Übungsaufgaben WS 2005-2006, Blatt 1

Abgabe: 12. Dezember 2005

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Wie nützlich komplexe Zahlen sind zeigt eine Denkaufgabe des Physikers George Gamow: Eine alte Urkunde berichtet von einem Piratenschatz, der auf einer verlassenen Insel vergraben wurde. Auf der Insel stehen zwei Bäume, A und B, und die Reste eines Galgens. Man gehe vom Galgen auf geradem Wege zum Baum A und zähle die Schritte. Bei A wende man sich um neunzig Grad nach links, gehe nochmals die gleiche Schrittzahl geradeaus und markiere die erreichte Stelle mit einem Stock. Dann begebe man sich zurück zum Galgen, gehe auf geradem Wege zum Baum B, zähle wieder die Schritte, wende sich bei B um neunzig Grad nach rechts und gehe die gleiche Schrittzahl geradeaus. Die erreichte Stelle werde wieder mit einem Stock markiert. Wenn man genau in der Mitte zwischen den beiden Stöcken gräbt, so wird man auf den Schatz stoßen.

Ein junger Abenteurer, der die Urkunde fand, mietet sich ein Schiff und segelte zur Insel. Er hatte keine Mühe, die Bäume zu finden, aber zu seinem Jammer war der Galgen verschwunden, und die Zeit hatte alle Spuren verwischt, so daß die Stelle an der er sich befunden hatte, nicht mehr zu erkennen war. Der junge Mann war ratlos und kehrte mit leeren Händen zurück.

Nach George Gamow hätte er den Schatz mit Leichtigkeit finden können, wenn er mit den komplexen Zahlen und ihrer geometrischen Bedeutung vertraut gewesen wäre.

Frage: Wie kann man den Schatz mit Hilfe der komplexen Zahlen finden?

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Eine (stabile, starre) Tür wird mit Wucht zugeknallt. Die Geschwindigkeit der äußeren Türkante soll 10 m/s betragen, bevor die Tür schlagartig stoppt. Hinter der Tür entsteht eine Schallwelle durch das plötzliche Abbremsen der mitbewegten Luft.

Frage: Wie groß ist der maximale Druck in der Schallwelle?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bei der Verformung von Fluidelementen durch eine ebene Schallwelle kommt es zu einer Scherung, die wegen der Zähigkeit des Fluids eine Schubspannung bewirkt. Bei der Herleitung der Wellengleichung wurde die Zähigkeit vernachlässigt, und nur die Druckspannungen auf die Fluidelemente berücksichtigt.

Frage: Wie groß ist die maximal auftretende Spannung durch Zähigkeit im Verhältnis zur maximalen Druckspannung in einer ebenen, sinusförmigen 1-kHz-Welle (a) in Luft und (b) in Wasser?

Hinweise: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß sich die Welle in x_1-Richtung ausbreitet:

$$p'(\vec{x},t) = A\ \cos(\omega(t - x_1/c))$$

Da nur Bewegung in x_1-Richtung stattfindet ($v_2 = 0$ und $v_3 = 0$) hat der Spannungstensor nur in einem Element ein Anteil durch die Zähigkeit η, und zwar in der Normalspannung:

$$\tau_{11} = 2\eta \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

In einem Rohr befinden sich zwei Kolben im Abstand L. Die Kolben können sich frei bewegen. Es gibt keine Rückstellkraft durch eine Feder und die Reibung soll vernachlassigbar klein sein. In den äußeren Bereichen und zwischen den Kolben ist Luft unter Normalbedingungen ($c = 340\,\mathrm{m/s}$, $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$) vorhanden. Die Kolben haben beide die gleiche Masse M. Das Flächengewicht M/Q der Kolben beträgt $2\,\mathrm{kg/m^2}$. Es wird der Fall betrachtet, dass eine ebene, harmonische Welle von links auf den ersten Kolben trifft. Dabei entsteht eine reflektierte und eine transmittierte Welle. Letztere trifft dann auf den zweiten Kolben, wobei sich auch am zweiten Kolben eine reflektierte und eine transmittierte Welle ergibt. Die am zweiten Kolben reflektierte

Welle wirkt auf den ersten Kolben zurück. Es soll die Reflexion an dem Kolbensystem berechnet werden. Zunächst wird jedoch nur ein einzelner Kolben betrachtet.

Teil a) Zeige, dass der Reflexionsfaktor an einem einzelnen Kolben durch

$$R = \frac{Z_{\mathrm{K}} - \rho_0 c}{Z_{\mathrm{K}} + \rho_0 c}$$

dargestellt werden kann, wobei sich die Impedanz des Kolbens mit

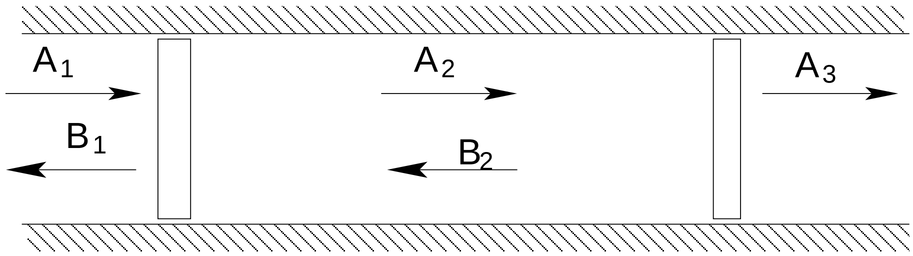
$$Z_{\mathrm{K}} = \frac{\hat{p}_{\mathrm{K}}}{\hat{u}_{\mathrm{K}}} = Z_{\mathrm{M}} + \rho_0 c$$

aus einem mechanischem Anteil Z_{M} und dem Wellenwiderstand der Luft $\rho_0 c$ zusammensetzt. Berechne Z_{M} für die Frequenzen 40 Hz, 400 Hz und 4 kHz.

Teil b) Wie groß ist der Reflexionsfaktor an einem einzelnen Kolben für die unter (a) genannten Frequenzen? Es ist sowohl der Real- und Imaginärteil als auch der Betrag ($|R|$) anzugeben.

Teil c) Wie groß ist der Reflexionsfaktor an dem Kolbensystem für die unter (a) genannten Frequenzen, wenn die Kolben einen Abstand L von 10 cm besitzen? Es ist wieder der Real- und Imaginärteil als auch der Betrag ($|R|$) anzugeben.

Teil d) Nun wird der Abstand L variiert und die Frequenz bei 4 kHz konstant gehalten. Zeichne den Verlauf von $|R|$ als Funktion von L in einem Bereich von 1 cm $\leq L \leq$ 10 cm. Bei welchen Abständen L wird der Reflexionsfaktor gleich Null?



Gegeben:
Dichte: Luft 1.2 kg/m^3, Wasser 10^3 kg/m^3;
Schallgeschwindigkeit: Luft 340 m/s, Wasser 1450 m/s;
Kinematische Viskosität $\nu = \eta/\rho$: Luft $0.15 \cdot 10^{-4} m^2/s$, Wasser $0.1 \cdot 10^{-5} m^2/s$.