Strömungsakustik II Sommersemester 07, Übungen Blatt 1
Abgabe: 8. Juni 2007

Aufgabe 1) Monopolfeld

Im Ursprung des freien Raums (ohne Berandungen) befindet sich ein Monopol, der harmonisch Schall abstrahlt. Die Frequenz der Quelle beträgt 200 Hz. In einem Meter Entfernung vom Ursprung wird eine maximale Amplitude (Spitzenwert) von 1 Pa erreicht. Alternativ soll ein entsprechendes Schallfeld mit einer flächenhaften Quellverteilung erzeugt werden. Die Quellstärke ist dabei auf der Oberfläche einer gedachten Kugel mit Radius $a = 0.1\,\mathrm{m}$ verteilt. Die Mitte der Kugel befindet sich im Ursprung. Durch eine homogene Quellverteilung auf der Kugeloberfläche soll ein Schallfeld erzeugt werden, welches außerhalb des Kugelvolumens exakt mit dem Schallfeld des Monopols übereinstimmt. Die flächenhafte Quellverteilung soll Monopolcharakter haben. Das heißt anschaulich, der Monopol in der Mitte soll durch unendlich viele Monopole auf der Kugeloberfläche ersetzt werden, wobei die in das Fernfeld abgestrahlten Wellen gleich bleiben. Zu beachten ist, dass die Kugel nur gedacht und nicht wirklich vorhanden ist. Die von den Quellen auf der Oberfläche ausgehenden Wellen breiten sich in alle Richtungen aus und laufen also auch durch das Kugelvolumen. Dies kann formal ausgedrückt werden: Wenn $\phi_1 = \varphi_1\, e^{i\omega t}$ das akustische Potential außerhalb der gedachten Kugel ist, dann soll dessen komplexe Amplitude φ_1 durch eine Überlagerung

$$\varphi_1(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S C\, \frac{e^{-ikr}}{r}\, \mathrm{d}S(y)$$

mit

$$r = |\vec{x} - \vec{y}|\,;\; |\vec{x}| \geq a$$

dargestellt werden. Dabei ist S die Kugeloberfläche und C ist die konstante Stärke der Monopole in dieser Fläche. Die Größe C kann mit den Methoden aus Kapitel 8.1 ermittelt werden. Dazu muss eine Lösung $\varphi_2(\vec{x})$ der Helmholtz-Gleichung im Kugelinneren bestimmt werden, die auf der Kugeloberfläche mit dem Feld des Monopols übereinstimmt:

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_2(\vec{x}) \qquad \text{bei} \quad |\vec{x}| = a\,.$$

Das Feld im Außenbereich wird in der Form

$$\varphi_1(\vec{x}) = A_1\, \frac{e^{-ikR}}{R} \qquad \text{mit} \quad R = |\vec{x}|$$

geschrieben. Für das Feld im Innerenbereich kann der Ansatz

$$\varphi_2(\vec{x}) = A_2\, \frac{\sin(kR)}{R} \qquad \text{mit} \quad R = |\vec{x}|$$

verwendet werden. Die Dichte im freien Raum beträgt $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ und die Schallgeschwindigkeit ist $c = 340\,\mathrm{m/s}$.

Aufgabe 1.1: (2 Punkte)

Der Monopol im Ursprung kann als punktförmige Massenquelle angesehen werden, an der Masse periodisch ein- und ausströmt. Wie groß ist die maximale Amplitude des Massenstroms (Masse pro Zeit [kg/s], Spitzenwert)?

Hinweis: Siehe Kapitel 6.1; berechne zuerst A_1. Es soll angenommen werden, dass die zugeführte Masse auch die Dichte ρ_0 besitzt: die zugeführte Masse ist also gleich der verdrängten Masse.

Aufgabe 1.2: (2 Punkte)
Man zeige, dass der gewählte Ansatz für φ_2 tatsächlich eine Lösung der Helmholtz-Gleichung im Inneren der Kugel ist ($\Delta\varphi_2 + k^2\varphi_2 = 0$). Das ist insbesondere auch für die Stelle $R = 0$ zu überprüfen.
Hinweis: Die Lösung φ_2 besitzt keine Singularität! Zu zeigen ist unter anderem, dass es mit dem Ausdruck $\Delta\varphi_2$ an der Stelle $R = 0$ keine Probleme gibt.

Aufgabe 1.3: (2 Punkte)
Man drücke die Konstante C, die die Stärke der Monopole auf der Kugeloberfläche angibt, als Funktion der Amplitude A_1 und der Parameter $k = 2\pi/\lambda$ und a aus. Was passiert für $ka = \pi$ und $ka \to 0$? Interpretiere diese beiden Fälle anschaulich.
Hinweis: Es bietet sich an zuerst φ_2 festzulegen und die Konstante A_2 durch A_1 auszudrücken.

Aufgabe 1.4: (2 Punkte)
Die Quellverteilung auf der Oberfläche entspricht einer flächenhaften Massenquelle, die synchron (in Phase) oszilliert. Wie groß ist der maximale Massenstrom (Masse pro Zeit [kg/s], Spitzenwert), der an dieser verteilten Quelle aus- beziehungsweise einströmt? Vergleiche den Wert mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.
Hinweise: Der gesamte Massenstrom ergibt sich durch Integration über alle Quellen, die auf der Oberfläche sitzen. Die Konstante C legt die maximal ein- beziehungsweise ausströmende Masse pro Flächeneinheit auf der Oberfläche fest. Es zählt auch die Masse, die aus der Oberfläche ins Innere der Kugel strömt.

Aufgabe 2) Kugelwelle aus Quadrupolen (4 Punkte)

Zeige, dass man durch Überlagerung von drei Quadrupolen eine kugelsymmetrisches Feld – also eine Kugelwelle – erzeugen kann.
Hinweis: Die Aufgabe kann mit einer relativen kurzen Herleitung von wenigen Zeilen gelöst werden. Es sollte nicht mehr als eine Seite Rechnungen abgegeben werden.