abschätzung des letzten Teilintegrals gefunden werden, so daß

$$I_{x_0+b}^{\infty} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > N_4 \quad (1.85)$$

gilt. Definiert man nun  $N_0$  als das Maximum von  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  und  $N_4$ , so gelten für alle  $n > N_0$  alle drei Ungleichungen (1.82), (1.84) und (1.85). Dies ist gleichbedeutend mit

$$d_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \text{für } n > N_0 \quad (1.86)$$

Das bedeutet, für ein vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  kann tatsächlich ein  $N_0$  gefunden werden, so daß (1.72) für alle  $n > N_0$  gilt. Dies war zu zeigen.

Die  $\delta$ -Funktion, wie sie hier bisher betrachtet wurde, besitzt als Argument ein Skalar  $x$ . Es gibt auch eine vektorielle Version mit  $\delta(\vec{x})$ , die als Argument einen Vektor besitzt. Sie kann entsprechend als Grenzwert einer Delta-Folge  $\delta_n(\vec{x})$  eingeführt werden. Die Integrationen sind dabei statt von  $-\infty$  bis  $+\infty$  über den gesamten Raum zu nehmen. Rein formal besteht sonst kein Unterschied zwischen der eindimensionalen und der dreidimensionalen Version. Es gelten auch vergleichbare Rechenregeln. Entsprechend zu Gleichung (1.69) gilt für alle stetigen Funktionen  $A(\vec{x})$  die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^3} A(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) dx = A(\vec{x}_0) \quad (1.87)$$

Im folgenden werden noch einige wichtige Rechenregeln für die  $\delta$ -Funktion vorgestellt. Es gilt

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.88)$$

Diese Beziehung ist natürlich wieder im integralen Sinn zu verstehen. Sie folgt direkt aus der Gleichheit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(z) \frac{dz}{|a|} \quad (1.89)$$

Diese ergibt sich durch die Substitution

$$dx = \frac{1}{a} dz \quad (1.90)$$

Eine etwas kompliziertere Regel ist mit

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad (1.91)$$

gegeben. Diese Regel gilt nur unter der Bedingung, daß die Funktion  $g(x)$  lediglich eine Nullstelle bei  $x = x_0$  besitzt. Zusätzlich muß  $g(x)$  an dieser Stelle differenzierbar sein. Allgemein gilt für eine stetige Funktion  $f(x)$  die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (1.92)$$

Dabei sind  $x_n$  die Nullstellen der Funktion  $g(x)$ . Diese Funktion muß an den entsprechenden Stellen differenzierbar sein.

## 1.6 Spektrale Zerlegung

Ein wichtiges Instrument der spektralen Analyse von Signalen ist die Fourier-Transformation. Betrachtet man eine reelle oder komplexe Funktion  $s(t)$ , so ist dessen Fourier-Transformierte gegeben durch:

$$\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (1.93)$$

Die Transformierte  $\tilde{s}(\omega)$  enthält die gesamte Information von  $s(t)$ . Durch die Rücktransformation

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (1.94)$$

kann  $s(t)$  wieder rekonstruiert werden. In der Literatur wird oft  $\tilde{s}(\omega)$  auch mit  $e^{+i\omega t}$  definiert. Ebenso wird häufig die Fourier-Transformierte mit dem Vorfaktor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  definiert. Die Rücktransformation hat dann entsprechend auch einen anderen Vorfaktor oder ein anderes Vorzeichen im  $e^{-i\omega t}$ -Term.

Zunächst soll eine einfache Eigenschaft der Fourier-Transformation vorgestellt werden. Für komplexe Zahlen  $z$  gilt allgemein die Beziehung

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \quad (1.95)$$

Mit  $z = \omega t$  folgt aus (1.93)

$$\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt \quad (1.96)$$



## 1 Einleitung

Das erste Integral repräsentiert den Realteil der Fourier-Transformierten und das zweite den Imaginärteil. Ist  $s(t)$  eine gerade Funktion, d.h.  $s(t) = s(-t)$ , verschwindet das zweite Integral und  $\tilde{s}(\omega)$  ist rein reell. Falls  $s(t)$  eine ungerade Funktion ist, d.h.  $s(t) = -s(-t)$ , wird das erste Integral Null und  $\tilde{s}(\omega)$  ist rein imaginär.

