Strömungsakustik II Sommersemester 05, Übungen Blatt 2
Abgabe: 4.7.2005

Aufgabe 1) Monopolfeld

Im Ursprung des freien Raums (ohne Berandungen) befindet sich ein Monopol, der harmonisch Schall abstrahlt. Die Frequenz der Quelle beträgt 200 Hz. In einem Meter Entfernung vom Ursprung wird eine maximale Amplitude (Spitzenwert) von 1 Pa erreicht. Alternativ soll ein entsprechendes Schallfeld mit einer flächenhaften Quellverteilung erzeugt werden. Die Quellstärke ist dabei auf der Oberfläche einer gedachten Kugel mit Radius $a = 0.1\,\mathrm{m}$ verteilt. Die Mitte der Kugel befindet sich im Ursprung. Durch eine homogene Quellverteilung auf der Kugeloberfläche soll ein Schallfeld erzeugt werden, welches außerhalb des Kugelvolumens exakt mit dem Schallfeld des Monopols übereinstimmt. Die flächenhafte Quellverteilung soll Monopolcharakter haben. Das heißt anschaulich, der Monopol in der Mitte soll durch unendlich viele Monopole auf der Kugeloberfläche ersetzt werden, wobei die in das Fernfeld abgestrahlten Wellen gleich bleiben. Zu beachten ist, daß die Kugel nur gedacht und nicht wirklich vorhanden ist. Die von den Quellen auf der Oberfläche ausgehenden Wellen breiten sich in alle Richtungen aus und laufen also auch durch das Kugelvolumen. Dies kann formal ausgedrückt werden: Wenn $\phi_1 = \varphi_1\, e^{i\omega t}$ das akustische Potential außerhalb der gedachten Kugel ist, dann soll dessen komplexe Amplitude φ_1 durch eine Überlagerung

$$\varphi_1(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S C\, \frac{e^{-ikr}}{r}\, \mathrm{d}S(y)$$

mit

$$r = |\vec{x} - \vec{y}|\,;\ |\vec{x}| \geq a$$

dargestellt werden. Dabei ist S die Kugeloberfläche und C ist die konstante Stärke der Monopole in dieser Fläche. Die Größe C kann mit den Methoden aus Kapitel 8.1 ermittelt werden. Dazu muß eine Lösung $\varphi_2(\vec{x})$ der Helmholtz-Gleichung im Kugelinneren bestimmt werden, die auf der Kugeloberfläche mit dem Feld des Monopols übereinstimmt:

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_2(\vec{x}) \qquad \text{bei} \quad |\vec{x}| = a\,.$$

Das Feld im Außenbereich wird in der Form

$$\varphi_1(\vec{x}) = A_1\, \frac{e^{-ikR}}{R} \qquad \text{mit} \quad R = |\vec{x}|$$

geschrieben. Für das Feld im Innerenbereich kann der Ansatz

$$\varphi_2(\vec{x}) = A_2\, \frac{\sin(kR)}{R} \qquad \text{mit} \quad R = |\vec{x}|$$

verwendet werden. Die Dichte im freien Raum beträgt $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ und die Schallgeschwindigkeit ist $c = 340\,\mathrm{m/s}$.

Aufgabe 1.1: (2 Punkte)
Der Monopol im Ursprung kann als punktförmige Massenquelle angesehen werden, an der Masse periodisch ein- und ausströmt. Wie groß ist die maximale Amplitude des Massenstroms (Masse pro Zeit [kg/s], Spitzenwert)?
Hinweis: Siehe Kapitel 6.1; berechne zuerst A_1.

Aufgabe 1.2: (2 Punkte)
Man zeige, daß der gewählte Ansatz für φ_2 tatsächlich eine Lösung der Helmholtz-Gleichung im Inneren der Kugel ist ($\Delta\varphi_2 + k^2\varphi_2 = 0$). Das ist insbesondere auch für die Stelle $R = 0$ zu überprüfen.
Hinweis: Die Lösung φ_2 besitzt keine Singularität! Zu zeigen ist unter anderem, daß es mit dem Ausdruck $\Delta\varphi_2$ an der Stelle $R = 0$ keine Probleme gibt.

Aufgabe 1.3: (2 Punkte)
Man drücke die Konstante C, die die Stärke der Monopole auf der Kugeloberfläche angibt, als Funktion

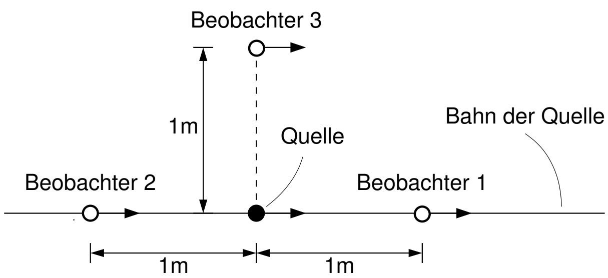
der Amplitude A_1 und der Parameter $k = 2\pi/\lambda$ und a aus. Was passiert für $ka = \pi$ und $ka \to 0$? Interpretiere diese beiden Fälle anschaulich.
Hinweis: Es bietet sich an zuerst φ_2 festzulegen und die Konstante A_2 durch A_1 auszudrücken.

Aufgabe 1.4: (2 Punkte)

Die Quellverteilung auf der Oberfläche entspricht einer flächenhaften Massenquelle, die synchron (in Phase) oszilliert. Wie groß ist der maximale Massenstrom (Masse pro Zeit [kg/s], Spitzenwert), der an dieser verteilten Quelle aus- beziehungsweise einströmt? Vergleiche den Wert mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.
Hinweis: Der gesamte Massenstrom ergibt sich durch Integration über die Oberfläche. Die Konstante C legt die maximal ein- beziehungsweise ausströmende Masse pro Fläche fest.

Aufgabe 2) Bewegte Quelle und Beobachter

Eine ideale Punktquelle bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $U = 170\,\mathrm{m/s}$ im sonst ruhendem Medium ($c = 340\,\mathrm{m/s}$). Die momentane Quellstärke ist durch eine harmonische Zeitfunktion der Form $Q(t) = A\,\sin(\omega t)$ gegeben. Drei Beobachter bewegen sich parallel zur Quelle mit gleicher Geschwindigkeit. Alle haben 1 m Abstand zur Quelle. Einer ist direkt vor der Quelle und einer direkt dahinter. Der Dritte befindet sich neben der Quelle. Die Anordnung ist in der Abbildung skizziert.



Frage: (4 Punkte)

Wie lange benötigt ein Signal von der Quelle zu den jeweiligen Beobachtern?
Hinweis: Auch die Beobachter bewegen sich relativ zum Medium.