Übungsaufgaben WS 2008-2009, Blatt 2

Abgabe: 26. Januar

Aufgabe 1: Moden im Windkanal (4 Punkte)

In einem Windkanal sind Experimente bei einer Geschwindigkeit von 100 m/s geplant. Die Messstrecke des geschlossenen Kanals hat einen Querschnitt von 0.5 m mal 0.5 m und eine Länge von 2 m. Der zuständige Versuchsingenieur führt zur Vorbereitung einige Kontrollmessungen bei der angegebenen Geschwindigkeit durch. Mit einem Mikrofon in der seitlichen Kanalwand stellt er Druckstörungen mit einer Frequenz von 328 Hz fest. Diese Störungen werden offensichtlich von dem Antrieb des Kanals verursacht und können sich in Form von Moden auch in der Messstrecke ausbreiten. Weitere Tests mit einem Mikrofon in der Messstrecke zeigen, dass der Effektivwert (RMS) der Störung nur in Querrichtung und nicht in der Höhe variiert. In der Kanalmitte verschwindet der RMS-Wert ganz, und an den seitlichen Wänden besitzt er jeweils ein Maximum. Der Versuchsingenieur nimmt an, dass nur ausbreitungsfähige Moden in der Messstrecke an den Druckstörungen beteiligt sind. Nach einigen Überlegungen und Berechnungen kommt er zu dem richtigen Schluss, dass sich die Störungen wie in einem zweidimensionalen Kanal mit einer Breite von 0.5 m und ausschließlich in Form der ersten höheren Mode ausbreiten. Er kann jedoch nicht die Ausbreitungsrichtung bestimmen. Im Prinzip können die Störungen noch aus zwei Anteilen bestehen, die sich in und entgegen der Strömungsrichtung ausbreiten. Diese Anteile würde man üblicherweise durch Korrelationsmessungen mit mehreren Mikrofonen ermitteln. Da dem Versuchsingenieur nur ein Mikrofon zur Verfügung steht, führt er ein Experiment durch, in dem das Mikrofon kurzzeitig in der Messstrecke mit der Strömung mitbewegt wird. Dem Versuchstingenieur ist klar, dass ein mitbewegter Beobachter die beiden Anteile mit unterschiedlicher Frequenz warnimmt. Durch Fourier-Analyse können diese dann getrennt werden. Aus der Stärke der beiden Teilsignale kann er so bestimmen, wie groß die Anteile in und entgegen der Strömungsrichtung sind.

Fragen:

a) Wieso ist die Schlussfolgerung des Versuchsingenieurs richtig, dass sich die Störungen in Form der ersten höheren Mode ausbreiten?

b) Welche beiden Frequenzen besitzen die Anteile im mitbewegten Bezugssystem?

Hinweis: Die Dichte in der Messstrecke soll $1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ und die Schallgeschwindigkeit 340 m/s betragen.

Aufgabe 2: Konvektive Wellengleichung (4 Punkte)

Um die Wellenausbreitung in der Messstrecke eines Windkanals zu beschreiben, wird häufig vereinfachend von einem homogenen Strömungsfeld ausgegangen und Effekte wie zum Beispiel Grenzschichten an der Kanalwand vernachlässigt. Das Fluid soll überall mit der Geschwindigkeit U in x_1-Richtung strömen. Für diesen Fall wird die Schallausbreitung durch die konvektive Wellengleichung in der Form

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 p' - \Delta\, p' = 0$$

beschrieben. Dabei stellt der Ausdruck in der runden Klammer einen Differentialoperator dar. Das Quadrat an der Klammer drückt dessen zweifache Anwendung im Sinne von

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 p' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left\{\frac{\partial p'}{\partial t} + U\frac{\partial p'}{\partial x_1}\right\} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2U\,\frac{\partial^2 p'}{\partial t\,\partial x_1} + U^2\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2}$$

aus. Analog wie die gewöhnliche Wellengleichung kann auch diese konvektive Wellengleichung aus der Kontinuitäts-, der Eulergleichung und einer Druck-Dichte-Beziehung hergeleitet werden.

Fragen:

a) Wie sehen die linearisierte Kontinuitätsgleichung und die linearisierte Euler-Gleichung in dem vorliegenden Fall aus?

b) Wie kann aus den beiden linearisierten Gleichungen (Kontinuität und Euler) die oben angegebene Wellengleichung hergeleitet werden?

Hinweise: Zweckmäßigerweise wird die x_1–Richtung mit der Kanalachse identifiziert. Die Geschwindigkeit wird dann mit der konstanten mittleren Strömungsgeschwindigkeit U im Kanal

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{v}\,'$$

in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil zerlegt.

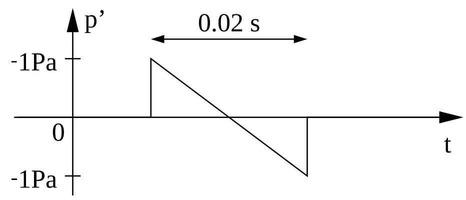
Für die substantielle Ableitung gilt:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \mathrm{grad})\,\vec{v} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Sowohl im mitbewegten als auch im kanalfesten Bezugssystem gilt in jedem Punkt die linearisierte Druck-Dichte-Beziehung $p' = c^2 \rho'$. Zur Ableitung der konvektiven Wellenleitung sollen alle anderen Beziehungen im kanalfesten Bezugssystem ausgedrückt werden.

Aufgabe 3: Akustische Energie (4 Punkte)

In einem Rohr mit einer Querschnittsfläche $Q = 1\,\mathrm{m}^2$ breitet sich in einer Richtung (z.B. positive x-Richtung) eine ebene Welle aus. An einer Stelle im Rohr wird der in der Abbildung gezeigte "N-förmige" Druckverlauf gemessen. Das Rohr ist mit Luft unter Normalbedingungen gefüllt ($\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m}^3$, $c = 340\,\mathrm{m/s}$).



Fragen:

a) Wie sieht der zeitliche Verlauf der akustischen Intensität an der Messposition aus? Trage den zeitlichen Verlauf der akustischen Intensität auf (mit Einheiten an den Achsen!).

b) Wie groß ist die gesamte akustische Energie, die in der "N-förmigen" Welle steckt?

Aufgabe 4: Temperaturschwankungen (4 Punkte)

In einem mit Luft gefüllten Raum ($\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m}^3$, $c = 340\,\mathrm{m/s}$) wird an einer Stelle der Schalldruck p' gemessen. Es wird ein maximaler Wert von $(p')_{\max} = 1\,\mathrm{Pa}$ festgestellt.

Fragen:

a) Wie groß ist die maximale Temperaturschwankung $(T')_{\max}$ an dieser Stelle?

b) Zeige, dass an einer festen, undurchlässigen Wand des Raumes die Beziehung

$$\vec{n} \cdot \mathrm{grad}\, T' = 0$$

erfüllt ist, wobei $\vec{n}$ den Normalenvektor senkrecht zur Wand bezeichnet ($\vec{n} \cdot \mathrm{grad}\, T'$: Skalarprodukt).