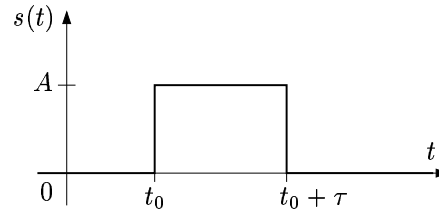


Abbildung 1.9: Rechteckpuls der Dauer  $\tau$  und Stärke  $A$

Es wird die Fourier-Transformierte eines wie in Abbildung 1.9 dargestellten Rechteckpulses betrachtet. Formal ist die Funktion  $s(t)$  gegeben durch:

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{für } t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.97)$$

Einsetzen in (1.93) ergibt:

$$\tilde{s}(\omega) = A \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-i\omega t} dt = \left[ -\frac{A}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{t_0}^{t_0+\tau} \quad (1.98)$$

Daraus folgt

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{iA}{\omega} \left[ e^{-i\omega(t_0+\tau)} - e^{-i\omega t_0} \right] \quad (1.99)$$

Der Verlauf dieser Funktion ist für ein Beispiel mit  $t_0 = 1$ ,  $\tau = 1$  und  $A = 1$  in Abbildung 1.10 dargestellt.

Besonders interessant ist der Grenzfall, daß die Pulsbreite  $\tau$  immer kleiner wird. Um diesen Fall zu untersuchen, wird (1.99) durch Ausklammern zu

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{iA}{\omega} e^{-i\omega(t_0+\tau/2)} \left[ e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2} \right] \quad (1.100)$$

umgeformt. Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt der Zusammenhang

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1.101)$$

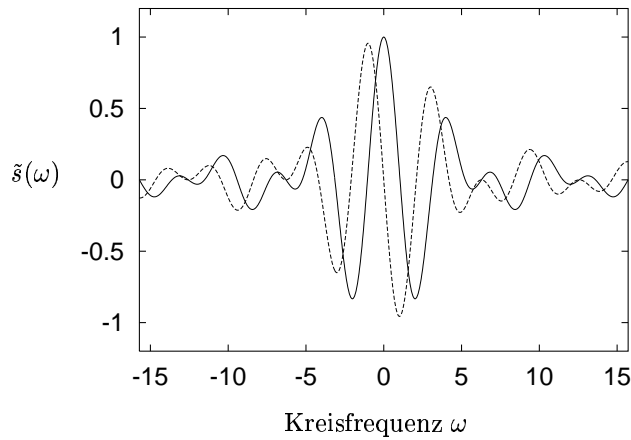


Abbildung 1.10: Fourier-Transformierte eines Rechteckpulses mit  $t_0 = 1$ ,  $\tau = 1$  und  $A = 1$ ; Durchgezogene Kurve:  $\Re\{\tilde{s}(\omega)\}$ ; Gestrichelte Kurve:  $\Im\{\tilde{s}(\omega)\}$

Vergleicht man die rechte Seite mit der eckige Klammer in (1.100) ergibt sich

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{iA}{\omega} e^{-i\omega(t_0+\tau/2)} \left[ 2i \sin\left(-\frac{\omega\tau}{2}\right) \right] \quad (1.102)$$

Dies kann in

$$\tilde{s}(\omega) = A\tau \cdot e^{-i\omega(t_0+\tau/2)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \quad (1.103)$$

umgewandelt werden. Der Betrag der ersten beiden Faktoren auf der rechten Seite ist unabhängig von  $\omega$ . Der dritte Faktor geht für  $\omega\tau \rightarrow 0$  gegen Eins und für  $\omega\tau \rightarrow \pm\infty$  gegen Null. Das bedeutet, daß der Betrag  $|\tilde{s}(\omega)|$  für ein festes  $\tau$  mit  $1/\omega$  abnimmt. Dieser Abnahme ist entsprechend dem  $\sin$ -Term in (1.103) eine oszillatorische Abhängigkeit von  $\omega$  überlagert. Die Abnahme ist umso stärker je größer  $\tau$ , also je breiter der Rechteckpuls, ist. Das bedeutet anschaulich, daß lange Pulse relativ geringe hochfrequente Anteile enthalten. Dagegen sind für relativ kurze Pulse auch für relativ große  $\omega$  die Anteile noch bedeutend. Theoretisch kann man die Pulsdauer gegen Null ( $\tau \rightarrow 0$ ) und gleichzeitig die Amplitude gegen unendlich ( $A \rightarrow \infty$ ) gehen lassen, so daß die Pulsstärke  $B = \tau A$  konstant bleibt. Für die Fourier-Transformierte ergibt sich für diesen Grenzfall:

$$\tilde{s}(\omega) \longrightarrow B e^{-i\omega t_0} \quad (1.104)$$

Das heißt, der unendlich kurze Puls mit endlicher Stärke besitzt Anteile in allen Frequenzbereichen. Der Betrag  $\tilde{s}(\omega)$  ist für alle  $\omega$  gleich groß.

## 1 Einleitung

Ein unendlich kurzer Puls mit der Stärke Eins wird mathematisch durch die Dirac'sche  $\delta$ -Funktion ausgedrückt. Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (1.105)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt = g(t_0) \quad (1.106)$$

unter der Voraussetzung, daß  $g(t)$  eine stetige Funktion ist. Damit läßt sich für die Funktion

$$s(t) = B \delta(t - t_0) \quad (1.107)$$

die Fourier-Transformierte bestimmen. Einsetzen von (1.107) in (1.93) liefert

$$\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t - t_0) dt = B e^{-i\omega t_0} \quad (1.108)$$

Die formale Ergebnis für die  $\delta$ -Funktion stimmt mit dem Grenzfall (1.104) überein. Die Rücktransformation ergibt nach (1.94):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} B \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \quad (1.109)$$

Vergleicht man dies mit (1.107) folgt eine weitere allgemeine Beziehung für die  $\delta$ -Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx = 2\pi \delta(y) \quad (1.110)$$

Dabei sind  $x$  und  $y$  reelle Zahlen. Mit Hilfe dieser Gleichung kann nun einfach die Fourier-Transformierte eines harmonischen Signals angegeben werden. Aus

$$s(t) = B e^{i\omega_0 t} \quad (1.111)$$

folgt mit (1.110)

$$\tilde{s}(\omega) = B \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi B \delta(\omega_0 - \omega) \quad (1.112)$$

## 1.6 Spektrale Zerlegung

Dies bedeutet, ein harmonisches Signal besitzt im Spektrum lediglich ein unendlich scharfen  $\delta$ -Puls. In diesem Fall spricht man von einem diskreten Spektrum. Ist das Signal eine Überlagerung aus mehreren harmonischen Anteilen, zum Beispiel mit

$$s(t) = \sum_{n=1}^N B_n e^{i\omega_n t} \quad (1.113)$$

so wird die Transformierte zu

$$\tilde{s}(\omega) = \sum_{n=1}^N B_n \delta(\omega_n - \omega) \quad (1.114)$$

Die Fourier-Transformation (1.93) mit der Rücktransformation (1.94) kann als Erweiterung der Entwicklung in Fourier-Reihen angesehen werden. Damit lassen sich auch nichtperiodische Signale, die ein kontinuierliches Spektrum besitzen behandeln. Periodische Signale können immer als Reihe in der Form (1.113) dargestellt werden. Um die diskrete Form mit der integralen Darstellung zu verbinden ist die  $\delta$ -Funktion notwendig. Analog zur Problematik des Massenpunkts im vorigen Abschnitt können damit diskrete Verteilungen auch in Integralform angegeben werden.